

# Probestudium Physik

## Wellenphänomene

Dr. I. Knittel und Prof. Dr. U. Hartmann  
FR Experimentalphysik, Universität des Saarlandes  
Postfach 151150, 66041 Saarbrücken

Wellen sind in der Physik allgegenwärtig. Wir sehen zunächst von der physikalischen Begründung ab und stellen einige typische Wellenfunktionen und Wellenphänomene vor.

Versuch: Von der Schwingung zur Welle

### 1. Darstellung einer ebenen Welle

Die Auslenkung ist gegeben durch

$$A(x, t) = \sin(kx - \omega t) \text{ für } t = 0. \quad (1)$$

Wir lesen die Wellenlänge mit  $\lambda = 1.5 \text{ m}$  ab. Die Wellenzahl ist definiert als  $k = 2\pi / \lambda$ .

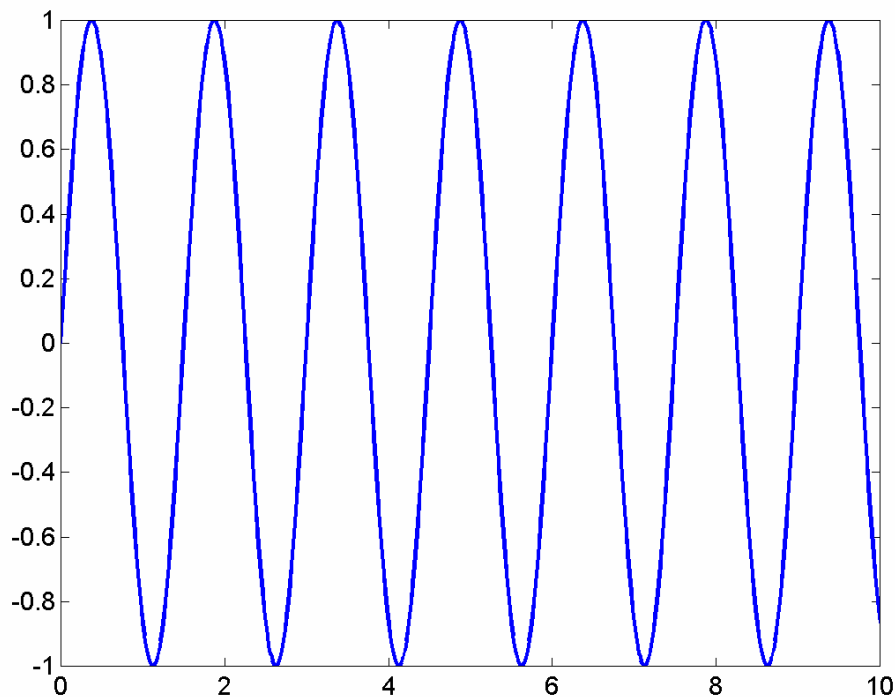


Bild 1: Ein Schnappschuss einer Welle zum Zeitpunkt  $t = 0$ .  
 Aufgetragen ist die auf Eins normierte Auslenkung gegen die Position in Metern.

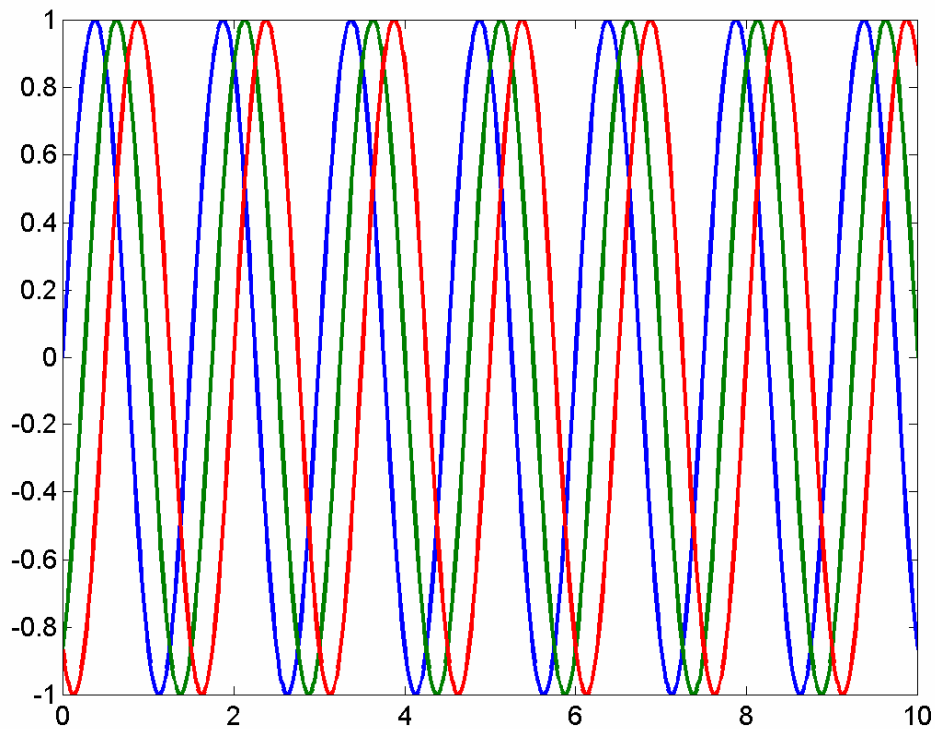


Bild 2: Die Welle aus Bild 1 zu den Zeitpunkten  $t=0$  (blau),  $t = 5$  Millisekunden (grün),  $t=10$ ms (rot).

Die Welle bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit  $c = 300\text{m/s}$  nach rechts  
 Die linkslaufende Welle erhält man mit negativer Wellenzahl:

$$A(x,t) = \sin(-kx - \omega t). \quad (2)$$

Die Kreisfrequenz in (1) ergibt sich zu  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T = \lambda/c$ , mit der Periode  $T = 1/200$  Sekunden. Es handelt sich um eine Welle mit einer Frequenz von 200Hz.

Gleichung (1) kann man auch schreiben als

$$A(x,t) = \sin(k(x - ct)). \quad (3)$$

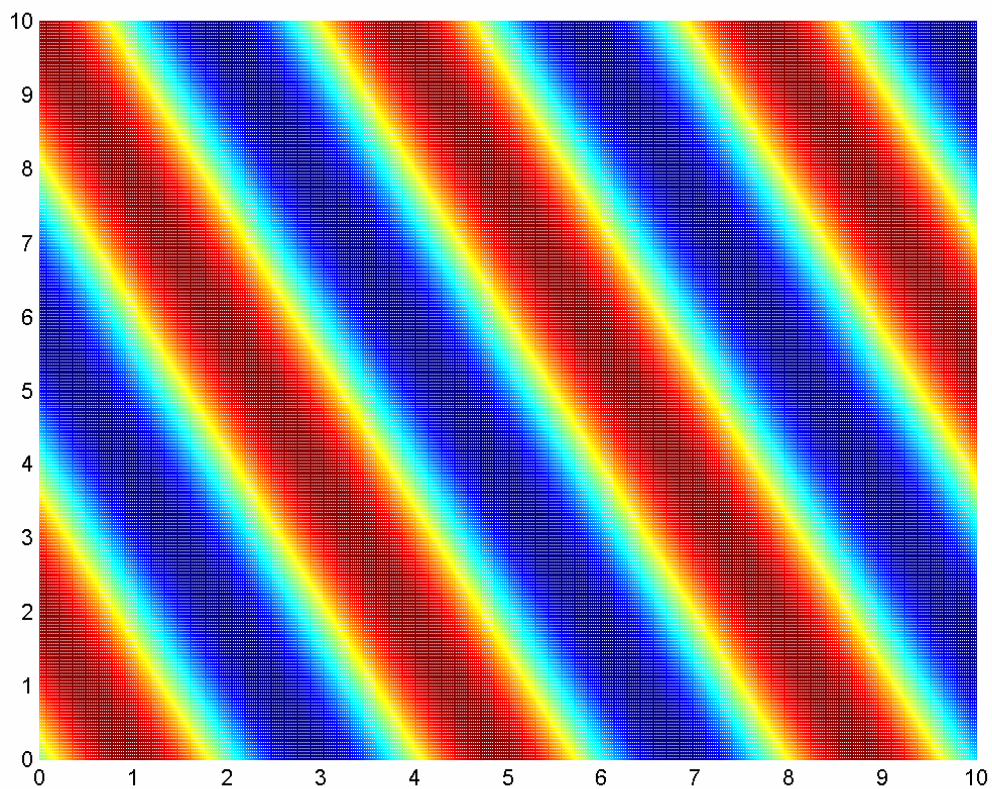


Bild 3: Schnappschuss einer Welle in 2 Dimensionen für  $t=0$  (blau negative und rot positive Auslenkung).

Die Gleichung für die Amplitude lautet

$$A(x, y, t) = \sin(k_1 x + k_2 y - \omega t). \quad (4)$$

Bei mehr als einer Dimension kann man bequem in Vektorform schreiben

$$A(\mathbf{x}, t) = \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad (5)$$

mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$ .

Auch diese Welle schreitet natürlich mit der Zeit fort.

## 2. Physik der Schallwelle, Energie der Welle

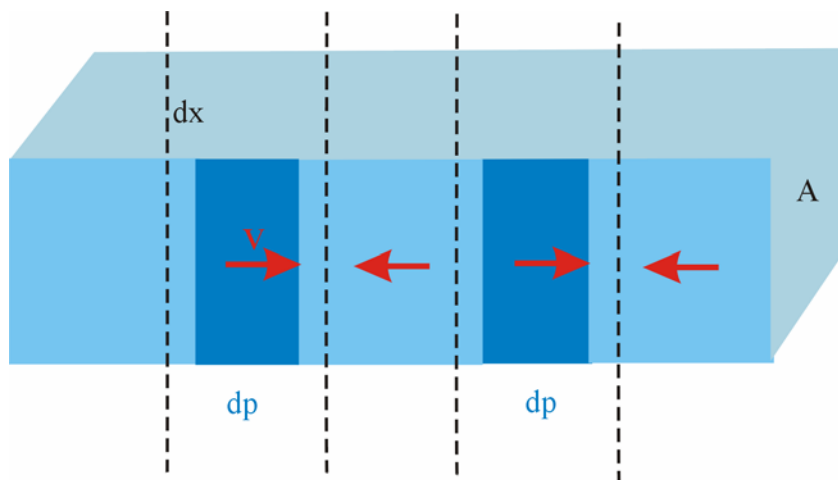


Bild 4: Schematische Darstellung einer Schallwelle.

### Versuch: Wellenmodell

Die Schallwelle der Wellenlänge  $\lambda$  besteht aus Bereichen erhöhten und erniedrigten Drucks mit Druckdifferenz  $dp$ . Man kann sich vorstellen, dass Zellen der Länge  $\lambda/2$  um einen Betrag  $dx$  gesteckt und gestaucht sind, wodurch sich Überdruck und Unterdruck einstellt. Die Druckdifferenzen führen zu einem Geschwindigkeitsfeld, das wiederum Ursache für neue Druckdifferenzen wird – eine fortschreitende Welle entsteht. (Weitere Infos findet man unter [www.physicsofsound.com](http://www.physicsofsound.com)). Einige Abschätzungen kann man leicht machen:

Um eine Luftzelle zu komprimieren, ist Arbeit nötig

$$W = dpdV = dpdxA. \quad (6)$$

$A$  ist die Querschnittsfläche und  $dV$  die Volumenänderung.  
Mit der Kompressibilität der Luft,

$$\frac{dV}{V} = \kappa dp, \quad \kappa \approx 1/p, \quad (7)$$

hat man die Energiedichte

$$w_p = \frac{W}{V} = \kappa(dp)^2, \quad V = A\lambda. \quad (8)$$

Ein zweiter Teil der Energie der Welle steckt als Bewegungsenergie im Geschwindigkeitsfeld der Welle. Man kann zeigen, dass diese kinetische Energie gleich der Druckenergie ist. Die Gesamtenergiedichte der Welle ist also

$$w = 2w_p. \quad (9)$$

Wenn sich die Welle mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  bewegt, ist die Schallleistung pro Fläche

$$\frac{P}{A} = wc. \quad (10)$$

Die Lautstärke wird normalerweise in Dezibel angegeben:

$$L = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{dp}{p_{\text{ref}}} \right), \quad p_{\text{ref}} = 20 \mu\text{Pa}. \quad (11)$$

Der Referenzdruck entspricht ungefähr der menschlichen Hörschwelle.

Ein vollkommen effektiver 10Watt-Lautsprecher mit einer Fläche  $A$  von 10 cm x10 cm erzeugt direkt vor der Membran eine Energiedichte von

$$\frac{P}{A} = 1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = wc, \quad c = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad w \approx 3 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}. \quad (12)$$

Die Druckdifferenz beträgt

$$dp = \sqrt{w_p} = 500\text{Pa}. \quad (13)$$

Das sind etwa 5 Promille des Luftdrucks. Die Lautstärke beträgt 147 Dezibel. (Es scheint, dass handelsübliche Lautsprecher nicht besonders effektiv sind). Die stärksten Schallwellen von 190 Dezibel (Krakatao-Explosion, Einschlag von Mörsergranaten) erreichen Druckdifferenzen in der Größenordnung des Luftdrucks selbst.

### 3. Allgemeinere Wellenformen: Kugelwelle

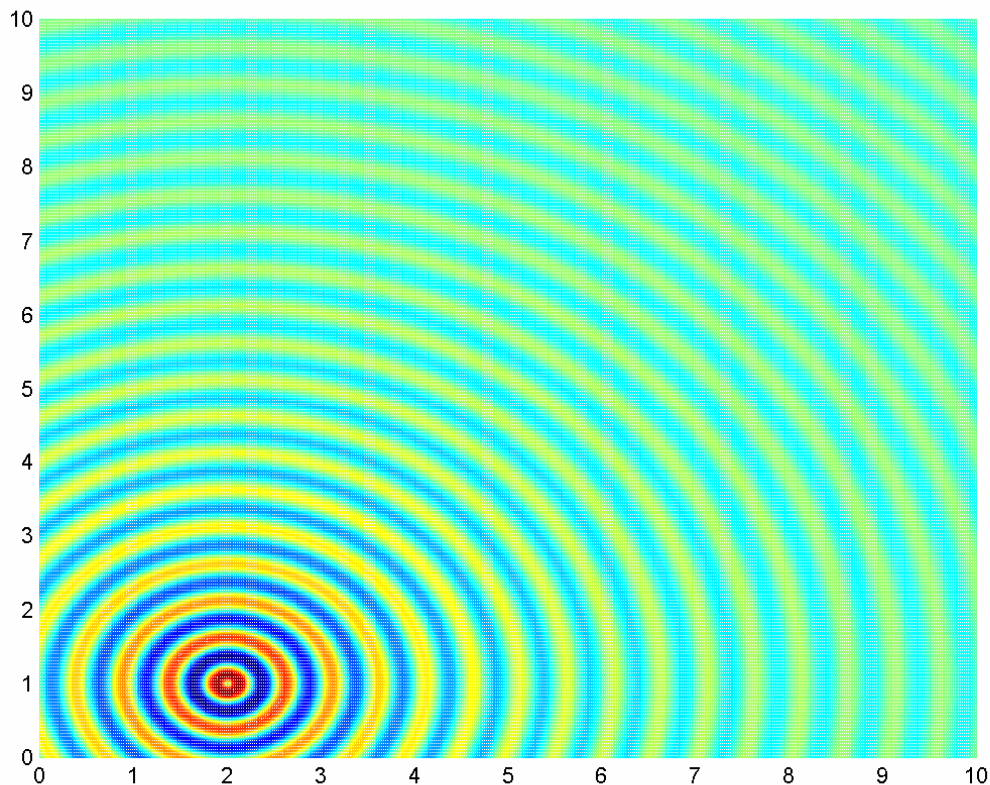


Bild 5: Schnappschuss einer Kugelwelle in zwei Dimensionen mit  $\mathbf{x}_0=(2,1)$ .

Eine Kugelwelle um das Zentrum  $\mathbf{x}_0$  erhält man durch den Ausdruck

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} \sin(kr - \omega t), \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \quad (14)$$

Versuch: Wellenwanne

### 4. Interferenz

In Bild 6 sind am linken Bildrand zwei gleichphasige Quellen aktiv, die einen vertikalen Abstand von einer halben Wellenlänge haben. In horizontaler Richtung verstärken sich die beiden Teilwellen („konstruktive Interferenz“), während sie sich in vertikaler Richtung aufheben („destruktive Interferenz“),

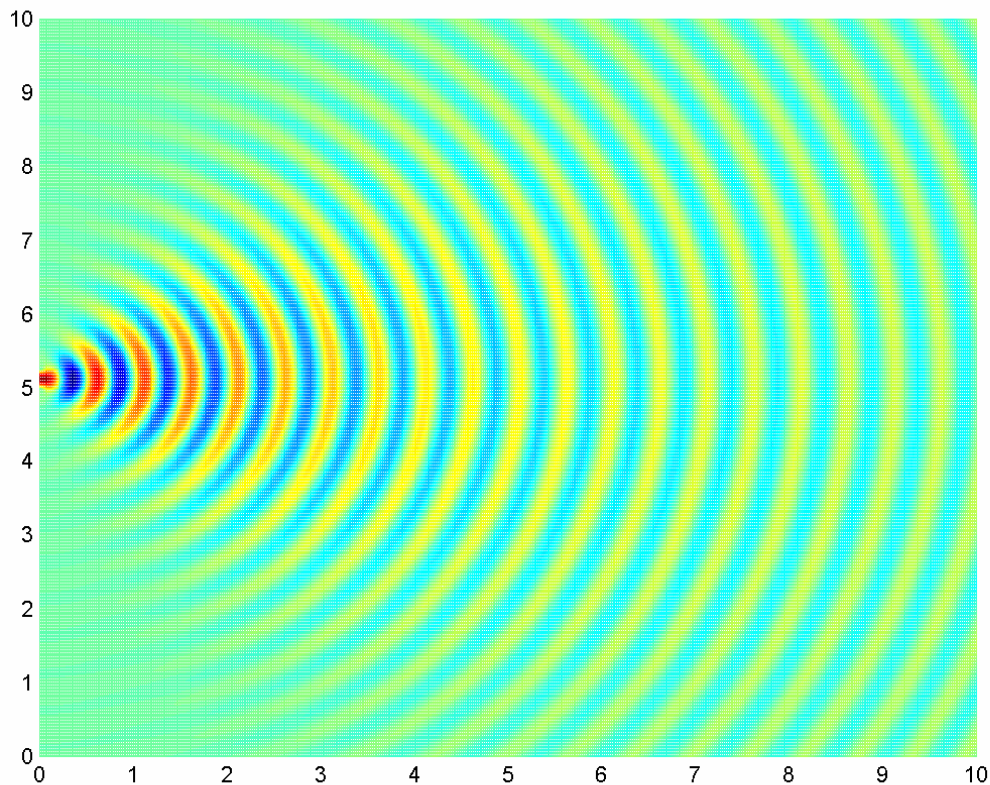


Bild 6: Interferenz zweier gegeneinander vertikal verschobener Kugelwellen.

#### Versuch: Wellenwanne

In Bild 7(a)-(d) ist am linken Bildrand eine Reihe von gleichphasigen Quellen aktiv, die einen vertikalen Abstand von  $\lambda/5$  haben, was deutlich weniger als eine halbe Wellenlänge ist. Sie bilden annähernd einen Ausschnitt aus einer Wellenfront, wie sich auch beim Durchgang einer nach rechts laufenden Welle durch Spalte am linken Bildrand ergeben würde.

#### Versuch: Wellenwanne

Deutlich zu sehen ist die Beugung am schmalen Spalt, und die Annäherung an die geometrische Optik für den weiten Spalt – In der geometrischen Optik sind alle geometrischen Größen der Umgebung groß gegen die Wellenlänge, und das Licht breitet sich in Form von „Lichtstrahlen“ aus. Außerdem illustrieren Bilder 7(a)-(c) die Auflösungsgrenze der Optik (Abbe'sches Beugungslimit). Das Fernfeld der Welle als Bild 7(a) enthält kaum noch Informationen über die Geometrie der Quelle, da die Strukturen kleiner als eine Wellenlänge sind.

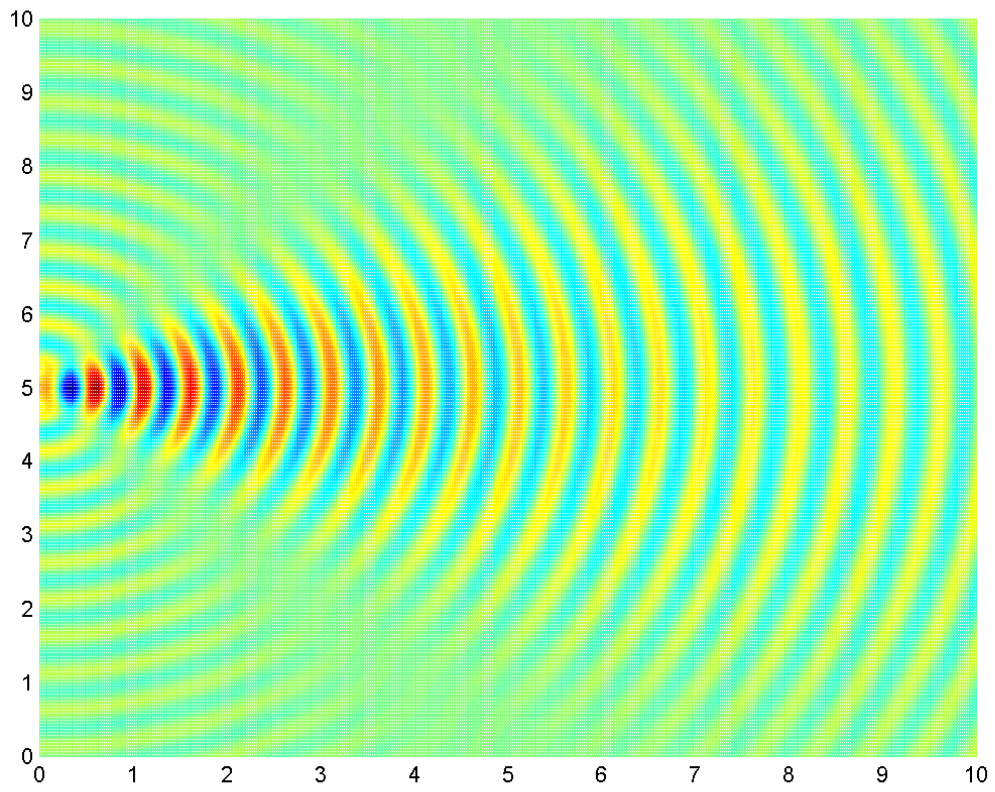


Bild 7(a): Überlagerung gleichphasiger Kugelwellen am linken Bildrand; Positionen  $y = 4.9, 5, 5.1$ .

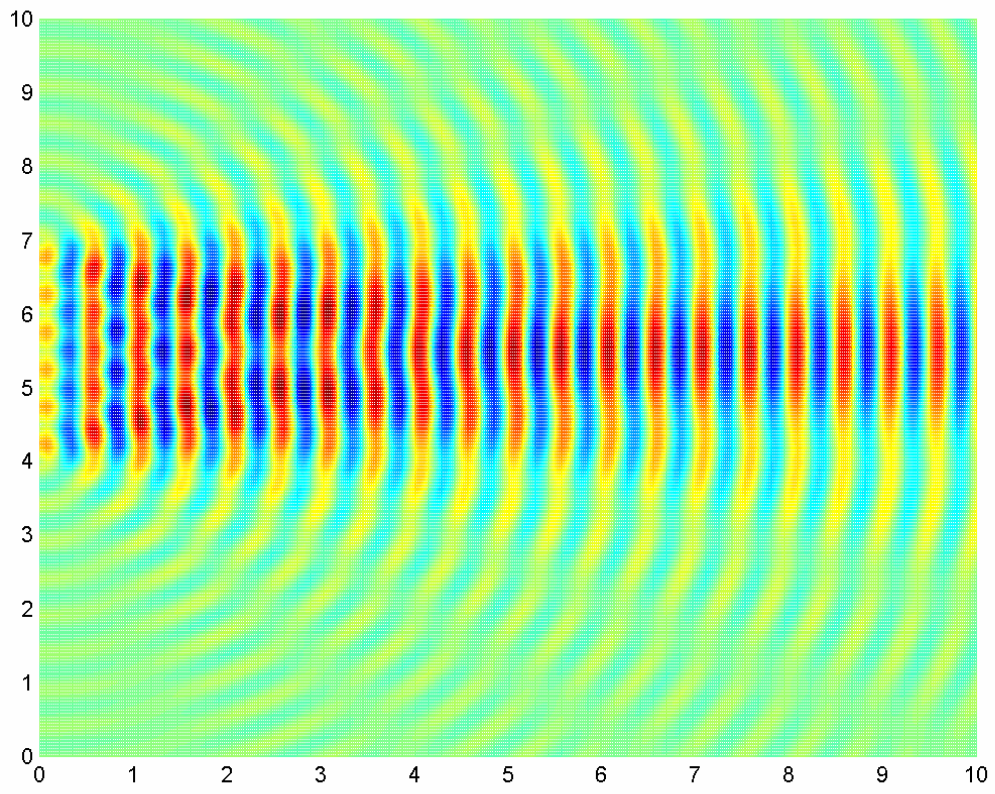


Bild 7(b): Positionen 4 -7 im Abstand 0.1.

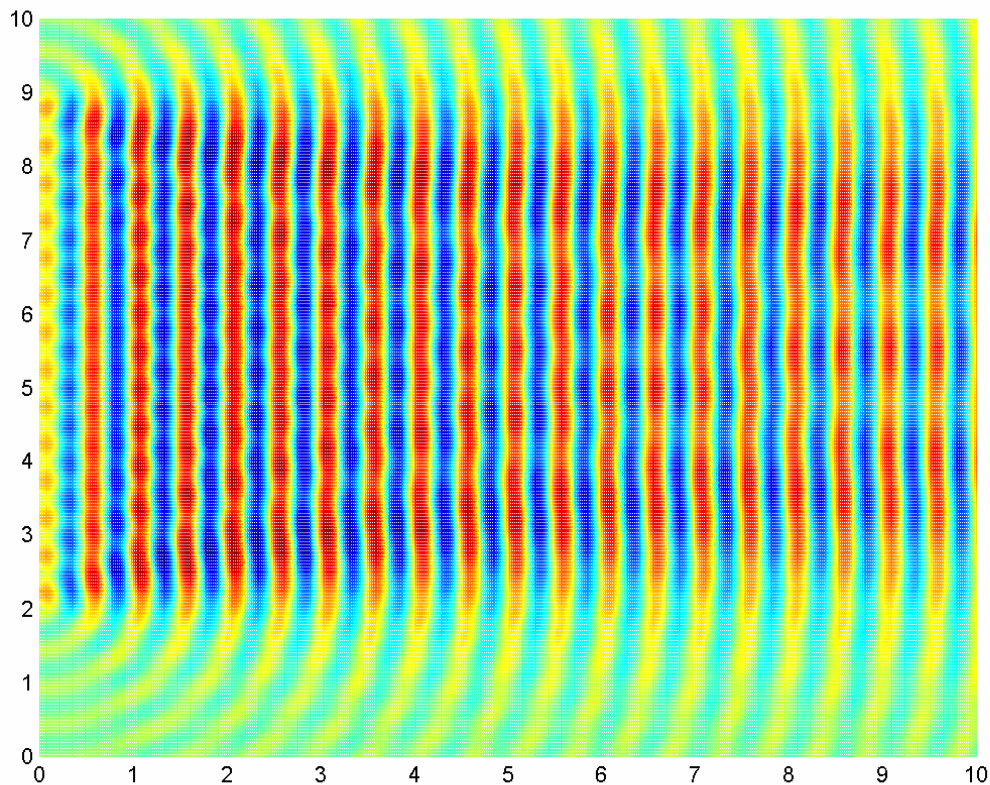


Bild 7(c): Positionen 2 -9 im Abstand 0.1.

## 5. Lichtstrahlenoptik und Fermat'sches Prinzip

Auch Licht ist eine Welle – eine elektromagnetische Welle. Ist die Wellenlänge vernachlässigbar klein, so breitet sich das Licht in Form von Lichtstrahlen aus. Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  hängt dabei von dem durchlaufenden Medium ab. Das Verhältnis der Vakuumlichtgeschwindigkeit zu  $c$  ist nichts anderes als der Brechungsindex

$$n = c_0 / c \quad (15)$$

Ein Pfad  $\Gamma$  von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$  ist gegeben als eine Abbildung des Intervalls  $s \in [0, 1]$  in den Raum:

$$\Gamma : \mathbf{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a}, \mathbf{x}(1) = \mathbf{b} \text{ mit stetigen Funktionen } x, y, z. \quad (16)$$

Die Laufzeit des Lichts von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$  ist dann gegeben durch

$$t = \frac{1}{c_0} \int_{s=0}^1 \frac{1}{n(\mathbf{x}(s))} \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| ds. \quad (17)$$

Dies schreibt man bequemer als ein „Wegintegral“ über  $\Gamma$ :

$$t = \frac{1}{c_0} \int_a^b \frac{1}{n(x)} dx, \quad (18)$$

mit dem Wegelement  $dx = \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| ds$ .

Das Fermat'sche Prinzip lautet nun:

*Unter allen denkbaren Pfaden zwischen zwei Punkten  $a$  und  $b$  ist der tatsächliche Lichtweg derjenige mit minimaler Laufzeit.*



Bild 8: Luftspiegelung: In der erhitzten Luft in Bodennähe ist die Lichtgeschwindigkeit erhöht, was zu dem gekrümmten Lichtweg vom Objekt  $a$  zum Beobachter  $b$  führt.

Ein Beispiel ist die Luftspiegelung in Bild 8: Die Luft in Bodennähe ist erhitzt und hat darum einen geringeren Brechungsindex (höhere Lichtgeschwindigkeit). Der Lichtweg krümmt sich, „um von der höheren Lichtgeschwindigkeit in Bodennähe zu profitieren“. Der Beobachter sieht am Boden einen Teil des Himmels.

In der Praxis ist ein Vergleich sämtlicher möglicher Pfade natürlich nicht möglich. Das Fermat'sche Prinzip kann jedoch für Berechnungen genutzt werden, wenn man die in Betracht kommenden Pfade durch Vorüberlegungen beschränken kann, wie in der folgenden Herleitung des Brechungsgesetzes.

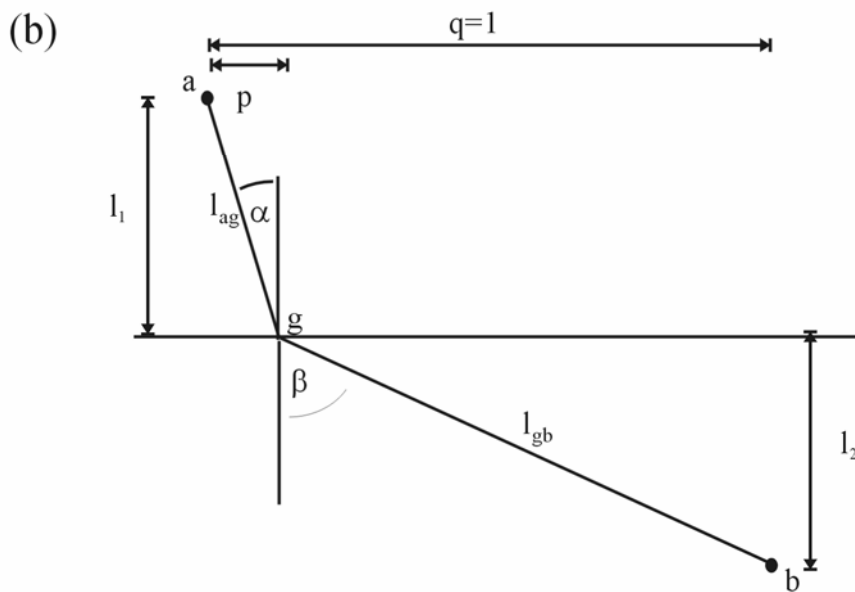
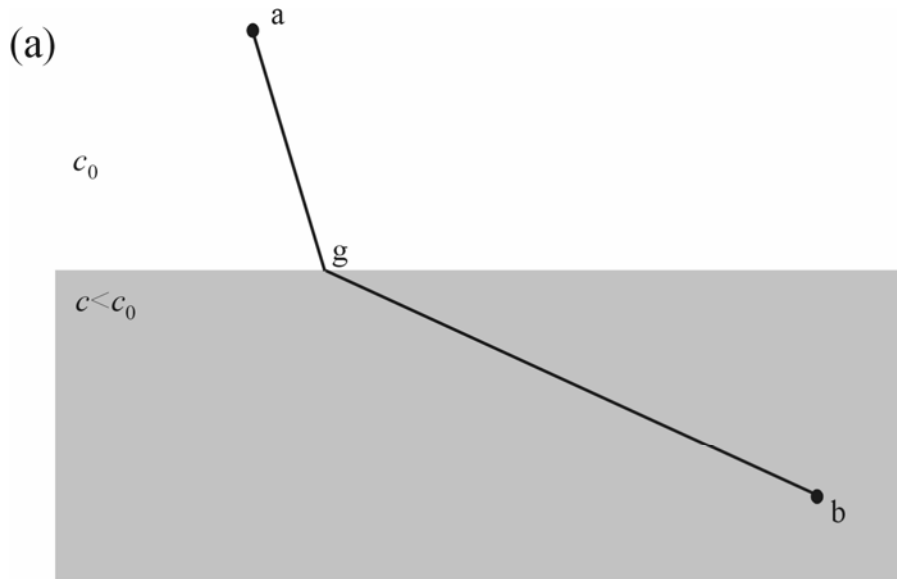


Bild 9: Brechung nach dem Fermat'schen Prinzip.

In einem homogenen Medium ist die Lichtgeschwindigkeit konstant, und der Lichtweg die Gerade durch **a** und **b**. In Bild 9 muss der gesuchte Lichtweg zwischen **a** und **b** aus zwei Strecken bestehen, und es bleibt lediglich die Lage des Punktes **g** zu bestimmen übrig.

In Bild 9(b) liest man für die Teillaufwege ab:

$$l_{ag} = p / \sin \alpha, \quad l_{gb} = (1 - p) / \sin \beta.$$

$$l_{ag} = \sqrt{l_1^2 + p^2}, \quad l_{gb} = \sqrt{l_2^2 + (1 - p)^2}.$$

Die Laufzeit ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
t &= \frac{l_{ag}}{c_0} + \frac{l_{gb}}{c} = \frac{1}{c_0} (l_{ag} + nl_{gb}) \\
&= \frac{1}{c_0} \left( \sqrt{l_1^2 + p^2} + n\sqrt{l_2^2 + (1-p)^2} \right), \quad p \in [0,1]
\end{aligned}
\tag{19}$$

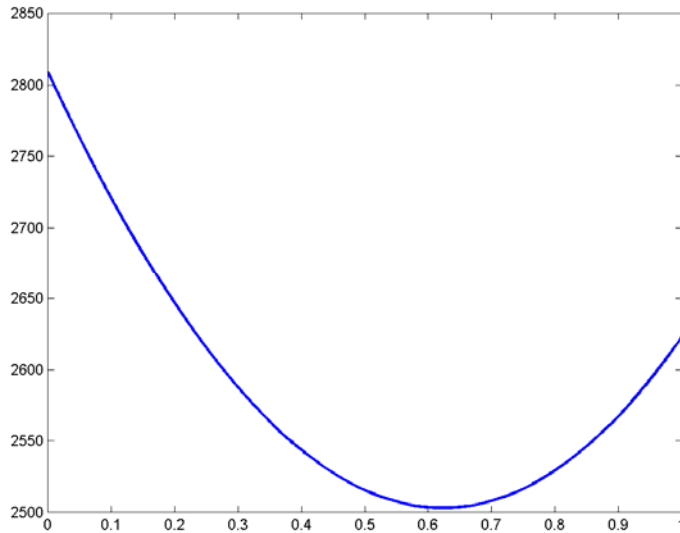


Bild 10: Laufzeit für die Pfade aus Bild 9 in Abhängigkeit von der Eintrittsdistanz  $p$  (siehe Bild 9) in das dichte Medium.

Die Funktion  $t(p)$  ist in Bild 10 dargestellt. Sie hat ein Minimum, das wir durch Ableiten ermitteln:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{c_0} \left( \frac{p}{\sqrt{l_1^2 + p^2}} - \frac{n(1-p)}{\sqrt{l_2^2 + (1-p)^2}} \right) = 0.
\tag{20}$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\sin \alpha - n \sin \beta = 0,
\tag{21}$$

also wenn das Snellius'sche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

erfüllt ist.

„Finale“ Prinzipien, wie das Fermat'sche Prinzip, wurden im 17. und 18. Jahrhundert in vielen Bereichen der Physik entdeckt. Sie laden zu allerlei erbaulicher Metaphysik ein: Verfolgt die Natur Ziele? Woher kennt das Licht, wenn es sich noch in  $\mathbf{a}$  befindet, den schnellsten Weg, den es nach  $\mathbf{b}$  zu nehmen hat? Muss ein gütiger Gott existieren, der dem Licht den Weg weist?

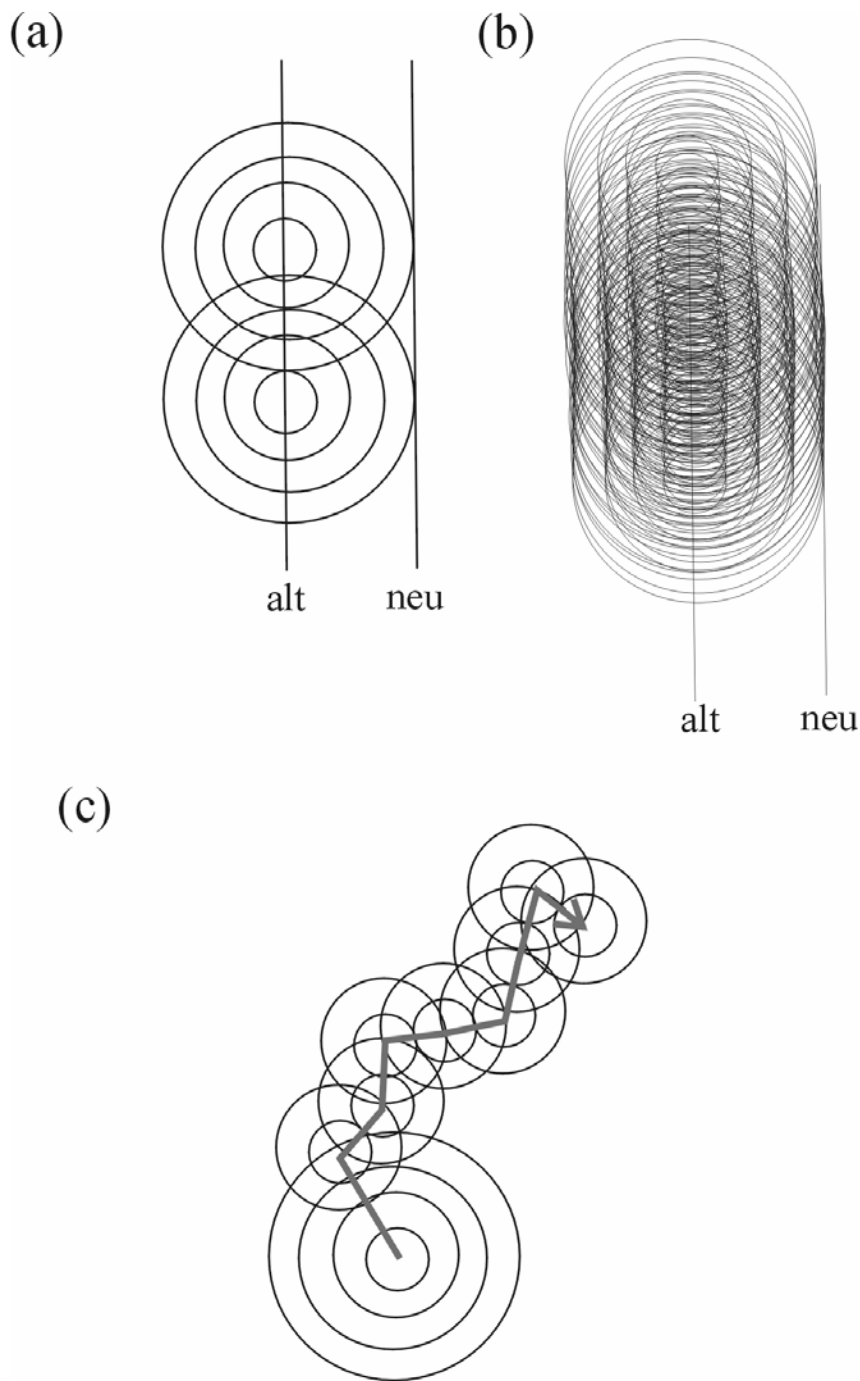


Bild 11: Zum Huygens'schen Prinzip.

Das Huygens'sche Prinzip besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront Ausgangspunkt einer Kugelwelle ist, die sich in alle Richtungen ausbreitet. Alle Elementarwellen sind nach Amplitude und Phase zu addieren. An den allermeisten Orten werden Elementarwellen sämtlicher Phasen beitragen und sich in der Summe vollständig auslöschen. Orte, an denen dieses nicht der Fall ist, bilden die neue Wellenfront (siehe Bilder 11(a) und (b)). Die Welle kann man als Überlagerung (nach Amplitude und Phase) sämtlicher denkbaren Pfade auffassen. In Bild 11(c) ist ein solcher Pfad dargestellt.

Die Phase entlang eines Pfades ist gegeben durch

$$\varphi_{\Gamma} = \int_{\Gamma}^b k(x) ds = \int_{\Gamma}^b \frac{\omega}{c(x)} ds = \omega \int_{\Gamma}^b \frac{1}{c(x)} dx = \omega t, \quad (22)$$

sie ist also bis auf eine Konstante gleich der Laufzeit.

Wir betrachten wieder die Situation in Bild 9, in welcher nur noch zwischen den Pfaden  $\Gamma_p$  mit  $p \in [0,1]$  zu wählen ist. Wir nehmen nun jedoch an, dass sämtliche Pfade durchlaufen werden. Die Amplitude am Ort **b** berechnet sich also zu

$$\int_{k=0}^1 \sin \varphi(p) dp, \quad \varphi(p) = \varphi_{\Gamma_p} \quad (23)$$

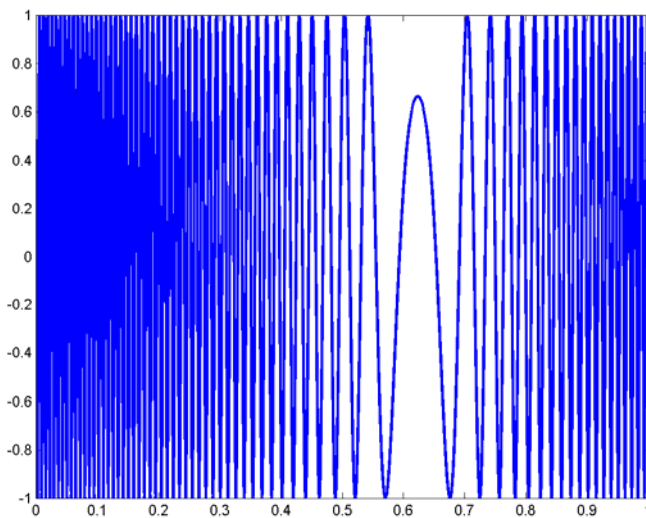


Bild 12:  $\sin \varphi(p) = \sin(\omega t(p))$ , mit der Laufzeit  $t(p)$  aus Bild 10, und einem großen Wert für die Frequenz  $\omega$ .

In Bild 12 ist die zu integrierende Funktion  $\sin \varphi(p)$  dargestellt. Für den Wert des Integrals sind nur die langsam veränderlichen Beiträge um das Minimum der Phase  $\varphi(p)$  aus Bild 10 von Bedeutung. Das berechtigt uns, zu sagen: Das Licht nimmt den durch Fermat und Snellius angegebenen Weg.

Für Werte  $p$ , für die  $\varphi(p)$  nicht minimal ist, wird es einen anderen Wert  $p+dp$  geben, für welchen  $\varphi(p+dp) = \varphi(p) + \pi$  ist, sodass sich die Beiträge gerade aufheben.

Für Werte  $p$ , für die die Phase  $\varphi(p)$  minimal ist, gibt es keinen anderen Pfad, der ihn auslöscht.

Damit ist die interessante Fähigkeit des Lichtstrahls, immer den schnellsten Pfad zu finden, auf die Ausbreitung eines Wellenfeldes zurückgeführt. „Finale“ Prinzipien lassen sich in der Physik ganz allgemein auf kausale Beziehungen zurückführen. Eine „Vorsehung“ ist für das Funktionieren der Physik nicht nötig.

## 6. Schwebungen

Weitere wichtige Wellenformen entstehen durch die Überlagerung (d.h. Addition der Amplituden) von Wellen verschiedener Frequenzen.

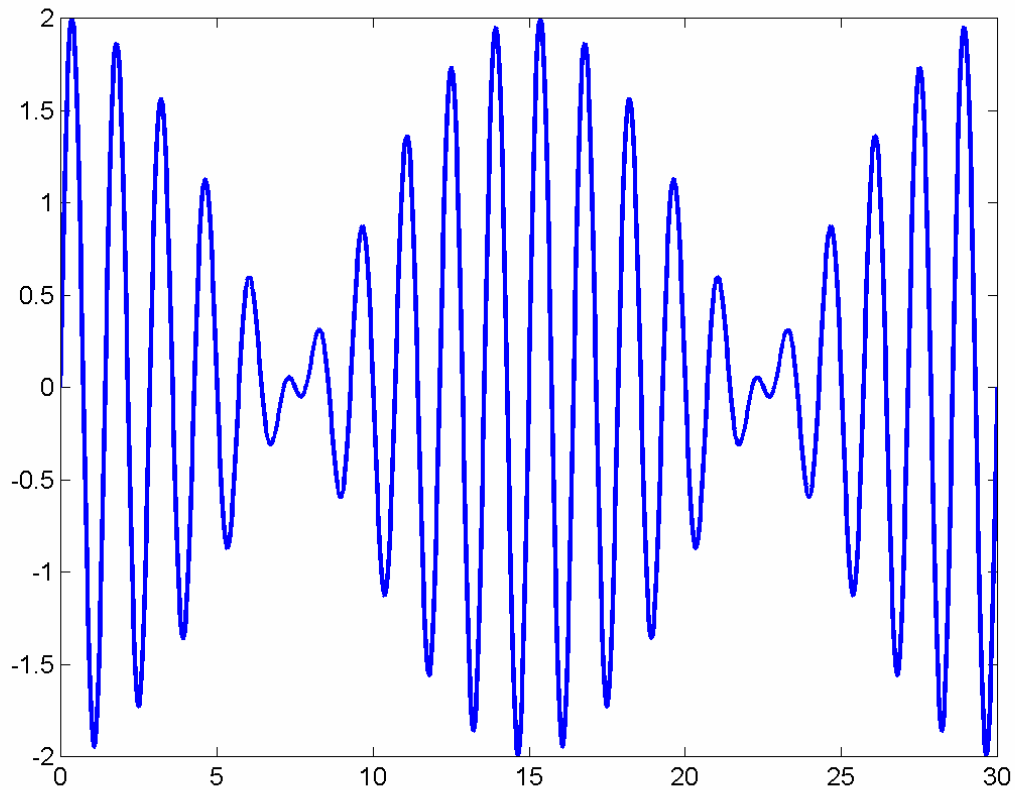


Bild 13: Die Welle aus Bild 1 mit der Frequenz 200Hz, überlagert mit einer zweiten Welle der Frequenz 220 Hz.

Überlagert man zwei Wellen leicht verschiedener Frequenz,

$$A(x, t) = \sin((k - dk)(x - ct)) + \sin((k + dk)(x - ct)), \quad dk/k \ll 1, \quad (24)$$

so erhält man eine Schwebung. Es entsteht eine niederfrequente Modulation der Amplitude. Die gesamte Schwebung bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit durch den Raum.

Versuch: [Zwei Stimmgabeln mit Frequenzunterschied](#)

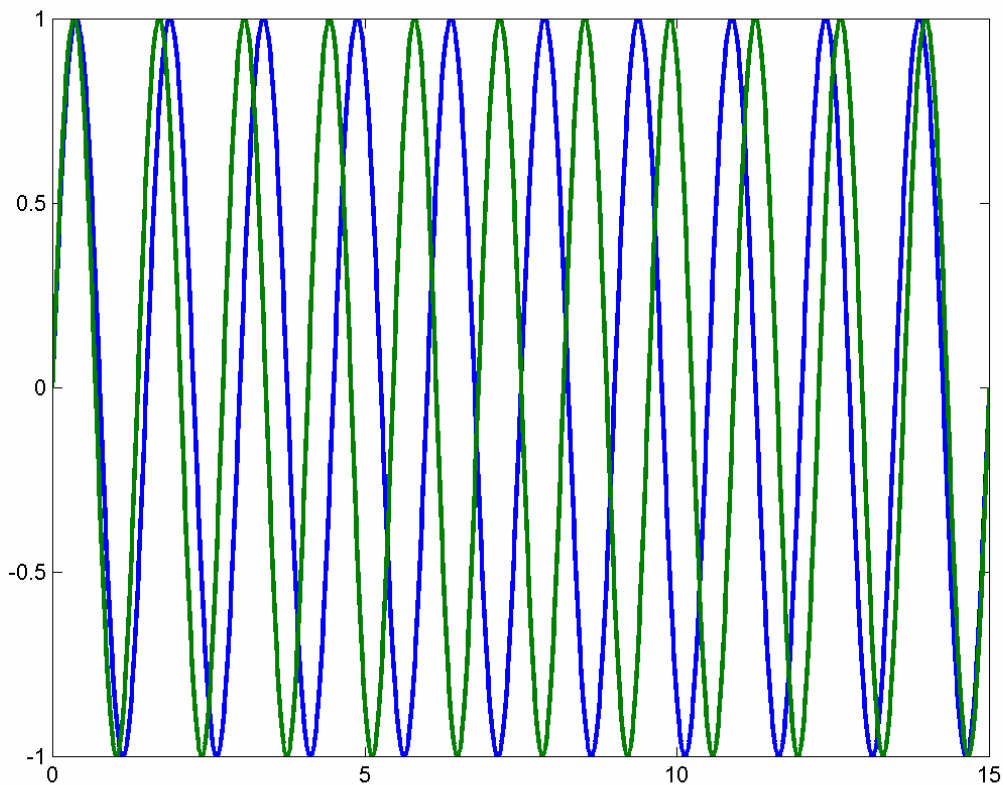


Bild 14: Schnappschuss für  $t=0$ ; Welle aus Bild 1, 200Hz (blau), und die frequenzverschobene Welle von 220Hz (grün).

Wie Bild 14 zeigt, überlagern sich die Wellen periodisch konstruktiv, dann wieder destruktiv, was das Phänomen aus Bild 13 erklärt.

Aus (24) lässt sich das wie folgt nachvollziehen. Zur Vereinfachung schreiben wir  $x' = x - ct$ :

Für den Fall  $dk \ll k$  erhalten wir eine Schwingung mit einer langsam veränderlichen Amplitudenfunktion  $A(t)$ :

$$A = \sin(kx' - dkx') + \sin(kx' + dkx'), \quad (25a)$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b, \quad \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b, \quad (25b)$$

$$A(x, t) = \sin(kx') \cos(dkx') - \cos(kx') \sin(dkx') + \sin(kx') \cos(dkx') + \cos(kx') \sin(dkx'), \quad (25c)$$

$$A(x, t) = 2 \sin(kx') \cos(dkx'). \quad (25d)$$

Für den Fall  $dk \ll k$  erhalten wir eine Schwingung mit einer langsam veränderlichen Amplitudenfunktion  $A(t)$ :

$$A(x, t) = \underbrace{2 \cos(dk(x - ct))}_{A(t)} \sin(k(x - ct)). \quad (26)$$

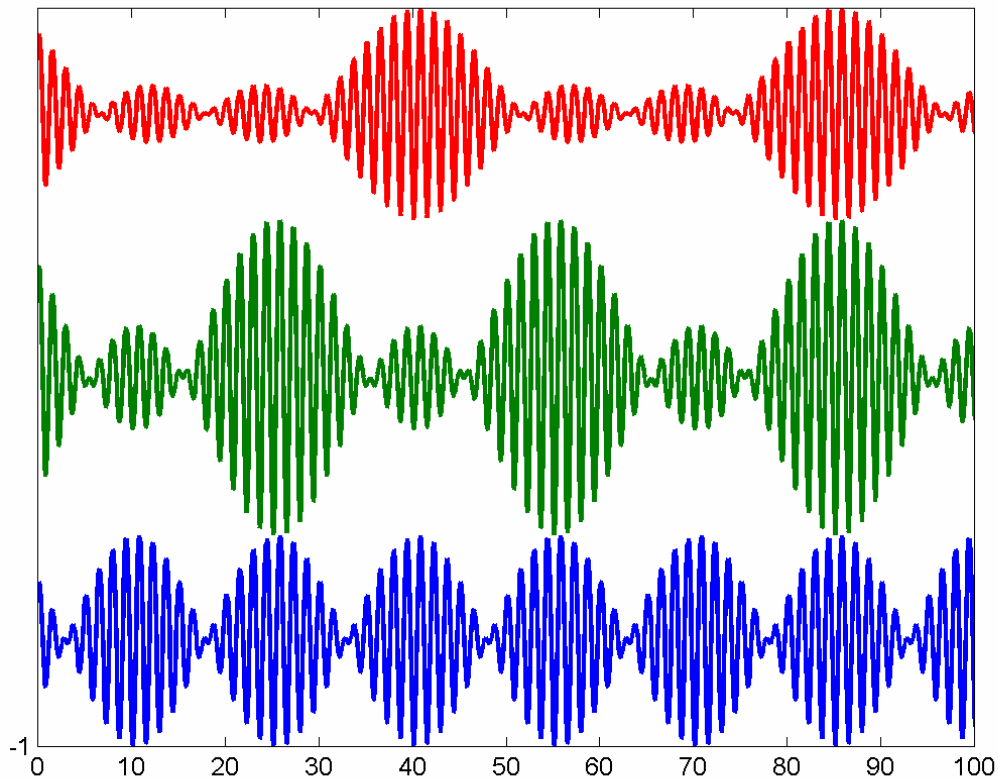


Bild 15: Das Frequenzintervall  $[k, k+dk]$  wurde mit 2 (blau), 3 (grün), und 4 (rot) Teilwellen besetzt.

Wir füllen das Frequenzintervall  $[k, k+dk]$  mit weiteren Wellen auf :

$$A = \sin(kx) + \sin((k + dk)x), \quad (27a)$$

$$A = \sin(kx) + \sin\left(\left(k + \frac{dk}{2}\right)x\right) + \sin((k + dk)x), \quad (27b)$$

$$A = \sin(kx) + \sin\left(\left(k + \frac{1}{3}dk\right)x\right) + \sin\left(\left(k + \frac{2}{3}dk\right)x\right) + \sin((k + dk)x). \quad (27c)$$

Das Ergebnis für zwei, drei und vier Teilwellen ist in Bild 15 dargestellt: Eine Folge von Wellenpaketen entsteht.

Bild 16 zeigt die Amplitudenfunktion

$$A(x, t; N) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N \sin\left(k + \frac{i}{N} dk\right) ((x - x_0) - ct) \quad (28)$$

für  $N=30$ , d. h. dreißig Teilwellen im Intervall  $[k, k+dk]$ . Durch das Auffüllen des Frequenzintervalls ist aus der Schwebung eine Pulsfolge geworden. Im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  wächst die Periode über alle Grenzen und es bleibt nur ein einziger Puls übrig. Die Pulsdauer ist umgekehrt proportional zur Bandbreite  $1/dk$ . Kurze Pulse benötigen eine große Bandbreite. Mit Pulsen der Dauer  $T_P$  kann man  $1/T_P$  digitale Bits pro Sekunde übertragen. Die prinzipiell mögliche Datenrate ist damit proportional zur Bandbreite.

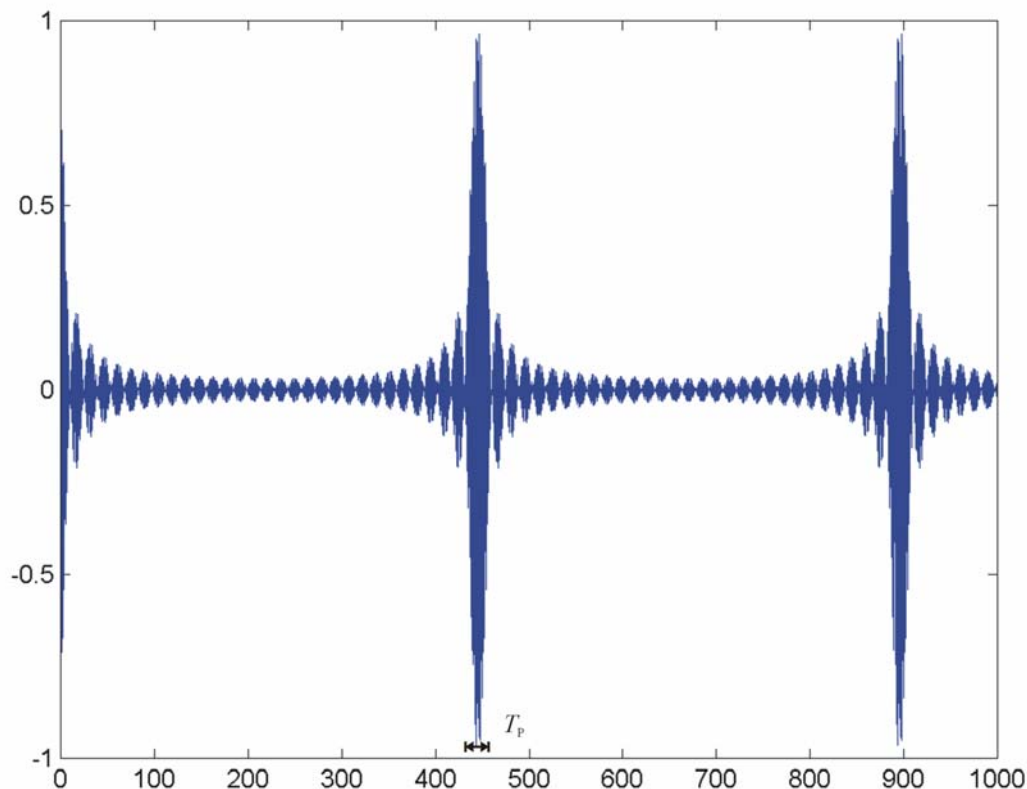


Bild 16: Das Frequenzintervall  $[k, k+dk]$  wurde mit 30 Teilwellen aufgefüllt. Man erhält einen Schallpuls alle 0.45 Sekunden. Die Pulsdauer ist  $T_P$ .

#### Versuch: Wellenmaschine

Ein Spektrum ist eine Funktion, die für jeden Wellenvektor  $\mathbf{k}$  eine Amplitude und eine Phase angibt:

$$a(\mathbf{k}), \varphi(\mathbf{k}).$$

Die zu dem Spektrum gehörige Amplitudenfunktion erhält man durch Integration über  $k$ :

$$A(x, t) = \int_{k=0}^{\infty} a(k) \sin(k(x - ct) + \varphi(k)) dk \quad (29)$$

Für unsere Wellenpakete  $A(x, t, N)$  aus Bild 15 und 16 wird das Spektrum im Grenzfall  $N_n \rightarrow \infty$  eine Rechteckfunktion. Das zugehörige Wellenpaket im Ortsraum wird „Haar-Wavelet“ genannt.

Ist das Spektrum eine Gaussfunktion (Gauss'sche Glockenkurve),

$$a(k') \propto e^{-\frac{(k-k')^2}{dk^2}}, \quad (30)$$

so ist die Einhüllende des Wellenpaketes ebenfalls eine Gaussfunktion:

$$A(k') \propto e^{-\frac{(x-x_0)^2}{dx^2}} \sin(kx - \omega t). \quad (31)$$

Das Gauss'sche Wellenpaket hat sehr vorteilhafte Eigenschaften. So ist es durch den exponentiellen Abfall in (31) sehr gut im Raum lokalisiert.

## 7. Wellen in Vektorfeldern

Bisher haben wir nur Skalarwellen betrachtet. Viele Felder in der Physik sind jedoch Vektorfelder. Beispiele sind das elektrische und magnetische Feld, sowie Geschwindigkeitsfelder (etwa die Windrichtungs-Pfeile auf der Wetterkarte). Ist die Auslenkung  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$  ein Vektor, so sind neue Wellenformen möglich.

Das Geschwindigkeitsfeld einer Schallwelle ist eine Longitudinalwelle, d. h. der Geschwindigkeitsvektor zeigt in Ausbreitungsrichtung:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} V \sin(kx - \omega t + \varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

### Versuch: Spiralwelle

Das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle im Vakuum ist eine Transversalwelle. Breitet sie sich in x-Richtung aus, so sind zwei Lösungen möglich, bei denen der elektrische Vektor senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht:

$$\mathbf{E}^0(\mathbf{x}, t, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ E \sin(kx - \omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^{\pi/2}(\mathbf{x}, t, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \sin(kx - \omega t + \varphi) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Die erste Lösung schwingt in der y-Richtung, die zweite in der z-Richtung.  
 Jede andere Schwingungsrichtung in der yz-Ebene erhalten wir durch Überlagerung:

$$\mathbf{E}^\phi(\mathbf{x}, t) = \sin \phi \mathbf{E}^0(\mathbf{x}, t, \phi) + \cos \phi \mathbf{E}^{\pi/2}(\mathbf{x}, t, \phi). \quad (34)$$

Allerdings dürfen wir auch die Phase beider Teilwellen verschieden wählen:

$$\mathbf{E}^\phi(\mathbf{x}, t) = \sin \phi \mathbf{E}^0(\mathbf{x}, t, \phi = 0) + \cos \phi \mathbf{E}^{\pi/2}(\mathbf{x}, t, \phi = \pi/2). \quad (35)$$

$$\mathbf{E}^r(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \cos(kx - \omega t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^l(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E \cos(kx - \omega t) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Dies ist rechts- bzw. links- zirkular polarisiertes Licht. Der elektrische Vektor läuft in der yz-Ebene um.

## 8. Wellengleichung

In diesem Abschnitt wird erklärt, welche physikalischen Systeme Wellen hervorbringen. Dies ist dann der Fall, wenn für die Zeitentwicklung eine physikalischen Größe  $s(x, t)$  eine Differentialgleichung bestimmter Form gilt, die Wellengleichung nämlich. Ein Beispiel für ein solches System ist eine Saite. Genauer gesagt, wird die transversale Auslenkung der Saite durch die Wellengleichung beschrieben. Zur Einführung betrachten wir zunächst jedoch das Federpendel – eine bewegliche Masse mit linearer Rückstellkraft:

Die Bewegung eines Massenpunkts bei gegebener Kraft  $F(t)$  erhält man aus der Grundgleichung der Mechanik

$$F = ma = m \frac{\partial v}{\partial t} = m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (37)$$

Hier sind  $s(t)$  die gesuchte Bahnkurve,  $v(t)$  die momentane Geschwindigkeit, und  $a(t)$  die Beschleunigung.

Für den Fall einer linearen Rückstellkraft

$$F = -ks \quad (38)$$

gilt also

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{k}{m} s. \quad (39)$$

Weil der Quotient  $\frac{k}{m}$  positiv ist, darf man auch schreiben  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  und somit

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s. \quad (40)$$

Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus haben gerade diese Eigenschaft, gleich dem Negativen ihrer eigenen zweiten Ableitungen zu sein:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sin(\omega t) = -\omega^2 \sin(\omega t), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cos(\omega t) = -\omega^2 \cos(\omega t). \quad (41)$$

Die allgemeine Lösung für  $s$  ist

$$s(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t), \quad (42)$$

mit beliebigen Konstanten  $C$  und  $D$ .

Dies kann man auch schreiben als

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (43)$$

mit der Amplitude  $A$  und der Phase  $\varphi$ , denn mit dem Additionstheorem

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (44)$$

kann man (43) in (42) umformen:

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi = \underbrace{A \cos \varphi}_{C} \sin \omega t + \underbrace{A \sin \varphi}_{D} \cos \omega t. \quad (45)$$

Für eine Welle ist die Auslenkung  $s(x,t)$  eine Funktion von Ort und Zeit.

Statt eines Massenpunktes der Masse  $m$  betrachten wir ein Volumenelement  $dV$ , das sich am Ort  $\mathbf{x}$  befindet und die Masse  $dm = \rho dV$  hat.

Die Grundgleichung der Mechanik wird in diesem Fall

$$dF = dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (46)$$

Die Kraft  $dF$  auf das Volumenelement hängt von der Auslenkung  $s$  ab, aber auch von der Auslenkung seiner Nachbarn. Für eine eindimensionale Welle sind diese Nachbarn die Volumenelemente an den Orten  $x-dx$ , und  $x+dx$ .

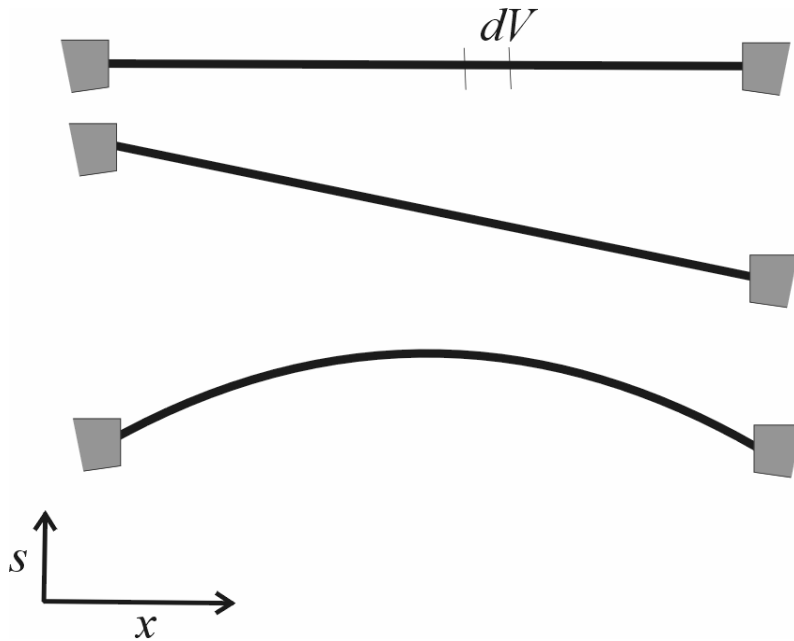


Bild 17: Saite mit Volumenelement  $dV$ ; einfache Auslenkungen einer Saite.

In Bild 17 sind einige einfache Situationen dargestellt: Haben alle Volumenelemente die gleiche Auslenkung, gilt also  $s = \text{const}$ , es wirkt keine Kraft. Hängt die Auslenkung linear vom Ort ab,  $s = C x$ , so ergibt sich ebenfalls keine Kraft, da sich die Teilkräfte von beiden Nachbarn aufheben. Erst eine Krümmung in der Auslenkung  $s(x)$ , d. h.  $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \neq 0$ , bewirkt eine Kraft auf das Volumenelement. In der Wellengleichung ist also die Kraft proportional zur Krümmung, der zweiten Ableitung in  $s$ :

$$dF = K \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx. \quad (47)$$

Die Wellengleichung als Ganzes lautet also

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (48)$$

Die Wellenfunktion

$$s = \sin(k(x - ct))$$

erfüllt in der Tat die Wellengleichung, wenn die Phasengeschwindigkeit  $c$  richtig gewählt wird.

Es gilt

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -k^2 c^2 s, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2 s. \quad (49)$$

Dies in (48) eingesetzt liefert eine Bedingung für die Phasengeschwindigkeit  $c$ :

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (50)$$

## 9. Resonanzanregung und Dispersion

Trifft eine Welle am Ort  $\mathbf{x}_0$  auf ein schwingungsfähiges System, so gerät dieses in Schwingung, bei passender Frequenz in Resonanz.

Versuch: Schallwelle regt Stimmgabel an, die verstimmte Stimmgabel jedoch nicht

Die Amplitude des Systems  $s$  ist gegeben durch die Schwingungsgleichung für die erzwungene Schwingung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{k}{m} s = f \sin(\omega t), \quad (51a)$$

$$s(t) = A \sin(\omega t), \quad (51b)$$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t) + \omega_0^2 A \sin(\omega t) = f \sin(\omega t), \quad (51c)$$

$$(A(\omega_0^2 - \omega^2) - f) \sin(\omega t) = 0, \quad (51d)$$

$$A = \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (51e)$$

Die Singularität der Amplitude an der Eigenfrequenz des Schwingers zeigt an, dass mit der Physik etwas nicht stimmt. Wir führen eine Dämpfung ein, die die Amplitude proportional zur Geschwindigkeit reduziert:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{k}{m} s = f \sin \omega t, \quad (52a)$$

$$s = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (52b)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \varphi) + \gamma \omega \cos(\omega t + \varphi) = \frac{f}{A} \sin(\omega t). \quad (52c)$$

Mit den Additionstheoremen

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b, \quad (53a)$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b, \quad (53b)$$

erhält man nach einer nicht ganz einfachen Rechnung

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (54)$$

In Bild 18 sind die Amplitude und die Phase an der Resonanz zu sehen. An der Resonanzfrequenz  $\omega = \omega_0$  ist die Phase  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , und die Amplitude wird maximal:

$$A = -\frac{f}{\gamma\omega}. \quad (55)$$

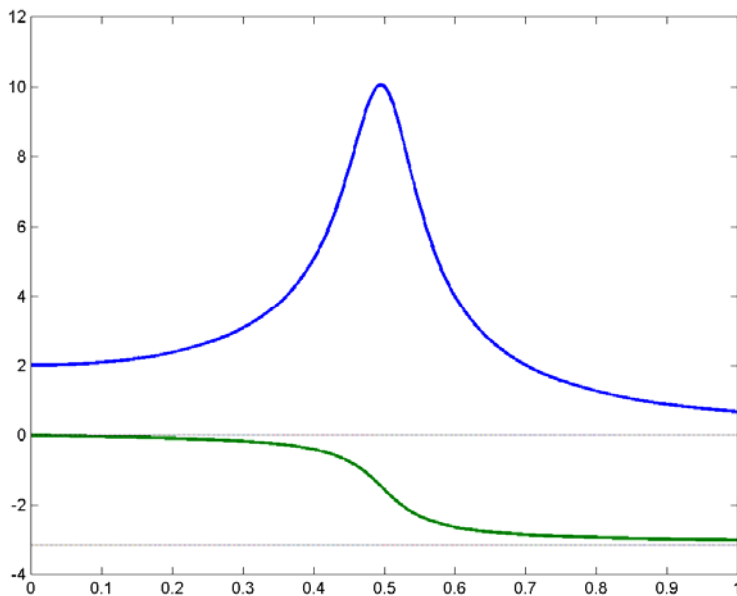


Bild 18: Amplitude (blau) und Phase (grün) der erzwungenen Schwingung eines linearen Oszillators.

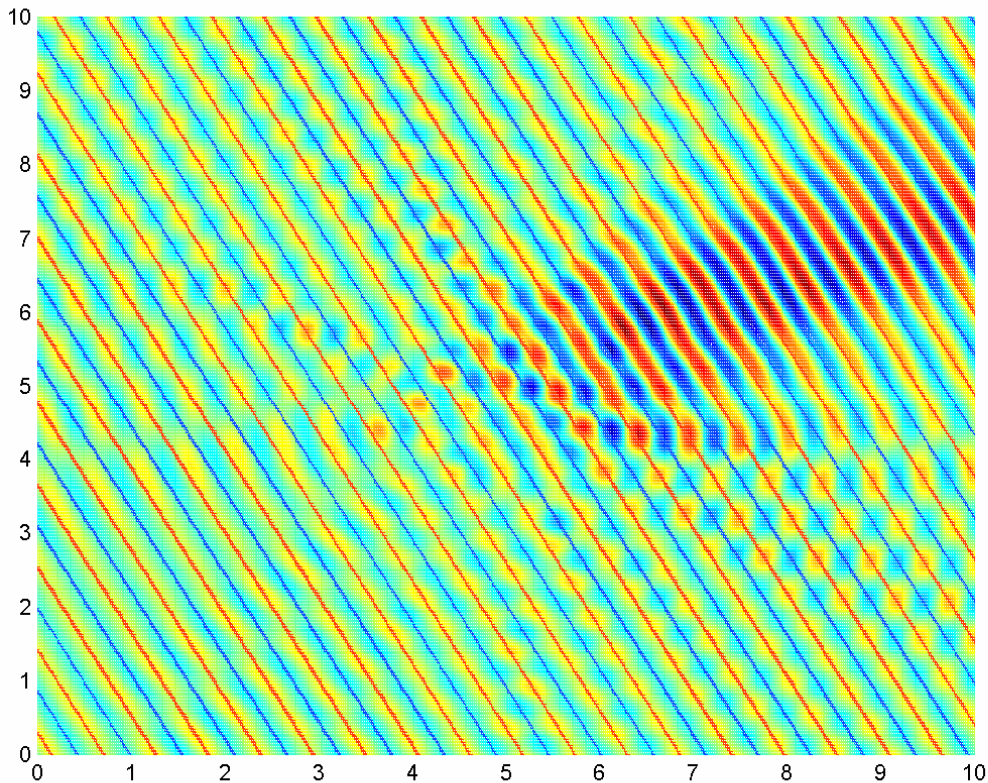


Bild 19: Streufeld von 60 Resonanzstreuern, die in einem Quadrat der Kantenlänge 2.5 im Bildzentrum zufällig verteilt sind. Die einlaufende ebene Welle ist durch rote (Maxima) und blaue (Minima) Linien angedeutet.

Betrachten wir nun ein Medium, in dem viele kleine resonante Streuer dieser Art vorhanden sind. Eine ebene Welle regt jeden der Streuer an. Das resultierende Wellenfeld der Streuer ist in Bild 19 für 60 Streuer dargestellt. Jeder Streuer trägt eine Kugelwelle bei, die relativ zur einlaufenden ebenen Welle um  $\pi/2$  phasenverschoben ist. Sind innerhalb einer Wellenlänge viele Streuer vorhanden, so ist das Streufeld in der Summe eine phasenverschobene ebene Welle in Vorwärtsrichtung.

Damit ist das Problem jedoch noch nicht vollständig gelöst, denn die Resonanzstreuer werden durch das Streufeld ein weiteres Mal angeregt, was zur Entstehung eines Streufeldes des Streufeldes führt. Das Streufeld zweiter Ordnung führt analog zu einem Streufeld dritter Ordnung usw. Nach Berücksichtigung sämtlicher Ordnungen lässt sich der Effekt als eine Änderung des Brechungsindex beschreiben. Resonanzstreuung an kleinen Teilchen führt also zu einer Änderung des Brechungsindex. Da die Resonanzstreuung frequenzabhängig ist, wird auch der Brechungsindex frequenzabhängig. Resonanzstreuung führt zu Dispersion.

## 10. Stehende Wellen

Überlagert man eine vorwärts- und eine rückwärts laufende Welle

$$A(x, t) = \sin(kx - \omega t) + \sin(-kx - \omega t), \quad (56)$$

so erhält man eine stehende Welle, deren Auslenkung an bestimmten Orten, nämlich  $x=n\pi/2$  permanent verschwindet:

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \sin(kx - \omega t) + \sin(-kx - \omega t) \\ &= \sin(kx) \cos(\omega t) - \cos(kx) \sin(\omega t) - \sin(kx) \cos(\omega t) - \cos(kx) \sin(\omega t) \\ &= -2 \cos(kx) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (57)$$

### Versuch: Rubens'sches Flammrohr

Wird an zwei Punkten im Abstand L die Auslenkung unterdrückt, setzen wir also

$$A(x = 0, t) = 0, \quad A(x = L, t) = 0, \quad (58)$$

dann sind in dem Zwischenraum nur die stehenden Wellen mit den Wellenzahlen

$$\pm k_n, \quad k_n = n \frac{\pi}{2L}, \quad n = 0... \quad (59)$$

möglich.

Im Falle einer Schallwelle in einem Rohr (z.B. einer Flöte oder einer Orgelpfeife) ist die Auslenkung der Druck. Ein offenes Ende des Rohrs bildet annähernd einen Druckknoten – es kann sich außerhalb des Rohres kein Druck aufbauen, da die Luft in alle Richtungen ausweichen kann. Ein verschlossenes Rohrende wirkt als Knoten des Geschwindigkeitsfeldes.

Analog kann man die Schwingungsformen einer rechteckigen Membran verstehen. Am Rand des Rechtecks soll die Amplitude verschwinden:

$$\begin{aligned} A(x = 0, y, t) = 0, \quad A(x = L_x, y, t) = 0, \\ A(x, y = 0, t) = 0, \quad A(x, y = L_y, t) = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

Innerhalb der Membran soll die zweidimensionale Wellengleichung erfüllt sein:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right). \quad (61)$$

Das liefert das Produkt einer stehenden Welle in x-Richtung mit einer stehenden Welle in y-Richtung:

$$s(x, y, t) = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t). \quad (62)$$

Die Wellenzahlen  $k_x$  und  $k_y$  müssen so gewählt werden, dass die Welle in den Kasten passt:

$$k_{x_n} = n \frac{\pi}{L_x}, \quad n = 0... \quad (63a)$$

$$k_{ym} = m \frac{\pi}{L_y}, \quad m = 0 \dots \quad (63b)$$

Dies in die Wellengleichung eingesetzt,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k_{xn}^2 s, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -k_{ym}^2 s, \quad (64)$$

liefert die Bedingung

$$k_{nm}^2 = (k_{xn}^2 + k_{ym}^2), \quad k_{nm} = \frac{\omega_{nm}}{c}. \quad (65)$$

Es sind also nur ganz bestimmte Frequenzen möglich. In Bild 20 ist eine Eigenschwingung der rechteckigen Membran zu sehen.

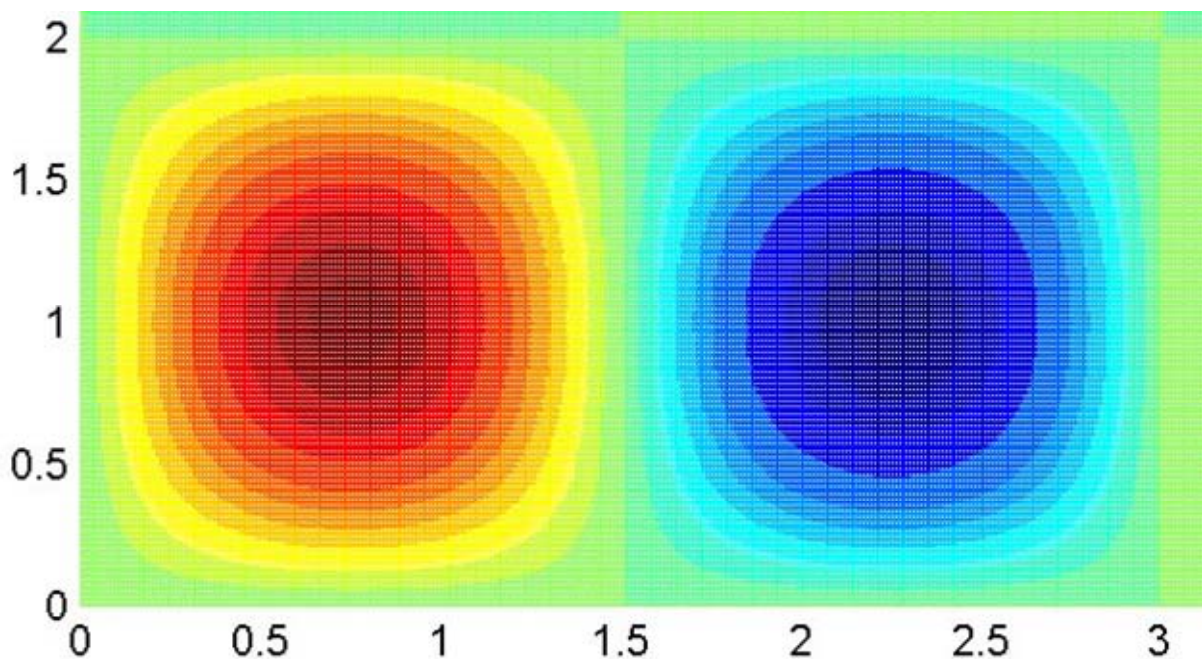


Bild 20: Schwingung einer Membran der Länge  $x=3$  und der Höhe  $y=2$  mit  $n=2$  und  $m=1$ .

#### Anmerkung

Sämtliche Bilder wurden durch kleine MATLAB-Programme erstellt, die auf Anfrage zugeschickt werden (Kontakt: Dr. Ivo Knittel [i.knittel@mx.uni-saarland.de](mailto:i.knittel@mx.uni-saarland.de)) Das kommerzielle Programmpaket MATLAB ist für numerische wissenschaftliche Rechnungen und Steuerungsaufgaben aller Art gut geeignet. Ein Freeware-„Klon“ mit fast identischer Syntax nennt sich SCILAB und ist im Internet erhältlich. Daneben existiert auch eine billige Light-Version von MATLAB namens StudentMATLAB.

