

Aufbau und Eigenschaften einer Gravitationskatastrophenmaschine und ausgewählte Demonstrationsexperimente in Potentialen vierter Ordnung

H.-J. Patt, Fachrichtung 7.2: Experimentalphysik und Didaktik der Physik,
Universität des Saarlandes, Geb. 38, 66041 Saarbrücken, 2006, hj.patt@mx.uni-saarland.de

Gliederung

1. Prinzipieller Aufbau und grundlegende Eigenschaften einer Gravitationskatastrophenmaschine S. 3
 - 1.1. Anzahl und Arten des Gleichgewichts in Potentialen bis zur vierten Ordnung und ihre wesentlichen Parameter S. 3
 - 1.2. Theoretische Beschreibung der Gravitationskatastrophenmaschine und der Grundlagen für ihre Realisierung S. 7
2. Aufbau und Optimierung der Eigenschaften der realisierten Gravitationskatastrophenmaschine S. 9
3. Ausgewählte Demonstrationsexperimente mit der entwickelten Gravitationskatastrophenmaschine ohne und mit äußerer Anregung S. 12
4. Medien und Verweise auf die Anlagen zu dieser Arbeit S. 15
 - 4.1. Literatur und Computerprogramme S. 15
 - 4.2. Anlage „Cosimex-Parameter- und -Bilddateien“ S. 16
 - 4.3. Anlage „Videoclips Gravitationskatastrophenmaschine“ S. 17

Aufbau und Eigenschaften einer Gravitationskatastrophenmaschine und ausgewählte Demonstrationsexperimente in Potentialen vierter Ordnung

H.-J. Patt, Fachrichtung 7.2: Experimentalphysik und Didaktik der Physik,
 Universität des Saarlandes, Geb. 38, 66041 Saarbrücken, 2006, hj.patt@mx.uni-saarland.de

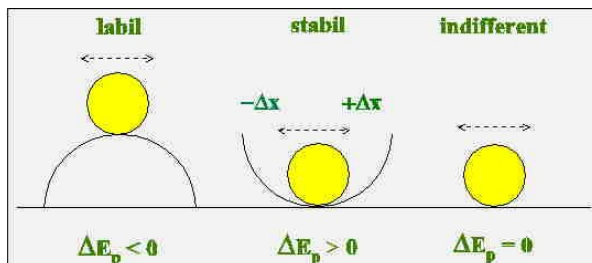


Abb. 1: Einfaches Experiment zur Demonstration des labilen, stabilen und indifferenten Gleichgewichts.

In vielen Schulbüchern zum Physikunterricht und einigen einführenden Lehrbücher der Physik wird der Begriff des Gleichgewichts und seine Grundeigenschaften oft durch einen Gedankenversuch oder auch ein Realexperiment differenziert, das in Abb. 1 im Prinzip dargestellt ist. Dabei wird das Verhalten einer Kugel betrachtet, die einmal oben auf einer Halbkugelschale mit größerem Radius als die Kugel, zum anderen unten in der entsprechenden Kugelschale oder auf einer horizontalen Ebene liegt (z. B. Stahlkugel mit Uhrglas). Wenn die Kugel jetzt virtuell oder tatsächlich auf einen beliebig nahe liegenden Nachbarpunkt verschoben wird und dort zuerst als ruhend angesehen wird, unterscheidet sich das folgende Verhalten der Kugel in den drei Fällen wesentlich. Während sich die Kugel im ersten Falle von ihrem ursprünglichen Ruhepunkt um eine größere Strecke entfernt, kehrt die zweite zu ihrem Ausgangspunkt zurück, für die dritte besitzt dagegen jeder Nachbarpunkt die gleichen Eigenschaften wie der Ausgangspunkt. Wegen dieses prinzipiell unterschiedlichen Verhaltens werden die betrachteten Gleichgewichtsformen als labiles (lat.: schwankend, veränderlich, unsicher), stabiles (lat.: beständig, fest, kräftig, widerstandsfähig) oder indifferentes (lat.: unbestimmt, gleichgültig, teilnahmslos, wirkungslos) Gleichgewicht bezeichnet. Natürlich kann das Verhalten der Kugel physikalisch auch durch das Vorzeichen und den Wert der Änderung der potentiellen Energie ΔE_p charakterisiert werden, wie es in Abb. 1 angegeben ist, wenn diese sich auf eine entsprechende Ortsverschiebung $\pm \Delta x$ vom Gleichgewichtspunkt aus bezieht.

Bei systematischer Betrachtung der geschilderten Situation fehlt eigentlich in Abb. 1 der Fall, bei dem die Auflagefläche der Kugel auf der einen Seite ansteigt und auf der anderen Seite abfällt, die Kugel also gerade auf der Stelle mit waagerechter Wendetangente (Sattelpunkt) liegt. Obwohl in diesem Falle das Vorzeichen der Energieänderung positiv sein kann, muss diese Situation als labil bezeichnet werden, weil nicht jede Ortsänderung die Kugel zum ursprünglichen Ruheort und damit zum Gleichgewichtspunkt zurückführt. Zusätzlich wurde die Situation bewußt dadurch vereinfacht, dass wegen der Rotationssymmetrie der Kugelschale praktisch nur eindimensionale statt mehrdimensionaler Ortsveränderungen betrachtet und eine eventuelle Abhängigkeit der Oberfläche von modifizierbaren Parametern nicht untersucht wurde. Generell werden damit im Zusammenhang stehende Probleme in der Physik in der sogenannten Katastrophentheorie [1, 2, 3, 4] untersucht, wobei diese mathematisch auf der Diffe-

Bei systematischer Betrachtung der geschilderten Situation fehlt eigentlich in Abb. 1 der Fall, bei dem die Auflagefläche der Kugel auf der einen Seite ansteigt und auf der anderen Seite abfällt, die Kugel also gerade auf der Stelle mit waagerechter Wendetangente (Sattelpunkt) liegt. Obwohl in diesem Falle das Vorzeichen der Energieänderung positiv sein kann, muss diese Situation als labil bezeichnet werden, weil nicht jede Ortsänderung die Kugel zum ursprünglichen Ruheort und damit zum Gleichgewichtspunkt zurückführt. Zusätzlich wurde die Situation bewußt dadurch vereinfacht, dass wegen der Rotationssymmetrie der Kugelschale praktisch nur eindimensionale statt mehrdimensionaler Ortsveränderungen betrachtet und eine eventuelle Abhängigkeit der Oberfläche von modifizierbaren Parametern nicht untersucht wurde. Generell werden damit im Zusammenhang stehende Probleme in der Physik in der sogenannten Katastrophentheorie [1, 2, 3, 4] untersucht, wobei diese mathematisch auf der Diffe-

- 1 Arnold, V. I.: Catastrophe Theory. Springer, Berlin, 1986, 3. Aufl. 2004.
- 2 Saunders, H. G.: Katastrophentheorie – Eine Einführung für Naturwissenschaftler. Vieweg, Braunschweig, 1986.
- 3 Arnold, V. I.: Huygens and Barrow, Newton and Hooke – Pioneers in Mathematical Analysis and Catastrophe Theory. Birkhäuser, Basel, 1990.
- 4 Arnold, V. I. (Ed.): Dynamical Systems V – Bifurcation Theory and Catastrophe Theory. Springer, Berlin, 1994.

rentialgeometrie beruht und relativ anspruchsvoll ist. Daher gehört diese bisher nicht zum üblichen Inhalt des Physikunterrichts oder der Anfängervorlesungen. Andererseits tritt in vielen physikalischen Systemen ein für das genannte Gebiet charakteristisches Verhalten auf, das mit den Mitteln der Schulmathematik behandelt und experimentell mit unterschiedlichen fachdidaktischen Zielsetzungen in verschiedenen Versuchsanordnungen [5, 6] verifiziert werden kann. Im Folgenden soll eine dieser Möglichkeiten vorgestellt und eine einfache experimentelle Anordnung erarbeitet werden, mit der viele exemplarische Phänomene aus diesem Bereich der Katastrophentheorie anschaulich demonstriert werden können. Der Begriff „Katastrophe“ (griech.: Unglücksfall großen Ausmaßes, Zusammenbruch) wurde wohl deshalb zusammenfassend für dieses Gebiet gewählt, weil sich Katastrophen in der Natur oft bei dem Übergang eines stabilen in ein instabiles System entwickeln bzw. ausgelöst werden (z. B. Absturz beim Balancieren auf einem Hochseil im Zirkus, Herausschleudern eines Rennwagens aus der Kurve wegen eines Ölflecks auf der Straße, Einsturz einer Brücke durch von Windböen ausgelöste große Schwingungen, Abgang einer Schneelawine von einem Berghang beim Betreten durch Wanderer oder Skifahrer, plötzlicher Ausbruch eines Geysirs (s. Kap. 4.3.) oder eines Vulkans, Erzeugung von Erdbeben durch Lösung innerer Spannungen in der Erdkruste, Auslösung von Tsunamis und Seebeben durch plötzliches Absenken oder Aufsteigen von tektonischen Platten der Erde verursacht durch die Kontinentaldrift usw.).

1. Prinzipieller Aufbau und grundlegende Eigenschaften einer Gravitationskatastrophenmaschine

Wie im einleitenden Kapitel bereits angedeutet wurde, spielen die örtliche Abhängigkeit der potentiellen Energie eines Systems und eventuell vorhandene charakteristische Parameter eine wesentliche Rolle bei der Untersuchung seiner Gleichgewichtspunkte und der dort vorhandenen Gleichgewichtsformen. Um hier von möglichst einfachen Verhältnissen auszugehen, bietet es sich an, die potentielle Energie eines Massenpunktes mit der festen Masse m im Schwerfeld eines Planeten zu betrachten. Wenn sich dieser Massenpunkt in der Höhe h über einer horizontalen Bezugsebene zur Planetenoberfläche befindet und die Schwerebeschleunigung näherungsweise als konstante Größe g angesehen werden kann, ist die potentielle Energie durch den Ausdruck $E_p = m \cdot g \cdot h$ festgelegt. Dabei tritt als einzig veränderliche Größe nur die Höhe h auf. Im Wesentlichen bestimmt also die örtliche Abhängigkeit der Höhe des Massenpunktes die Lage und die Form der möglichen Gleichgewichtszustände. Natürlich kann der Massenpunkt dabei auch durch den Schwerpunkt eines ausgedehnten Körpers ersetzt werden, ohne die Situation grundsätzlich zu verändern.

1.1. Anzahl und Arten des Gleichgewichts in Potentialen bis zur vierten Ordnung und ihre wesentlichen Parameter

Gemäß der obigen Überlegung gehen wir im Folgenden davon aus, dass die potentielle Energie eines Systems $E_p(x)$ nur von einer Ortsvariablen x abhängt und mindestens an einer Stelle x_0 ein Gleichgewichtszustand existiert. In einer noch näher zu definierenden, von Null ver-

5 Patt, H.-J.: Das klassische Pohl'sche Drehpendel als harmonischer Oszillator (Rotator) und seine Veränderung zum anharmonischen Oszillator (Rotator). Electr. Media Publ., 39 S., Univ. des Saarlandes, Saarbrücken, 2005, (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).

6 Patt, H.-J.: Realisierung und Eigenschaften einer Zeeman'schen Katastrophenmaschine und exemplarische Demonstrationsexperimente in nichtlinearen periodischen Potentialen. Electr. Media Publ., erscheint 2006, Univ. des Saarlandes, Saarbrücken (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).

schiedenen Umgebung von x_0 kann dann das Potential bei hinreichenden mathematischen Eigenschaften der Funktion in eine Taylorreihe bis zum n . Glied und dem Restglied R_{n+1} mit $n = 0, 1, 2, ..$ entwickelt werden:

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (dE_p/dx)(x_0) \cdot (x - x_0) + (d^2E_p/dx^2)(x_0) \cdot (x - x_0)^2 / 2 + \quad (1.1.1)$$

$$(d^3E_p/dx^3)(x_0) \cdot (x - x_0)^3 / 6 + (d^4E_p/dx^4)(x_0) \cdot (x - x_0)^4 / 24 + R_5(x, x_0) .$$

Mit Gleichgewichtspunkt x_0 : $\Rightarrow (dE_p/dx)(x_0) = 0$ (Extremwert) \Rightarrow 1. für $|R_3| \ll 1$:
 $(d^2E_p/dx^2)(x_0) > 0$ (Minimum) stabiles Gl., $(d^2E_p/dx^2)(x_0) < 0$ (Maximum) instabiles Gl.,
 E_p : Polynom 2. Ordnung, $(d^2E_p/dx^2)(x_0) = 0$ indifferentes Gl., $E_p = \text{const.}$, sonst \Rightarrow
 2. für $|R_4| \ll 1$: $(d^2E_p/dx^2)(x_0) = 0$ (Wendepunkt), $E_p(x)$: Polynom 3. Ordnung, sonst \Rightarrow
 3. für $|R_5| \ll 1$: $(d^2E_p/dx^2)(x_0) = 0$ (Wendepunkt), $E_p(x)$: Polynom 4. Ordnung.

In jedem Falle ist dabei der konstante Term physikalisch ohne Bedeutung, weil die potentielle Energie ohne dies nur bis auf eine Konstante bestimmt ist und sich der Graph dadurch ohne Veränderung der Form einfach nach oben oder unten verschiebt. Für $n=3$ muss der lineare Term verschwinden, weil an der betrachteten Stelle ein Extremwert vorliegen soll und dies dort eine notwendige und hinreichende Bedingung für das geforderte Gleichgewicht ist (Fall 1. in (1.1.1)). Vom Vorzeichen des quadratischen Terms hängt die Art des Extremwertes ab. Für positive Werte liegt ein Minimum, für negative ein Maximum und für den Wert Null ein Wendepunkt vor. Solange dieser Wert von Null verschieden ist und die höheren Terme vernachlässigt werden können, führt dies zu einem einzigen stabilen bzw. instabilen Gleichgewichtszustand. Bei Stabilität, also für positive Werte der zweiten Ableitung, ergibt sich das sogenannte Parabelpotential, das nach oben offen und deshalb für gebundene Zustände charakteristisch ist. Es zeichnet sich dadurch vor allen anderen aus, dass die Schwingungszeit der damit erzeugbaren harmonischen Schwingungen unabhängig von der Größe der Schwingungsamplitude ist (harmonischer Oszillator oder Rotator [5]) und deshalb für den Bau von Uhren und die Zeitmessung eine besondere Bedeutung besitzt [6]. Im Falle der Instabilität, also für negative Werte der zweiten Ableitung, würde jede noch so kleine Abweichung vom Gleichgewichtszustand ohne sonstige Einwirkung zu einer beliebig großen negativen Energie und Entfernung vom Gleichgewichtspunkt führen. Daher sind solche Anordnungen bei den von uns zu Experimentierzwecken zu entwickelnden Systemen ohne die später noch zu besprechenden Modifikationen des Potentialverlaufs nicht zweckmäßig und scheiden daher aus der Betrachtung aus. Wenn die zweite Ableitung und alle höheren Terme verschwinden, wird der Fall des Wendepunktes als indifferentes Gleichgewicht bezeichnet. Weil dabei die potentielle Energie unverändert bleibt und jeder Punkt der Umgebung gleichzeitig stabile und instabile Eigenschaften besitzt, degeneriert in diesem Falle die Parabel zu einer Konstanten, deren Wert aber wegen der oben schon genannten Eigenschaft des Potentials völlig unerheblich ist.

Das Problem des Wendepunktes wird dann von besonderem Interesse, wenn die höheren Terme in der Taylorentwicklung (Fall 2. in (1.1.1)) nicht verschwinden. Im einfachsten Falle kann man dann davon ausgehen, dass der Term dritter Ordnung von Null verschieden ist und die größeren Terme vernachlässigt werden können. Da in diesem Falle der Faktor vor der höchsten Potenz von Null verschieden sein muss, kann die potentielle Energie durch diese Größe dividiert werden. Zusätzlich kann zur Vereinfachung des Ausdrucks eine Verschiebung des Koordinatennullpunktes in Richtung der Abszisse um den Wert x_N so vorgenommen wer-

den, dass das quadratische Glied verschwindet, ohne dadurch die Lage und Art der Extremwerte wesentlich zu verändern.

$$E_p / E_{p0} = c_0 + c_1 \cdot (x - x_N) + c_2 \cdot (x - x_N)^2 + (x - x_N)^3 \Rightarrow \text{mit } x_N = c_2 / 3 \Rightarrow \quad (1.1.2)$$

$$E_p / E_{p0} = w + v \cdot x + x^3 \text{ und } v = c_1 - c_2^2 / 3, w = c_0 - c_1 \cdot c_2 / 3 + c_2^3 \cdot 2 / 27 \Rightarrow$$

$$d(E_p / E_{p0}) / dx = 0 = v + 3 \cdot x_E^2, d^2(E_p / E_{p0}) / dx^2 = 6 \cdot x_E \Rightarrow x_{E1/E2} = \pm \sqrt{-v / 3} \Rightarrow$$

Diskriminante (quadratische Gleichung): $D = -v / 3$ mit einem Kontrollparameter $v \Rightarrow$

1. $v < 0$: für $x_{E1} = +\sqrt{-v / 3} \Rightarrow$ stabiles Gl., 2. $v \leq 0$: für $x_{E2} = -\sqrt{-v / 3} \Rightarrow$ instabiles Gl.,
3. $v > 0$: kein Gleichgewichtspunkt (keine gebundenen Zustände), Übergang: $v = 0$ (Falte).

Wie die Ergebnisse in (1.1.2) und die graphischen Darstellungen in Abb. 2 [7] zeigen, besitzt ein Potential dritter Ordnung nur für negative Werte des sogenannten wesentlichen Parameters oder Kontrollparameters v zwei reelle Extremwerte, die symmetrisch zur Ordinate liegen und aus einem Minimum und einem Maximum bestehen. Für positive Werte von v sind diese Gleichgewichtspunkte (imaginäre Werte) verschwunden, wobei beim Übergang über $v = 0$ die beiden Extremwerte zu einem Wendepunkt umgeformt werden bzw. aus dem Potential ohne gebundenen Zustände insgesamt sich zwei Gleichgewichtspunkte entwickeln, die aber nur in einem begrenzten Ortsbereich gebundene Zustände erlauben, und daher für größere Ortsänderungen zu für unsere Zwecke ungeeigneten Systemen führen können (Faltenkatastrophe). Dabei ist auch das Vorzeichen von E_{p0} unerheblich. Für unsere Überlegungen wird es also notwendig sein, die Taylorentwicklung (1.1.1) mindestens noch um ein Glied zu erweitern. Kritisch ist das betrachtete Potential dritter Ordnung nur in dem Punkt $v = 0$, weil hier die Gleichgewichtseigenschaften grundlegend ihren Charakter ändern.

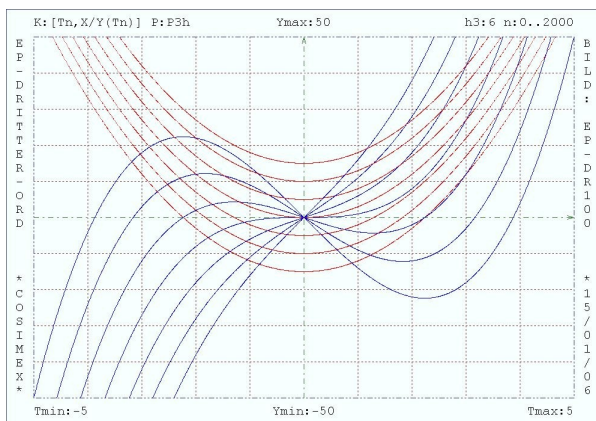


Abb. 2: Normiertes Potential dritter Ordnung (blaue Kurven) und seine Ableitung (rote Kurven) als Funktion der Ortskoordinate (x [cm]: [-5, +5], w [cm³]: 0) für verschiedene Werte des Kontrollparameters v [cm²]: -15, -10, -5, 0, +5, +10, +15 (Falte). (Cosimex-Systemdatei [7]: EP_DR100.PA1, s. Kap. 4.2.)

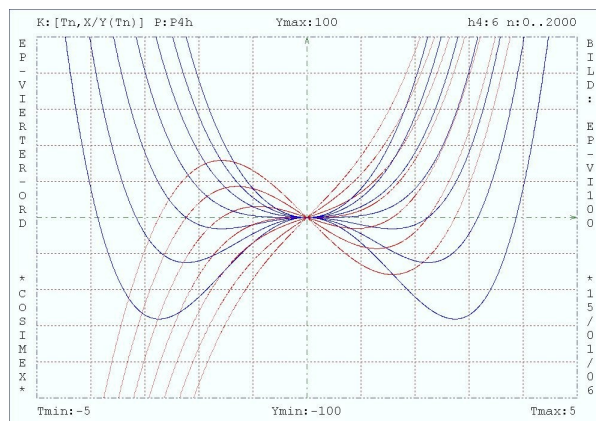


Abb. 3: Normiertes Potential vierter Ordnung (blaue Kurven) und seine Ableitung (rote Kurven) als Funktion der Ortskoordinate (x [cm]: [-5, +5], w [cm⁴]: 0, v [cm³]: 0) für verschiedene Werte des Kontrollparameters u [cm³]: -15, -10, -5, 0, +5, +10, +15 (Kuspe). (Cosimex-Systemdatei [7]: EP_VI100.PA1)

Um also die Eigenschaften eines möglich einfachen nichtlinearen Systems für die geplanten

7 Patt, H.-J.: COSIMEX für Windows - Computerunterstütztes SIMulieren und EXperimentieren - 1. Simulation von Systemmodellen, 2. Vergleich mit Systemmessgrößen. Version 4 für Windows 3.1x bis XP, ©-1995/2005: TeachPhysics, Univ. d. Saarl., Saarbrücken (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).

Experimentierzwecke bestimmen zu können, ist davon auszugehen, dass dieses in der Nähe eines stabilen Gleichgewichtspunktes durch ein Potential vierter Ordnung beschrieben werden kann (Fall 3 in (1.1.1)). Dabei reduziert sich das Problem auf die Fragestellung, wie viele Minima und Maxima ein Polynom vierter Ordnung mit den genannten Eigenschaften besitzt und wo sich diese Stellen befinden. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass der Koeffizient vor der höchsten Potenz größer als Null ist, weil erstens der Faktor wegen der vorgegebenen Ordnung ungleich Null sein muss und zweitens sonst das System wie oben zu nicht gebundenen Zuständen führen würde. Daher kann die potentielle Energie durch diesen Faktor normiert werden, wobei die Art der Stabilität und die Lage der Extremwerte nicht geändert wird. Das Polynom kann jetzt zusätzlich durch eine Verschiebung des Koordinatennullpunktes in Richtung der Abszisse um den Wert x_N vereinfacht werden, ohne die genannten Größen wesentlich zu beeinflussen. Dabei soll die Funktion so umgeformt werden, dass der Term mit der dritten Potenz verschwindet:

$$E_p / E_{p0} = c_0 + c_1 \cdot (x - x_N) + c_2 \cdot (x - x_N)^2 + c_3 \cdot (x - x_N)^3 + (x - x_N)^4 \Rightarrow \quad (1.1.3)$$

$$E_p / E_{p0} = w + v \cdot x + u \cdot x^2 + x^4 \quad \text{mit } x_N = c_3 / 4, \quad u = c_2 - c_3^2 \cdot 3 / 8,$$

$$v = c_1 - c_2 \cdot c_3 / 2 + c_3^3 / 8 \quad \text{und } w = c_0 - c_1 \cdot c_3 / 4 + c_2 \cdot c_3^2 / 16 - c_3^4 \cdot 3 / 256.$$

Damit ergibt sich:
 $d(E_p / E_{p0}) / dx = 0 = v / 4 + u / 2 \cdot x + x^3, \quad d^2(E_p / E_{p0}) / dx^2 = 0 = u + 6 \cdot x^2 \Rightarrow$
 Diskriminante (kubische Gleichung): $D = u^3 / 27 + v^2 / 8 \Rightarrow D > 0: 1 \text{ reelle N.}, D \leq 0: 3 \text{ reelle Nullstellen, Übergang: } v^2 = -8 \cdot u^3 / 27 \text{ für } u \leq 0$ (Kuspe), zwei Kontrollparameter: u und v .

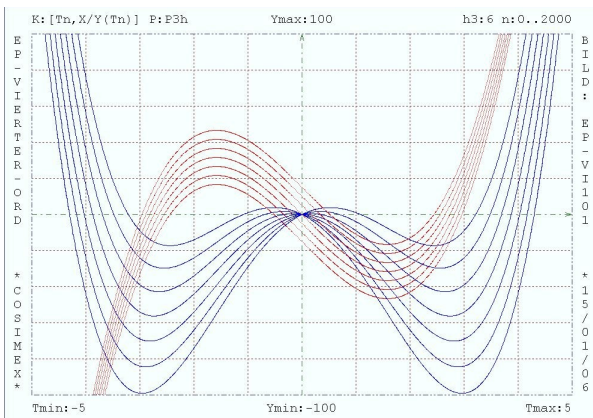


Abb. 4: Normiertes Potential vierter Ordnung (blaue Kurven) und seine Ableitung (rote Kurven) als Funktion der Ortskoordinate (x [cm]: [-5, +5], w [cm⁴]: 0, u [cm³]: -15) für verschiedene Werte des Kontrollparameters v [cm³]: -15, -10, -5, 0, +5, +10, +15 (Kuspe). (Cosimex-Systemdatei [7]: EP_VII101.PA1)

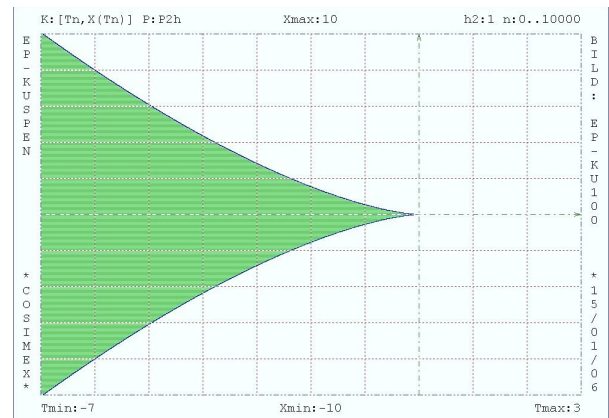


Abb. 5: Darstellung des Stabilitätsverhaltens eines Potentialtopfs vierter Ordnung als Funktion der beiden Kontrollparameter u [cm³]: [-7,3] und v [cm²]: [-10, +10] (Weißes Gebiet: ein stabiler Gleichgewichtspunkt, grünes Gebiet: zwei stabile und ein instabiler Gleichgewichtspunkt, blaue Grenzkurve (Kuspe): Übergangskurve zwischen den beiden Gebieten. (Cosimex-Systemdatei [7]: EP_KU100.PA1)

Da die Ableitung der potentiellen Energie als Polynom dritten Grades nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens eine oder alternativ unter Berücksichtigung der Vielfachheit drei reelle Nullstellen besitzt und sich Minima und Maxima abwechseln müssen, kann es, abhängig von den beiden wesentlichen oder Kontrollparametern u und v , entweder nur einen stabilen Gleichgewichtspunkt (und zwei zueinander konjugiert komplexe Werte) oder zwei stabile Gleichgewichtspunkte geben, zwischen denen ein instabiler Punkt liegt (s. Abb. 3 und

4 für verschiedene charakteristische Kontrollparameter u und v). Wie aus (1.1.3.) leicht abgeleitet werden kann, liegen die Parameterbereiche außerhalb bzw. innerhalb der angegebenen Kuppe. Für Parameterwerte auf der Kuppe (Wendepunkte) erfolgt der Übergang zwischen den beiden verschiedenen Stabilitätsbereichen [1, 2, 4]. Die Form der Kuppe ist in Abb. 5 neben den beiden sich grundsätzlich unterscheidenden Regionen dargestellt (Kuppenkatastrophe). Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass die durchgeführte Betrachtung neben der oben erwähnten Faltenkatastrophe der einfachste Fall des allgemeinen Problems darstellt, bei dem das Polynom bis zu einer höheren ganzzahligen Ordnung, weil z. B. der Faktor vor der vierten Potenz von x verschwindet, oder als Funktion von zwei Ortsvariablen zu untersuchen ist. Diese Fragestellungen sind, wie bereits in der Einleitung angegeben wurde, Gegenstand der so genannten Katastrophentheorie [1, 2, 4], deren Anfänge etwa ab 1960 auf den französischen Mathematiker R. Thom (1923-2002) und den Dänen E. Chr. Zeeman [8] zurückgehen. Diese Überlegungen führen zu entsprechend komplexen Betrachtungen in höher dimensionalen Räumen, wobei insgesamt sieben verschiedene Elementarkatastrophen unterschieden werden und mehrdimensionale Manigfaltigkeiten zu untersuchen und zu diskutieren wären. Andererseits reichen die hier getroffenen Einschränkungen in der Regel aus, um grundsätzlich diese wichtigen physikalischen Fragestellungen theoretisch und experimentell zu untersuchen und zu klären. Dies soll im folgenden exemplarisch am Beispiel der Gravitationskatastrophenmaschine (im Prinzip vorgeschlagen in [9]) aufgezeigt werden.

1.2. Theoretische Beschreibung der Gravitationskatastrophenmaschine und der Grundlagen für ihre Realisierung

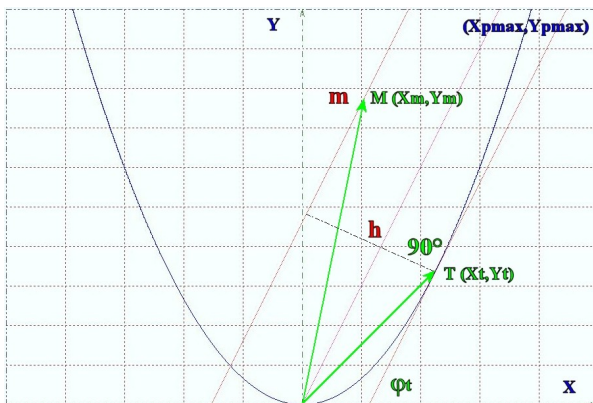


Abb. 6: Prinzipieller Aufbau der Gravitationskatastrophenmaschine (Randkurve: Parabelabschnitt, Zusatzmasse m auf der Parabelfläche verschiebbar).

Wenn eine Gravitationskatastrophenmaschine gemäß der Überlegungen in den Kap. 1. und 1.1. für Experimentierzwecke gebaut werden soll, dann ist eine Kugel, die auf einer Parabelfläche vierter Ordnung abrollen kann, deshalb ungeeignet, weil hierbei für jede Änderung eines der beiden Kontrollparameter eine andere Fläche bereitgestellt werden müsste. Da neben der Höhe des Schwerpunktes nur eine Ortsvariable in horizontaler Richtung vorhanden sein soll, müsste zusätzlich die entsprechend gekrümmte Grundfläche an beiden Seiten durch ebene Flächen begrenzt werden, so dass die Kugel sich nur in zwei entgegengesetzten festen Richtungen über die gebogene Fläche bewegen könnte. Die dabei zu lösenden Probleme können wesentlich vereinfacht werden, wenn die in Abb.6 dargestellte Anordnung verwendet wird.

Dabei kann ein Parabelabschnitt auf einer horizontalen Ebene abrollen, wobei der Berührungspunkt mit der Ebene T die Eigenschaft besitzt, dass die Parabeltangente im Berührungspunkt momentan mit der Ortskurve auf der Ebene übereinstimmt. Auf der Parabelfläche ist an der Stelle M eine Zusatzmasse der Größe m angebracht, wobei M leicht veränderbar sein soll. Im Berührungspunkt liegt die Masse in der Höhe h über der Ebene und besitzt daher die in Kap. 1. genannte potentielle Energie von der Größe $E_p = m \cdot g \cdot h$. In (1.2.1) ist abgeleitet, in welcher Wei-

8 Zeeman, E. Chr.: Selected Papers 1972-1977. Addison-Wesley Publ., Reading, 1977.

9 Thompson, J. M. T.: Experiments in Catastrophe, *Nature*, **254**, 392-395 (1975).

se diese Größe von den Koordinaten der Masse und den Parametern des Berührungspunktes abhängt. Dazu werden die Hesse'sche Normalform der Tangentengleichung und die damit leicht mögliche Berechnung des Abstandes des Punktes M von dieser Geraden verwendet [10].

$$\begin{aligned} \text{Parabelgleichung: } y_p &= 0.25 / a \cdot x_p^2 \text{ für } 0 \leq |x_p| \leq x_{p \max} \Rightarrow 0 \leq y_p \leq y_{p \max} = 0.25 / a \cdot x_{p \max}^2 \quad (1.2.1) \\ \text{Parameterdarstellung: } y_p &= a \cdot t^2, \quad x_p = 2 \cdot a \cdot t \text{ für } 0 \leq |t| \leq t_{\max} = 0.5 / a \cdot x_{p \max} = \sqrt{0.5 \cdot y_{p \max}} \Rightarrow \\ \text{Tangente an die Parabel im Berührungspunkt T } (x_T, y_T): & (dy_p / dx_p)(x_T) = 0.5 \cdot x_T / a = t = \tan \varphi_T \Rightarrow \\ y &= y_T + \tan \varphi_T \cdot (x - x_T) \Rightarrow y - t \cdot x + a \cdot t^2 = 0 \Rightarrow \text{Hesse'sche Normalform der Tangente [9]:} \\ (-y + t \cdot x - a \cdot t^2) / \sqrt{1+t^2} &= 0 \Rightarrow h = \frac{y_m - t \cdot x_m + a \cdot t^2}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow E_p = m \cdot g \cdot \frac{y_m - t \cdot x_m + a \cdot t^2}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

Damit können nun die Anzahl und die Art der Gleichgewichtspunkte sowie die wesentlichen Parameter oder Kontrollparameter der Katastrophenmaschine u und v bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \text{Mit } E_p / E_{p0} &= \frac{y_m - t \cdot x_m + a \cdot t^2}{\sqrt{1+t^2}} \text{ und } E_{p0} = m \cdot g \Rightarrow \text{mit } M_p = \text{Drehmoment} \quad (1.2.2) \\ d(E_p / E_{p0}) / dt &= -M_p / E_{p0} = \frac{a \cdot t^3 + (2 \cdot a - y_m) \cdot t - x_m}{(1+t^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow a \cdot t^3 + (2 \cdot a - y_{mk}) \cdot t - x_{mk} = 0 \text{ und} \\ d^2(E_p / E_{p0}) / dt^2 &= d(E_p / E_{p0}) / dt \cdot \frac{-3 \cdot t}{1+t^2} + \frac{3 \cdot a \cdot t^2 + 2 \cdot a - y_m}{(1+t^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow 3 \cdot a \cdot t^2 + 2 \cdot a - y_{mk} = 0 \Rightarrow \\ \text{Kuspe: } x_{mk}^2 &= -4 / 27 \cdot (2 \cdot a - y_{mk})^3 / a, \text{ Kontrollparameter: } v = -4 / a \cdot x_{mk} \text{ und } u = 2 \cdot (2 - y_{mk} / a). \end{aligned}$$

Wie sich aus (1.2.2) ergibt, sind die beiden Kontrollparameter u und v allein durch die Größen x_{mk}/a bzw. y_{mk}/a bestimmt und ergeben damit bei einem festem Wert von a eine Kuspe auf der Parabelfläche. Diese ist symmetrisch zur x-Achse, wobei die Spitze $2 \cdot a$ vom Scheitelpunkt entfernt und nach oben geöffnet ist. Die potentielle Energie wird dabei im wesentlichen durch ein Polynom vierter Ordnung mit gebundenen Zuständen bestimmt, dessen wesentlicher Verlauf durch die Lage des Massenpunktes auf der Parabelfläche, nicht aber durch die Größe der Masse festgelegt wird, und leicht verändert werden kann. Damit ergibt sich eine wesentliche Verbesserung gegenüber der zu Beginn dieses Kapitels diskutierten Situation.

$$\begin{aligned} E_{Pg} / E_{p0} &= \frac{y_m - t \cdot x_m + a \cdot t^2}{\sqrt{1+t^2}} + m_0 / m \cdot \frac{y_0 + a \cdot t^2}{\sqrt{1+t^2}} \text{ mit } E_{p0} = m \cdot g \Rightarrow \quad (1.2.3) \\ E_{Pg} / E_{p0} &= \frac{y_{mg} - t \cdot x_m + a_g \cdot t^2}{\sqrt{1+t^2}} \text{ mit } y_{mg} = y_m + m_0 / m \cdot y_0 \text{ und } a_g = a \cdot (1 + m_0 / m) \Rightarrow \\ \text{Kuspe: } x_m^2 &= \frac{-4 / 27}{a \cdot (1 + m_0 / m)} \cdot \{2 \cdot a - y_m + m_0 / m \cdot (2 \cdot a - y_0)\}^3, \text{ vereinfacht durch: } y_0 = 2 \cdot a. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu der oben vorgestellten Anordnung wurde bisher davon abgesehen, dass die konkrete Realisierung der Parabelfläche nur mit Hilfe einer materiellen Struktur möglich ist, die ebenfalls eine Masse m_0 , einen Schwerpunkt M_0 und eine potentielle Energie E_0 besitzt.

10 Stöcker, H. (Hrsg.): Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 3. Aufl., 1995.

Wenn die Massenverteilung der Parabelfläche mit eventuell zusätzlich erforderlichen Befestigungen und Ergänzungen symmetrisch zur Parabelachse ist, liegt der Schwerpunkt M_0 auf dieser Achse in einer Entfernung y_0 vom Scheitelpunkt entfernt ($x_0 = 0$ cm). Damit erhält man für die gesamte potentielle Energie des zu realisierenden Systems E_{Pg} die in (1.2.3) genannten Bedingungen. Die Berücksichtigung der Masse m_0 verschiebt also quasi die ortsveränderliche Masse m in y -Richtung um einen konstanten Betrag, vergrößert den Parabelparameter a durch einen Faktor größer als Eins und verschlankt dadurch die gewählte reale Parabel. Die Spitze der neuen Kuspel liegt an der gleichen Stelle, wenn y_0 gemäß der Angabe in (1.2.3) gewählt wird, was durch eine feste Masse auf der Parabelachse leicht erreicht werden kann (s. Kap. 2.). Die einzig verbleibende Modifikation der Kuspel besteht dann darin, dass der Öffnungsbereich ähnlich wie bei der virtuellen Parabel verkleinert wird.

2. Aufbau und Optimierung der Eigenschaften der realisierten Gravitationskatastrophenmaschine

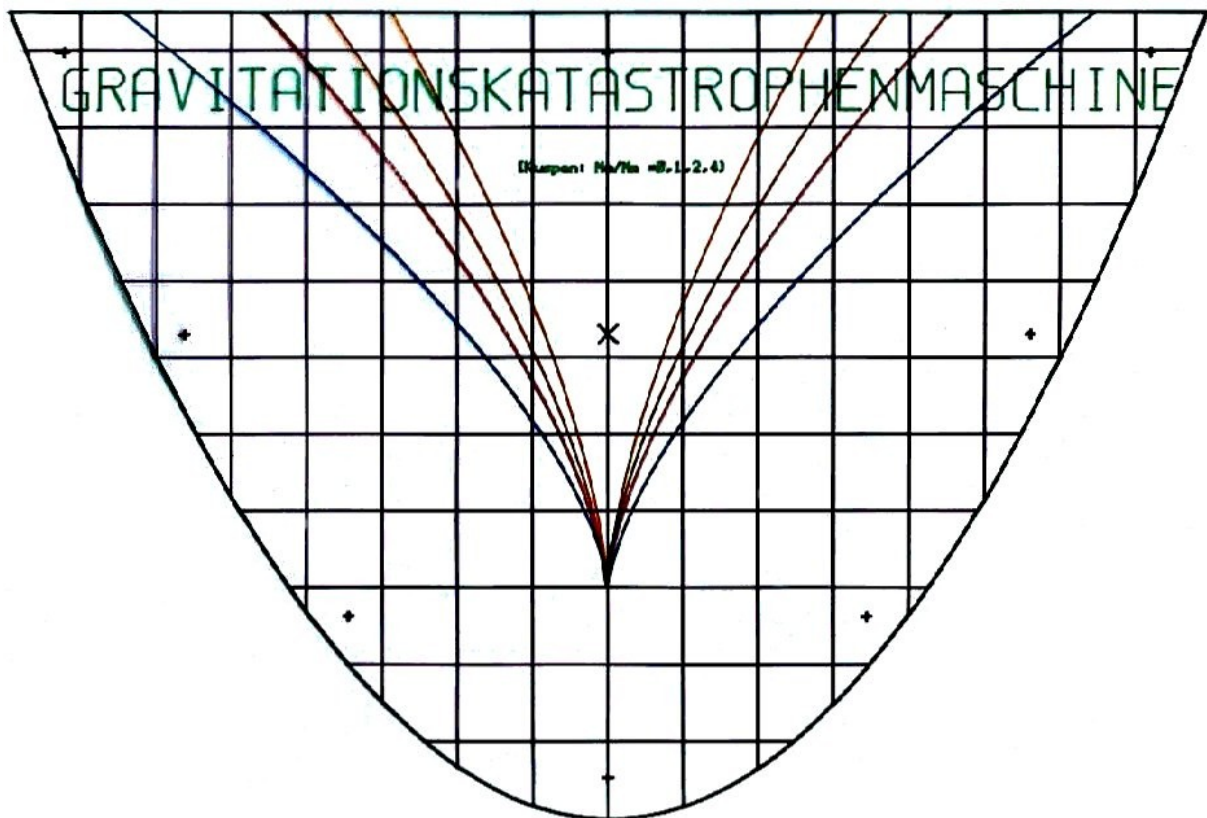


Abb. 7: Darstellung eines der zwei aus Makrolon gefrästen Parabelabschnitte ($a = 3$ cm, Dicke = 0,5 mm, $y_{pmax} = 21$ cm, $x_{pmax} = 15,87$ cm, Dichte $\rho = 1,18$ g/cm³, Schwerpunkt (Kreuz): $3/5 \cdot y_{pmax} = 12,6$ cm, s. (2.1)) mit Gitternetz (2 cm x 2 cm). Die Kreuze geben die Stellen an, an denen die beiden Scheiben durch Schrauben mit Mutter und zylindrischen Kunststoffabstandshaltern mit Langloch (Länge: 3,5 cm, jeweils 1 cm vom Rand entfernt) parallel zueinander verbunden werden. Im unteren Loch wird die beschriebene Zusatzmasse (drei Messingzylinder vorne, in der Mitte und hinten, Radius 1 cm) zusammen mit der Schraube befestigt. Die Kuspel sind für folgende Massenverhältnisse m_0/m dargestellt: 0 (blaue Kurve, ohne Parabelmasse), 1, 2, 4 (rote Kurven). Die Kuspel Spitze aller gezeichneten Kuspel befindet sich in der gleichen Höhe $y_0 = 2 \cdot a = 6$ cm.

Nachdem nun die theoretischen Grundlagen für die Realisierung einer Gravitationskatastro-

phenmaschine in den vorhergehenden Kapiteln erarbeitet wurden, können nun die konkreten Parameter für eine Anordnung festgelegt werden, die für Demonstrationsexperimente in einem Klassenraum oder Hörsaal geeignet ist. Wie in Abb. 7 zu erkennen ist, wurden dazu geometrische Abmessungen gewählt, die einerseits genügend groß und noch leicht handhabbar sind, andererseits aber den Material- und Herstellungsaufwand in Grenzen halten. Natürlich wurde deshalb Makrolon gewählt, weil dieses Acrylglas durchsichtig ist und leicht gefräst werden kann, wenn die Fräsgeschwindigkeit nicht zu hoch gewählt wird, weil durch die dann auftretenden höheren Temperaturen der Thermoplast zu fließen beginnt und verschmiert.

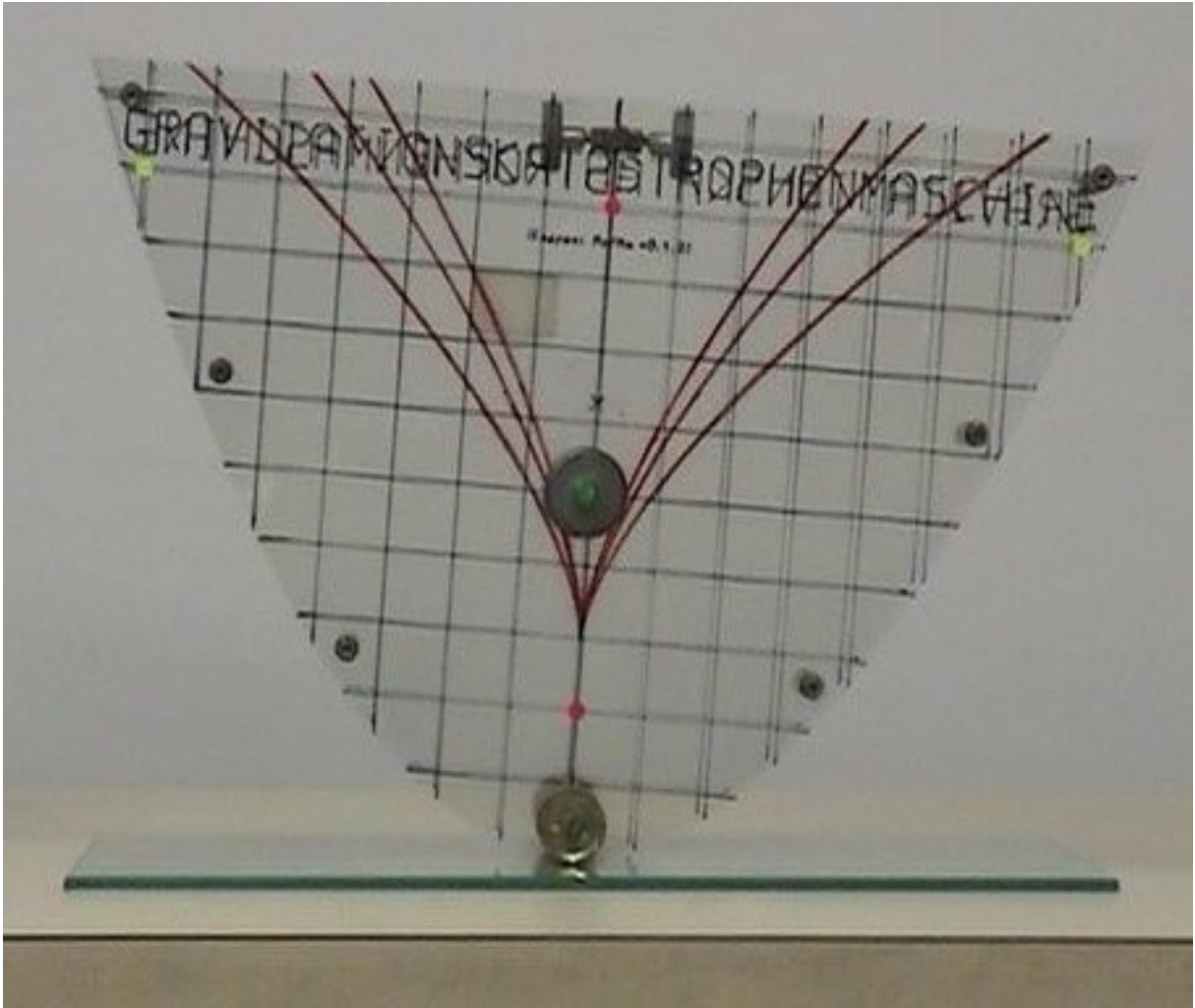


Abb. 8: Die realisierte Gravitationskatastrophenmaschine auf einer horizontalen Glasplatte mit verschiebbarer, magnetisch gehaltener Masse $m = m_0/2$ innerhalb der Kuppe ohne äußere Anregung. Ein äußeres Drehmoment kann durch die Einwirkung eines horizontal sich ändernden Feldes eines Elektromagneten auf die oben zwischen den beiden Makrolonscheiben befestigten Dauermagnete mit entgegengesetzter Polung (Dipol) ausgeübt werden. Die Kuspen sind für die Massenverhältnisse $m_0/m = 0$ (idealisierte Fall, äußere Kurve), 1, 2 eingezeichnet, siehe (2.1).

In Abb. 8 wird die realisierte Gravitationskatastrophenmaschine in einer Anordnung dargestellt, wie sie für Demonstrationsexperimente ohne äußere Anregung verwendet wird. Hier sind alle genannten Befestigungsschrauben und die unten angebrachte Zusatzmasse zu erkennen. Oben in der Parabelmitte sind symmetrisch auf der gleichen Höhe wie die oberen Befestigungsschrauben zwei starke Dauermagnete als Dipol fest angebracht. Auf diese Weise kann durch das horizontale Feld eines Elektromagneten ein äußeres Drehmoment auf die Katastro-

phenmaschine ausgeübt und so eine Schwingung angeregt werden (siehe auch Kap. 3.). Die veränderliche Masse m besteht aus vier starken Dauermagneten, von denen sich zwei, als Dipol verbunden, mit festem Abstand zwischen den beiden Makrolonscheiben befinden. Von außen wird an jeder Seite ein weiterer Magnet mit einer solchen Polarität aufgesetzt, dass einerseits im normalen Betrieb die Lage unverändert bleibt, andererseits aber durch entsprechendes Anheben der äußeren Magnete alle vier an jede Stelle auf der Parabelfläche verschoben werden können. Um ein Verkratzen der Scheiben zu verhindern, wurde auf alle Magnete eine dünne Kunststoffolie geklebt. Natürlich muss dabei die gegenseitige Haftkraft zwischen den Magneten noch genügend groß bleiben. Durch die Befestigung von je zwei gleichen Messingzylinder mit Loch mit Hilfe einer Schraube an den äußeren Magneten kann die bewegliche Masse verdoppelt werden. Die auf der Parabelfläche aufgebrauchten fluoreszierenden Farbpunkte dienen der Beobachtung der Bewegung in abgedunkelten Räumen bei UV-Bestrahlung oder zur Aufzeichnung der zweidimensionalen Bahnkurven mit Hilfe einer Videokamera [11, 12].

Abschließend ist noch festzulegen, welche Werte die benötigten Massen aufweisen müssen, damit die in Kap. 1.2. und oben genannten Bedingungen erfüllt werden können. Da die Massen der beiden Parabelabschnitte (berechnet: 104,90g, zusätzlich Folie, gemessen; $m_p = 106,68$ g), der Befestigungen (6 je $m_B = 3,74$ g) und der Magnete für die äußere Anregung ($m_F = 29,67$ g) sowie ihre Lagen vorgegeben sind, reduziert sich das Problem auf die Berechnung der Zusatzmasse m_Z unter der Bedingung, dass der Gesamtschwerpunkt y_0 die in (1.2.3) genannte Bedingung erfüllt. Die dazu erforderlichen unterschiedlichen y -Koordinaten ergeben sich dabei aus den Abb. 7 und 8.

<p>Mit Schwerpunkt: $y_{P0} = \frac{\int_0^{y_{Pmax}} x_P \cdot y_P \cdot dy_P}{\int_0^{y_{Pmax}} x_P \cdot dy_P} = \frac{\int_0^{y_{Pmax}} y_P^{3/2} dy_P}{\int_0^{y_{Pmax}} y_P^{1/2} dy_P} = 3/5 \cdot y_{Pmax}$, (2.1)</p> <p>siehe (1.2.1), $a = 3$ cm, $y_{max} = 21$ cm und $y_0 = 2 \cdot a = f_0 \cdot y_{max} \Rightarrow f_0 = 2/7 = 0,2857 \Rightarrow$</p> $f_0 = \frac{3/5 \cdot m_p + 20/21 \cdot m_F + 1/21 \cdot m_Z + \{20/21 + 3/5 + 20/21 - 2 \cdot (20/21 - 3/5)\} \cdot 2 \cdot m_B}{m_p + m_F + m_Z + 6 \cdot m_B} \Rightarrow$ $m_Z = 21/5 \cdot \{11/35 \cdot m_p + 2/3 \cdot m_F + 66/35 \cdot m_B\} \Rightarrow m_Z = 253,51 \text{ g} \Rightarrow m_0 = 412,7 \text{ g}.$

Wenn also für die Zusatzmasse ein Wert von 253,51 g gewählt wird, was z. B. durch einen symmetrischen Messingzylinder (Dichte: 8,5 g/cm³, Radius: 1 cm) mit der Gesamtlänge 9,49 cm zu realisieren ist, dann sind alle aufgestellten Bedingungen erfüllt. Die Gesamtmasse erhält dadurch einen Wert von $m_0 = 412,7$ g. Wenn jetzt die Masse der verschiebbaren Magnete durch einen innen zwischen ihnen angebrachten Messingring auf einen Wert von $m = 206,35$ g eingestellt wird, ergibt sich ein Massenverhältnis $m_0/m = 2$. Durch zwei insgesamt gleichschwere Zusatzmassen aus Messing, die auf die beweglichen Magneten an beiden Seiten aufgeschraubt werden, kann dann das Massenverhältnis von 2 auch auf 1 verändert werden. Auf diese Weise können die beiden inneren in Abb. 8 eingezeichneten Kuspens mit gleicher Kus-

11 Conrad, H.-G.: Automatisierte Erfassung der Bahnkoordinaten von Massenpunkten bei ebenen Bewegungen mit Hilfe einer CCD-Fernsehkamera und mögliche Einsatzschwerpunkte bei Schulexperimenten. Univ. des Saarlandes, Saarbrücken, 1998.

12 Conrad, H.-G. u. H.-J. Patt: Messung, Darstellung und Auswertung der Bahnkoordinaten eines Körpers bei ebenen Bewegungen mit Hilfe einer Videokamera und eines PCs. 90. Hauptversammlung der MNU, S.79, MNU Tagungsbericht, Saarbrücken, 1999.

penspitze realisiert werden. Die äußere Kuspel gilt für den idealisierten Fall $m_0/m \Rightarrow 0$.

Zur Verdeutlichung der mit der entwickelten Gravitationskatastrophenmaschine erzielbaren Potentiale und Drehmomente sind in den Abb. 9 und 10 einige charakteristische Kurven für den Fall $m_0/m = 2$ dargestellt. Dabei sind deutlich die Übergänge zwischen dem Bereich mit einem stabilen Gleichgewichtspunkt und dem Gebiet zu erkennen, in dem zwei stabile und ein instabiler Punkt existieren. Daneben sind noch die Ränder der Parabelfläche und die aktuelle Kuspel angegeben.

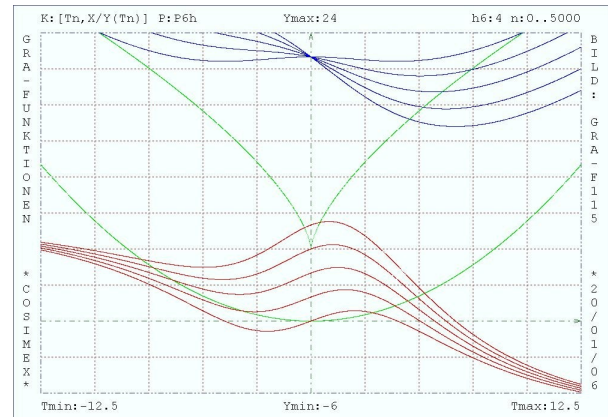
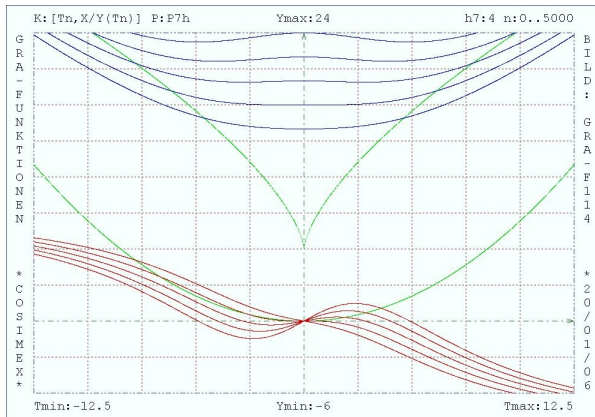


Abb. 9: Potentiale E_P/E_{P0} (blaue Kurven), Drehmomente M_P/E_{P0} (rote Kurven, Parabel y_P/cm und Kuspel y_K/cm ($m_0/m = 2$)) (grüne Kurven) als Funktion der Ortskoordinate x_P [cm]: -12,5, +12,5 für verschiedene Lagen des verschiebbaren Magneten auf der Achse ($x_M = 0$ cm) y_M [cm]: 4, 6, 8, 10, 12 (außerhalb und innerhalb der Kuspel). (Cosimex-Systemdatei [7]: GRA_F114.PA1)

Abb. 10: Potentiale E_P/E_{P0} (blaue Kurven), Drehmomente M_P/E_{P0} (rote Kurven, Parabel y_P/cm und Kuspel y_K/cm ($m_0/m = 2$)) (grüne Kurven) als Funktion der Ortskoordinate x_P [cm]: -12,5, +12,5 für verschiedene Lagen des verschiebbaren Magneten bei fester Höhe ($y_M = 10$ cm) x_M [cm]: 0, 2, 4, 6, 8 (außerhalb und innerhalb der Kuspel). (Cosimex-Systemdatei [7]: GRA_F115.PA1)

3. Ausgewählte Demonstrationsexperimente mit der entwickelten Gravitationskatastrophenmaschine ohne und mit äußerer Anregung

Im Prinzip können mit der hier vorgestellten Gravitationskatastrophenmaschine zwei Gruppen von Experimenten demonstriert werden: 1. solche mit einem zeitlich und eventuell örtlich von außen vorgegebenen Verlauf der Anregung und 2. solche, bei denen ausgehend von frei vorgebbaren Anfangsbedingungen die sich entwickelnden Schwingungen beobachtet werden können. Dies geschieht in jedem Falle dadurch, dass die Maschine auf eine möglichst horizontal angebrachte Glasplatte (s. Abb. 8) aufgesetzt wird, weil hierbei die Rollreibung gering und ortsunabhängig ist. Messungen können mit dem bereits genannten Verfahren [11,12], das unmittelbar Bahnkoordinaten von durch Fluoreszenzfarben gekennzeichneten Punkten auf der Parabelfläche als Funktion der Zeit liefert (s. Abb. 8), durch Auswertung von hergestellten oder in der Anlage zur Verfügung gestellten Videoaufzeichnungen (s. Kap. 4.3, 25 Bilder/s) mit vorhandenen oder kostenfrei erhältlichen Auswertungsprogrammen [z. B. ¹³] oder nach einem Verfahren durchgeführt werden, bei dem ein Seidenfaden an einer der oberen Ab-

¹³ Lee, A.: VirtualDub – Windows - Programm, stabile Version 1.6.11, ©-1998-2005 (Free Software, GNU-Lizenz). <http://www.virtualdub.org/index>

standshülsen befestigt, dann über das unterhalb der minimalen Höhe befestigte Rad eines Winkelaufnehmers mit optischer Strichkodescheibe geführt und am anderen Ende mit einem kleinen Gewicht (5 g) beschwert wird [14]. Im letzten Fall werden Winkel, Winkelgeschwindigkeit oder Winkelbeschleunigung digital angezeigt und alle jeweils als Analogspannung für die Aufzeichnung mit einem X-Y-Schreiber zur Verfügung gestellt (s. Abb. 9 und 10).

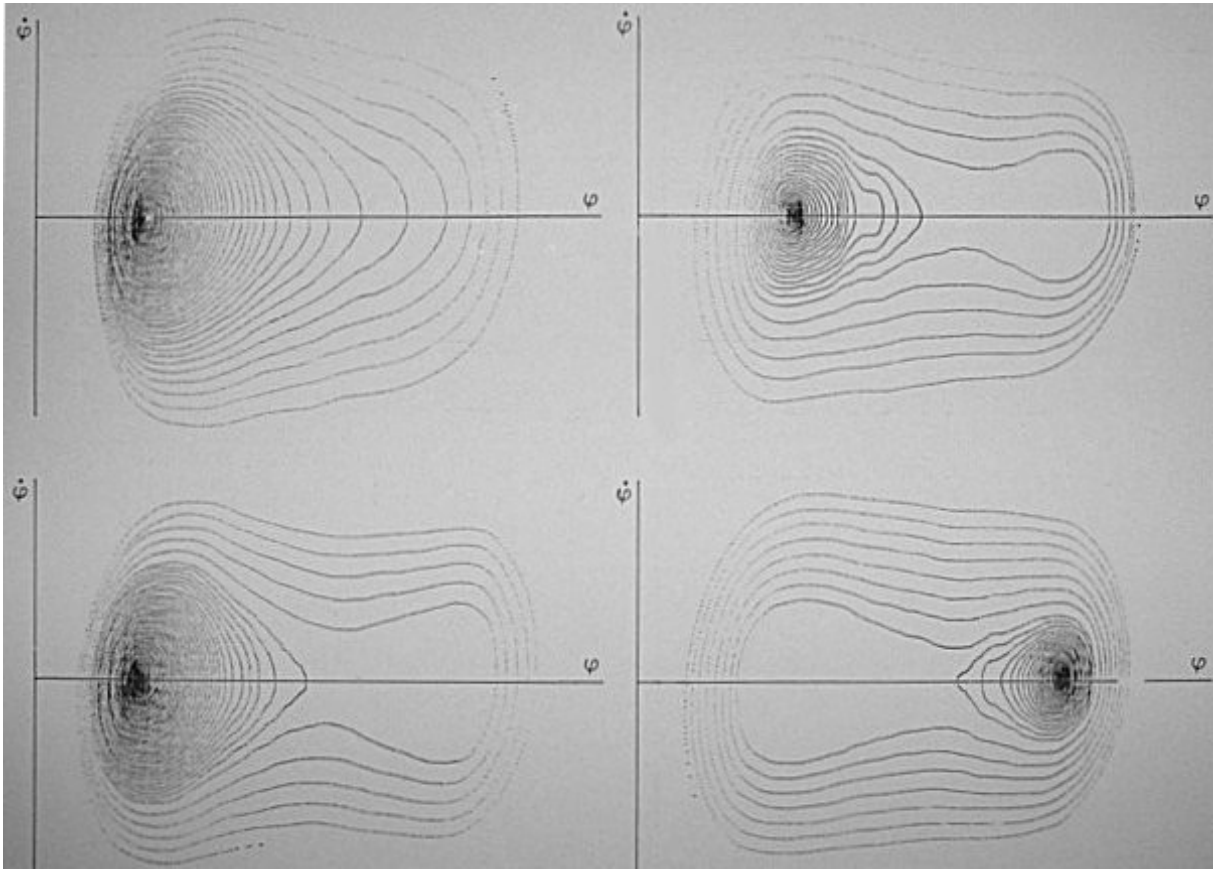


Abb. 11: Exemplarische Darstellung von Messwerten der Bewegungen eines Punktes der Gravitationskatastrophenmaschine ohne äußere Einwirkung im Phasenraum für verschiedene Lagen der beweglichen Masse $m = m_0/2$ auf einem X-Y-Schreiber (oben links: m befindet sich außerhalb der Kusppe, oben rechts, unten links und unten rechts: m befindet sich an verschiedenen Stellen innerhalb der Kusppe [14].

Im Einzelnen können aus den Beobachtungen von Schwingungen der Gravitationskatastrophenmaschine folgende Feststellungen getroffen werden, wenn dazu die Maschine zuerst manuell ausgelenkt und dann aus einer bestimmten Lage heraus frei gegeben wird:

1. Abhängig von der Lage der beweglichen Masse entstehen Schwingungen, die nur sehr geringfügig gedämpft sind. Die Zeit zwischen zwei Extremlagen der Schwingung ändert sich im Verlauf der Zeit mehr oder weniger stark. Es kann sich also nicht um klassische harmonische Schwingungen handeln, weil hier die Schwingungszeit unabhängig von der Amplitude eine feste Größe aufweist. Man nennt solche Schwingungen anharmonisch.
2. Wenn m außerhalb der Symmetrieachse der Parabel liegt, wird die Schwingung zunehmend asymmetrisch. Auch dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass hier keine sinusförmige Schwingung vorliegt, sondern eine nichtklassische anharmonische Schwingung beobachtet werden kann.

14 Hein, O.: Entwicklung eines Gerätes zur Messung und Darstellung charakteristischer Größen von Rotationsbewegungen und seine Anwendung bei grundlegenden Experimenten, Uni des Saarlandes, Saarbrücken, 1987.

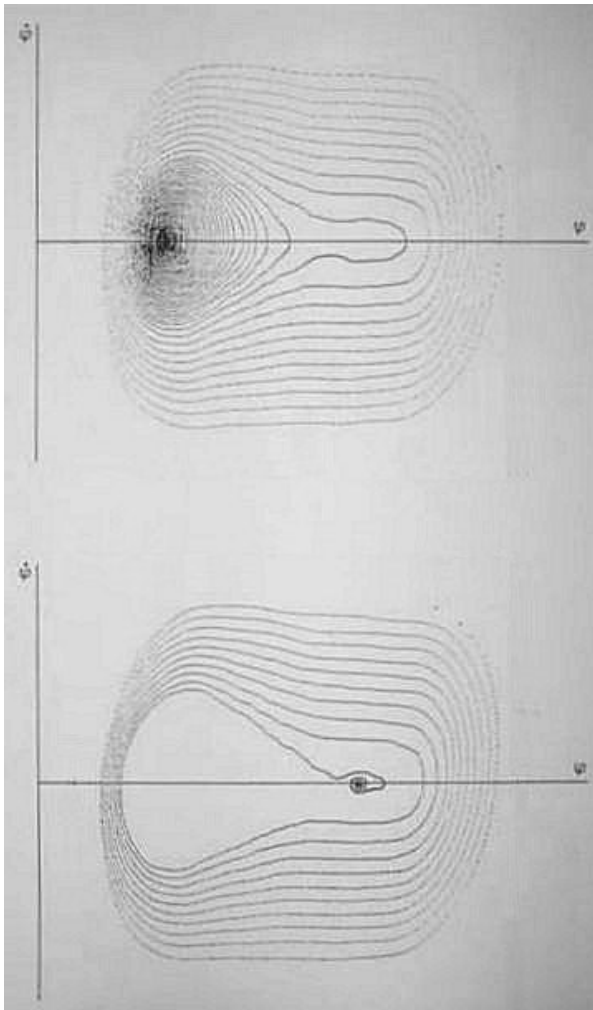


Abb. 12: Darstellungen von Messwerten der Bewegung eines Punktes der Gravitationskatastrophenmaschine ohne äußere Einwirkung im Phasenraum bei fester Lage der beweglichen Masse $m = m_0/2$ innerhalb der Kuppe und möglichst gleichen Anfangsbedingungen mit einem X-Y-Schreiber. [14].

3. Wenn man sich innerhalb der Kuppe befindet und die anfängliche Schwingungsamplitude genügend groß ist, kommt es nach einer gewissen Zeit zu einem spontanen Umschlag der Schwingungsform, wobei die gesamte Schwingungsweite und die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Extremlagen merklich verkleinert wird (Einfang in einem der beiden Potentialtäler).

4. Im Grenzfall der in 3. genannten Situation kann die Maschine in zwei verschiedenen Lagen zur Ruhe kommen (2 stabile Gleichgewichtspunkte). Bei möglichst identischer Ausgangssituation kann dabei praktisch nicht mehr vorausgesagt werden, in welchem der beiden Grenz- oder Fixpunkte das System zur Ruhe kommt. Ein typisches Beispiel für eine solche Situation ist in Abb. 12 zu erkennen.

5. Qualitativ kann insgesamt der aktuelle Potentialverlauf abgeschätzt werden, indem die Höhe der Masse m über der Glasplatte beobachtet wird. Auf diese Weise kann recht anschaulich eine Beziehung zwischen dem Potentialverlauf und der Bewegung des Massenpunktes hergestellt werden (s. Kap. 1.2.).

6. In sehr seltenen Fällen kann es bei bestimmten Vorgaben der Anfangsbedingungen und, obwohl zwei stabile Gleichgewichtspunkte vorliegen, dazu kommen, dass der Grenzpunkt der Bewegung im instabilen Gleichgewichtspunkt liegt (s. Kap. 4.3.: Gruppe 6, Videoclip GR_OIH04.divx). Bei der realisierten Katastrophenmaschine wird dieser Fall dadurch wahrscheinlicher, dass das

Fräsen der Parabel in der praktischen Ausführung durch die Approximation der Parabel durch sehr kleine Geradenstücke erfolgte. Bei genauer Beobachtung des genannten Videoclips ist dieser Sachverhalt daran zu erkennen, dass zum Schluß noch sehr kleine Schwingungen um den instabilen Grenzpunkt herum festzustellen sind..

Bei der zweiten Gruppe von Experimenten ist zuerst einmal das Problem zu klären, welche Anordnung der äußeren Magnete optimale experimentelle Möglichkeiten eröffnet. Ursprünglich war geplant, den Beschleunigungsdipol der Gravitationskatastrophenmaschine in der Mitte von entsprechend großen Helmholtzspulen anzuordnen, wie sie von verschiedenen Lehrmittelfirmen angeboten werden, und diese mit einer steuerbaren Stromquelle zu betreiben. Dadurch wäre in etwa eine harmonische Anregung der Maschine möglich geworden, weil keine Verstärkung des Feldes durch Eisenkerne nötig gewesen wäre und das in der Mitte der Spulen erzeugte Magnetfeld über einen größeren Raumbereich homogen ist. Leider waren die damit erzeugbaren Drehmomente auf die Maschine bei den maximal zur Verfügung stehenden Strömen von etwa 2 A zu gering, um die gewünschten Effekte zu erzeugen. Daher wurden

stattdessen zwei Spulen (je 500 Windungen) mit Eisenkern symmetrisch zur Symmetrieachse der Parabel auf einem verstellbaren Tisch in der Höhe des Beschleunigungsdipols so aufgestellt, wie es in der Abb. 13 dargestellt ist. Die Spulen wurden so in Serie geschaltet, dass die vorderen Seiten der Eisenkerne unterschiedliche Polarität aufweisen. Sie werden an eine Stromquelle (maximal 2 A) angeschlossen, die durch einen Frequenzgenerator mit einstellbarer Frequenz, Spannungsamplitude und Frequenzform gesteuert wird. Auf diese Weise kann das auf die Parabel einwirkende Drehmoment in weiten Grenzen verändert werden und ist näherungsweise der Spannung am Frequenzgenerator proportional. Die örtliche Struktur des einwirkenden Magnetfeldes kann über den Abstand der Vorderseiten der Eisenkerne von der Parabel und durch ihren gegenseitigen Abstand verändert werden.

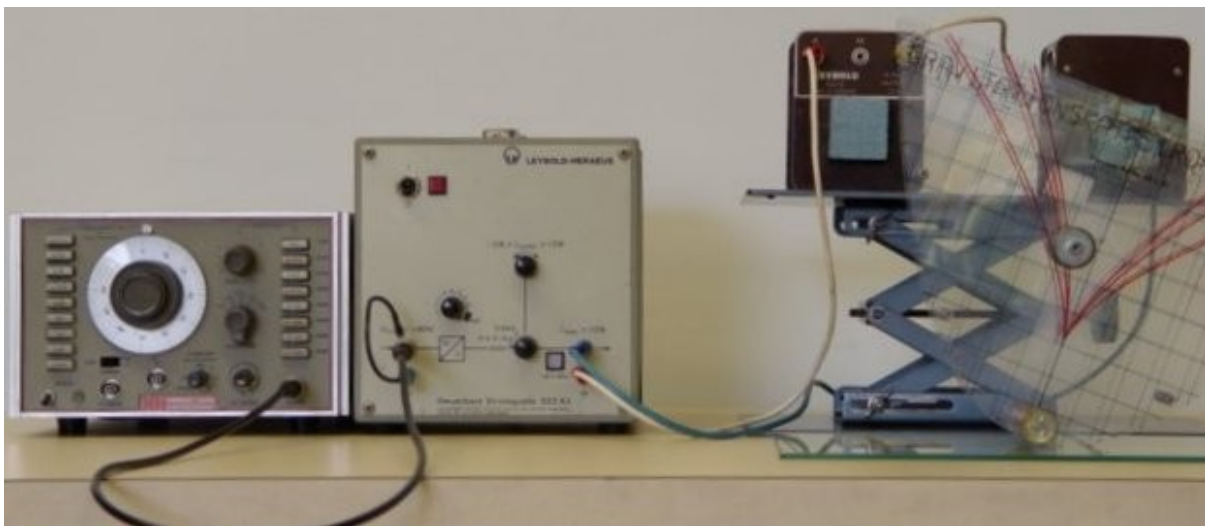


Abb. 13: Aufbau der äußeren magnetischen Anregung der Gravitationskatastrophenmaschine (von links nach rechts: Frequenzgenerator mit einstellbarer Frequenz, Gleich- und Wechselspannungsamplitude und Kurvenform, steuerbare Stromquelle (maximal 2 A) mit Überlastanzeige und in drei Schritten einstellbarer Verstärkung (z. B. 0,4 A/V), zwei in Serie geschaltete Spulen (je 500 Windungen) mit geblättertem Eisenkern auf verstellbarem Tisch aus Aluminium, Gravitationskatastrophenmaschine mit Beschleunigungsdipol auf Glasplatte).

Das charakteristische Verhalten der Gravitationskatastrophenmaschine bei äußerer Anregung (Frequenzbereich 0,1 bis 1 Hz) kann als Demonstrationsversuch oder mit Hilfe der in der Anlage beigefügten Videoclips (s. Kap. 4.3) untersucht werden. Es können völlig regelloses Verhalten (deterministisches chaotisches Verhalten) und teilweise regelmäßige Bewegungen mit von der Erregerfrequenz abweichenden Frequenzen (subharmonische Bifurkationen) beobachtet werden. Natürlich sind hier im wesentlichen nur qualitative Feststellungen möglich und sinnvoll. Daher eignet sich diese Versuchsgruppe nur als Vorstufe für Experimente, bei denen Messungen besser und genauer durchgeführt werden können [5].

4. Medien und Verweise auf die Anlagen zu dieser Arbeit

4.1. Literatur und Computerprogramme

1. Arnold, V. I.: Catastrophe Theory. Springer, Berlin, 1986, 3. Aufl. 2004.
2. Saunders, H. G.: Katastrophentheorie – Einführung für Naturwissenschaftler. Vieweg, Braunschweig, 1986.
3. Arnold, V. I.: Huygens and Barrow, Newton and Hooke – Pioneers in Mathematical Analysis and Catastrophe Theory. Birkhäuser, Basel, 1990.
4. Arnold, V. I. (Ed.): Dynamical Systems V – Bifurcation and Catastrophe Theory. Springer, Berlin, 1994.
5. Patt, H.-J.: Das klassische Pohl'sche Drehpendel als harmonischer Oszillator (Rotator) und seine Verände-

- rung zum anharmonischen Oszillator (Rotator). Electr. Media Publ., 39 S., Univ. des Saarlandes, Saarbrücken, 2005, (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).
6. Patt, H.-J.: Realisierung und Eigenschaften einer Zeeman'schen Katastrophenmaschine und exemplarische Demonstrationsexperimente in nichtlinearen periodischen Potentialen. Electr. Media Publ., erscheint 2006, Univ. des Saarlandes, Saarbrücken (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).
 7. Patt, H.-J.: COSIMEX für Windows - C-Computerunterstütztes SIMulieren und EXperimentieren - 1. Simulation von Systemmodellen, 2. Vergleich mit Systemmessgrößen. Version 4 für Windows 3.1x, 9.x, NT, ME, XP, ©-1995/2005: TeachPhysics, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).
 8. Zeeman, E. Chr.: Selected Papers 1972-1977. Addison-Wesley Publ., Reading, 1977.
 9. Thompson, J. M. T.: Experiments in Catastrophe, *Nature*, **254**, 392-395 (1975).
 10. Stöcker, H. (Hrsg.): Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 3. Aufl., 1995.
 11. Conrad, H.-G.: Automatisierte Erfassung der Bahnkoordinaten von Massenpunkten bei ebenen Bewegungen mit Hilfe einer CCD-Fernsehkamera und mögliche Einsatzschwerpunkte bei Schulexperimenten. Univ. des Saarlandes, Saarbrücken, 1998.
 12. Conrad, H.-G. u. H.-J. Patt: Messung, Darstellung und Auswertung der Bahnkoordinaten eines Körpers bei ebenen Bewegungen mit Hilfe einer Videokamera und eines PCs. 90. Hauptversammlung der MNU, S.79, MNU Tagungsbericht, Saarbrücken, 1999.
 13. Lee, A.: VirtualDub – Windows - Programm, stabile Version 1.6.11, ©-1998-2005 (Free Software, GNU-Lizenz). <http://www.virtualdub.org/index>
 14. Hein, O.: Entwicklung eines Gerätes zur Messung und Darstellung charakteristischer Größen von Rotationsbewegungen und seine Anwendung bei grundlegenden Experimenten, Uni des Saarlandes, Saarbrücken, 1987.

4.2. Anlage „Cosimex-Parameter- und -Bilddateien“

In den im Text verwendeten Abbildungen, die mit dem Programm „COSIMEX für Windows“ [7] berechnet wurden, sind die Namen der dazu jeweils verwendeten Systemdateien in der Abbildungsunterschrift angegeben. Die Dateinamen haben dabei die Form „[U][O][B].PA[O]“. „U“ ist die Kurzform des Systemnamens „A“, der zur eindeutigen Kennzeichnung des untersuchten Systems festgelegt wird (Langform „A“: ein bis maximal 15 Zeichen, Kurzform „U“: ein bis maximal fünf der ersten Zeichen von A [Großbuchstaben, _], ' ' nur ab dem 2. Zeichen). „O“ gibt die Modellnummer des simulierten Systems an (O = 1 : Beschreibung durch explizite Funktionen (Relationen), O = 2 : Beschreibung durch Differenzengleichungen, O = 3 : Beschreibung durch Differentialgleichungen). „B“ ist eine laufende Nummer (B beginnt bei 0 und besitzt soviel Stellen, dass die Gesamtzahl der Zeichen des vorderen Dateinamens immer 8 beträgt), die unterschiedliche Berechnungen für das betrachtete System charakterisiert. Die Extension „PA[O]“ identifiziert die Datei als Cosimex-Systemdatei des Modells „O“. Auf diese Weise kann bereits aus dem Dateinamen memnotechnisch relativ leicht auf wichtige Systemgrößen geschlossen und so die Auswahl des gesuchten Datensatzes erleichtert werden. Wenn bei gleichem Namen die Datei die Extension „TXT“ besitzt, handelt es sich um eine Cosimex-Parameterdatei im „ASCII“-Format (maximal 74 Zeichen pro Zeile), die zum Betrachten oder Ausdrucken der benutzten Größen und Parameter der Simulation und eventuell der integrierten Messwerte verwendet werden kann. In gleicher Weise charakterisieren die Extensionen „JPG“ bzw. „BMP“ die zugehörigen Bilddateien mit den berechneten Graphen und eventuellen Messwerten. Alle verwendeten Dateien, deren Namen hier noch einmal zusammengefasst werden, sind in der Anlage zu dieser Arbeit in komprimierter Form beigelegt (**Anlage „Cosimex-Parameter- und -Bilddateien“** („zip“-Datei): „GRAV_PAR.ZIP“, **21 Cosimex-Systemdateien**).

1. Unterordner: „EPO_DRIT“, Systemname in Langform: „EP_DRITTER_ORD“ (Ortsabhängigkeit und Gleichgewichtspunkte der potentiellen Energie bei Polynomen dritter Ordnung): EP_DR100.PA1 (**1 Systemdatei**).
2. Unterordner: „EPO_KUSP“, Systemname in Langform: „EP_KUSPEN“ (Kuspenkurven der beiden Kontrollparameter für Potentiale in Form von Polynomen vierter Ordnung): EP_KU100.PA1, EP_KU101.PA1 (**2 Systemdateien**).
3. Unterordner: „EPO_VIER“, Systemname in Langform: „EP_VIERTER_ORD“ (Ortsabhängigkeit und Gleichgewichtspunkte der potentiellen Energie bei Polynomen vierter Ordnung): EP_VI100.PA1, EP_VI101.PA1 (**2 Systemdateien**).

4. Unterordner: „**GRA_EPMO**“, Systemname in Langform: „**GR_FUNKTIONEN**“ (Ortsabhängigkeit und Gleichgewichtspunkte der potentiellen Energie und des Drehmoments der Gravitationskatastrophenmaschine in Abhängigkeit von den beiden Kontrollparametern):

GR_FU103.PA1, GR_FU104.PA1, GR_FU105.PA1, GR_FU106.PA1, GR_FU107.PA1, GR_FU108.PA1, GR_FU109.PA1, GR_FU110.PA1, GR_FU111.PA1, GR_FU112.PA1, GR_FU113.PA1, GR_FU114.PA1, GR_FU115.PA1 (**13 Systemdateien**).

5. Unterordner: „**GRA_GEOM**“, Systemname in Langform: „**GR_FUNKTIONEN**“ (Kuspenkurven der Gravitationskatastrophenmaschine für die beiden Kontrollparameter):

GR_FU100.PA1, GR_KU101.PA1, GR_KU102.PA1 (**3 Systemdateien**).

4.3. Anlage „Videoclips Gravitationskatastrophenmaschine“

In der Anlage „**Videoclips Gravitationskatastrophenmaschine**“ zu dieser Arbeit sind verschiedene Videoaufzeichnungen von Experimenten mit der vorgestellten Gravitationskatastrophenmaschine und Aufnahmen von zwei Geysiren (**23 Videoclips**) in sieben geeigneten Gruppen zusammengefasst. Sie wurden mit einem Camcorder im „avi“-Format von Microsoft® (Auflösung [Pixel]: 720 x 576, 25 Bilder/s, $\Delta t = 40$ ms) aufgezeichnet und anschließend zur wesentlichen Verringerung ihrer Speichergröße in das „DivX“-Media-Format von DivX® umgewandelt. Zur Auswertung und zum Abspielen der Videos wird der DivX®-Codec Version 6.0 benötigt (Free Software: <http://www.divx.com>). In einem Vorspann und einem Nachspann sind jeweils für vier Sekunden die notwendigen Erläuterungen und Parameter zu sehen. Alle Videos können mit dem DivX-Player, Version 2.6, ©-2000-2005, DivX®-Networks (Free Software for Windows®-98/Me/XP, <http://www.divx.com>), dem Real-Standard-Player, Version 10.5, ©-1995-2004, Real Networks® (Free Software for Windows®-98/me/XP: <http://germany.real.com/player/?&src=ZG.de.idx.ZG.de.rp.rp.hd.def>), dem Windows-Media-Player, Version 10, ©-1996-2004, Microsoft® Corporation (Windows®-XP: <http://www.microsoft.com/downloads/details.aspx?displaylang=de&FamilyID=b446ae53-3759-40cf-80d5-cde4bbe07999>, dem Windows®-Media-Player, Version 9, ©-2003 for Windows®-98/Me/2000: <http://www.microsoft.com/downloads/details.aspx?FamilyID=e0175119-9a5b-44c3-b1de-9b2a9aa6cff6&displaylang=en>) oder dem bereits genannten Programm [13] abgespielt werden. Die DivX-Media-Format-Extension „divx“ kann bei vorhandenem DivX-Codec 6 problemlos in die Microsoft-Media-Format-Extension „avi“ umbenannt werden.

1. Gruppe „**GEYSIR_2X**“ (Ordnername): Instabilitäten in der Natur (Strokkur (Butterfass) Geysir auf Island, Wallenborner Geysir nahe Daun in der Eifel): GEYSIR01.divx (**1 Videoclips**).
2. Gruppe „**GRAV_MIH**“ (Ordnername): Gravitationskatastrophenmaschine (Bewegung mit magnetischer Anregung: 0,5 Hz, $m_0/m = 2$, m innerhalb der Kuppe, fast symmetrische Anordnung, $y_m = 10$ cm, $x_m = -0,2$ cm): GR_MIH01.divx, GR_MIH02.divx, GR_MIH03.divx, GR_MIH04.divx, GR_MIH05.divx (**5 Videoclips**).
3. Gruppe „**GRAV_MIL**“ (Ordnername): Gravitationskatastrophenmaschine (Bewegung mit magnetischer Anregung: 0,5 Hz, $m_0/m = 2$, m innerhalb der Kuppe, stark asymmetrische Anordnung, $y_m = 10$ cm, $x_m = -1,2$ cm) GR_MIL01.divx (**1 Videoclip**).
4. Gruppe „**GRAV_MIN**“ (Ordnername): Gravitationskatastrophenmaschine (Bewegung mit magnetischer Anregung: 0,5 Hz, $m_0/m = 2$, m innerhalb der Kuppe, fast symmetrische Anordnung, $y_m = 7,5$ cm, $x_m = +0,1$ cm): GR_MIN01.divx, GR_MIN02.divx, GR_MIN03.divx, GR_MIN04.divx, GR_MIN05.divx (**5 Videoclips**).
5. Gruppe „**GRAV_OAL**“ (Ordnername): Gravitationskatastrophenmaschine (Bewegung nach manueller Auslenkung ohne äußere magnetische Anregung, $m_0/m = 2$, m außerhalb der Kuppe, stark asymmetrische Anordnung, $y_m = 6$ cm, $x_m = -1,0$ cm): GR_OAL01.divx, GROAL02.divx (**2 Videoclips**).
6. Gruppe „**GRA_OIH**“ (Ordnername): Gravitationskatastrophenmaschine (Bewegung nach manueller Auslenkung ohne äußere magnetische Anregung, $m_0/m = 2$, m innerhalb der Kuppe, fast symmetrische Anordnung, $y_m = 10$ cm, $x_m = -0,2$ cm): GR_OIH01.divx, GR_OIH02.divx, GR_OIH03.divx, GR_OIH04.divx (Grenzpunkt im instabilen Gleichgewichtspunkt), GR_OIH05.divx (**5 Videoclips**).
7. Gruppe „**GRA_OIN**“ (Ordnername): Gravitationskatastrophenmaschine (Bewegung nach manueller Auslenkung ohne äußere magnetische Anregung, $m_0/m = 2$, m innerhalb der Kuppe, fast symmetrische Anordnung, $y_m = 7$ cm, $x_m = +0,1$ cm): GR_OIN01.divx, GR_OIN02.divx, GR_OIN03.divx, GR_OIN04.divx (**4 Videoclips**).