

Relativistisches Ray - Tracing auf dem Personalcomputer

Peter Nemeč und Hans-Josef Patt

Fachbereich 10 - Physik, Universität des Saarlandes, D-66041 Saarbrücken

1. Grundlegende Effekte und Phänomene beim "Sehen" schnellbewegter Körper

Um zu erkennen, daß das Problem der sichtbaren Erscheinung von schnellbewegten Körpern nicht einfach durch Anwendung der relativistischen Längenkontraktionsformel gelöst wird, bedarf es einer genauen Analyse der beiden folgenden unterschiedlichen Szenarien:

1. "Messen der Ausdehnung eines bewegten Körpers durch viele ruhende Beobachter mit synchronisierten Uhren zu einem bestimmten Zeitpunkt."
2. "Sehen bzw. Abbilden eines bewegten Körpers durch einen ruhenden Beobachter bzw. durch eine ruhende Kamera zu einem bestimmten Zeitpunkt."

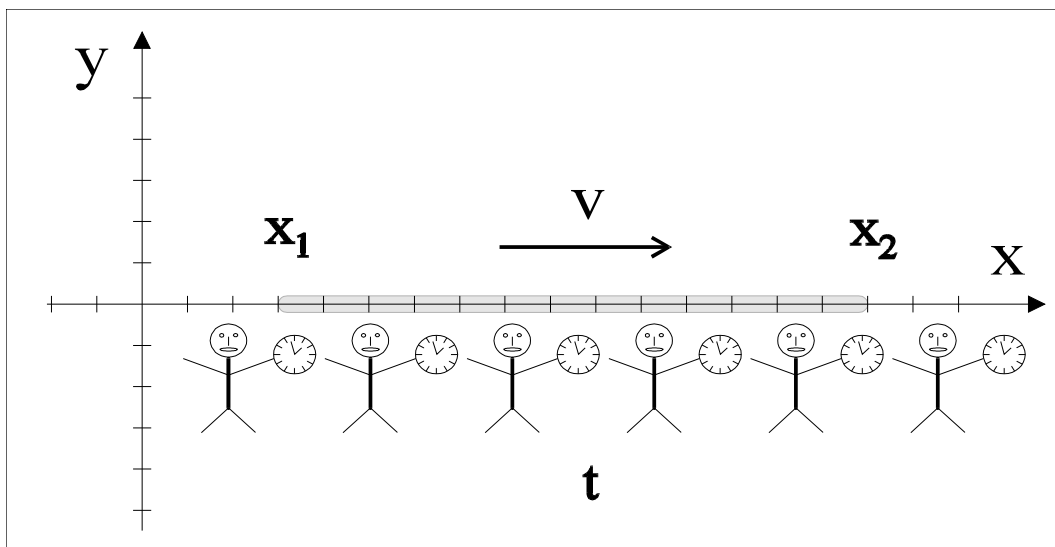


Abb.1: Prinzipskizze zur Herleitung der Formel für die relativistische Längenkontraktion durch viele ruhende Beobachter

Die erste Situation ist in Abb.1 dargestellt. Zur Vereinfachung wird dabei angenommen, daß es sich bei dem Körper um einen dünnen Stab handelt, der sich entlang der x-Achse mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt. Die ruhenden Beobachter sind entlang der x-Achse verteilt und haben vorher die Koordinaten ihres Standortes bestimmt. Jeder Beobachter hat an seinem Ort eine Uhr, die synchron mit allen anderen Uhren die Zeit im Beobachtersystem anzeigt. Zu einem verabredeten Zeitpunkt t stellen alle Beobachter fest, ob der Stab sich an ihrem Ort befindet. Die zwei Beobachter, die zu diesem Zeitpunkt gerade das vordere bzw. hintere Ende des Stabes feststellen, haben die Koordinaten x_2 bzw. x_1 . Die Länge des Stabes im Beobachtersystem l kann nun aus der Differenz dieser Koordinaten $l = x_2 - x_1$ bestimmt werden. Der Zusammenhang mit der Länge des Stabes in seinem Ruhesystem l_0 ergibt sich dabei mit Hilfe der Lorentztransformation zu

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

was zu der bekannten Formel für die relativistische Längenkontraktion führt, die formal mit der FitzGerald-Lorentz-Kontraktion übereinstimmt:

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Diese Beziehung wurde von A. Einstein [1] in seiner grundlegenden Arbeit zur speziellen Relativitätstheorie am Beispiel einer gleichförmig bewegten starren Kugel diskutiert, die von einem ruhenden Beobachter "betrachtet" als Rotationsellipsoid mit einer kontrahierten Hauptachse erscheinen sollte, wobei für $v \rightarrow c$ der Körper zu einer Kreisfläche schrumpfen sollte. Diese Aussage, die nur unter den oben geschilderten Beobachtungsbedingungen richtig ist, ließ viele Physiker bis Ende der fünfziger Jahre [2] irrtümlich glauben, daß ein ruhender Beobachter schnellbewegte Körper in Bewegungsrichtung stets um den genannten Faktor verkürzt "sehen" würde bzw. eine photographische Aufnahme [3] diese Verkürzung wiedergeben müßte, obwohl bereits 1924 der Ansatz zu einer modifizierten Betrachtung dieses Problems veröffentlicht worden war [4].

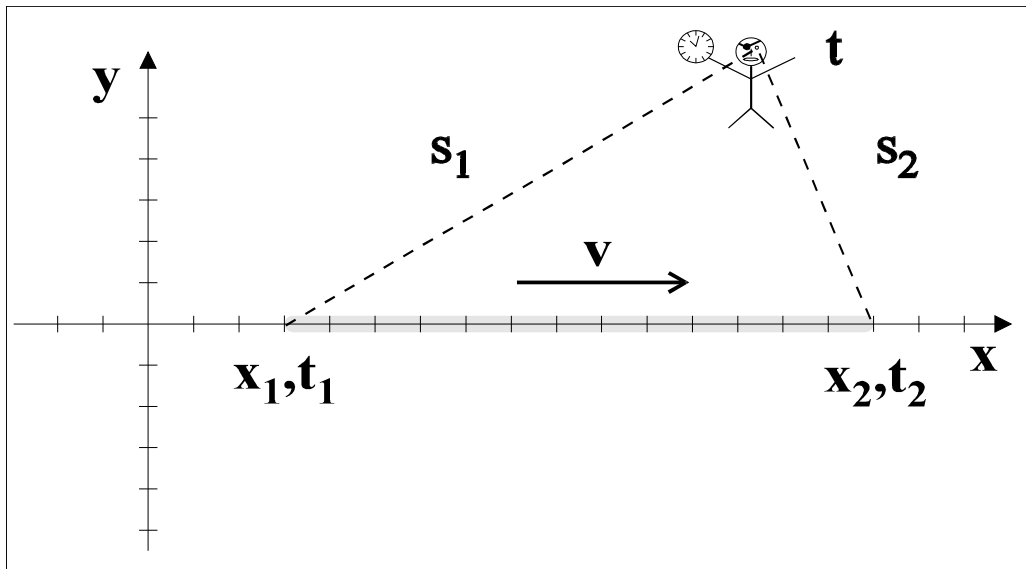


Abb.2: Prinzipialskizze zur Herleitung einer Formel für das "Sehen" eines bewegten Stabes durch einen ruhenden Beobachter

Die zweite Situation "Sehen bzw. Abbilden eines bewegten Körpers durch einen ruhenden Beobachter bzw. Kamera" soll nun mit Hilfe von Abb.2 erläutert werden. Dabei soll sich der ruhende Beobachter¹ bzw. die ruhende Kamera an einem Ort der x-y-Ebene befinden und den längs der x-Achse vorbeifliegenden Stab zu einem festgelegten Zeitpunkt t betrachten bzw. photographieren. Da das zum Zeitpunkt t vom vorderen bzw. hinteren Ende des Stabes eintreffende Licht die beiden i. a. ungleich langen Strecken s_2 bzw. s_1 mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c durchlaufen haben muß, ist das Licht dort auch i. a. zu verschiedenen Zeiten $t_2 = t - s_2/c$ und $t_1 = t - s_1/c$ ausgesandt worden. Da sich jetzt für die Koordinaten des hinteren bzw. vorderen Stabendes beim Einsetzen dieser Zeiten in die Lorentztransformation die zeitabhängigen Terme i. a. nicht

¹ Zur Vereinfachung der Überlegung soll der Beobachter die Situation zuerst einmal, ähnlich wie beim Photographieren mit einer Kamera (Lochkamera, Photoapparat, Fernsehkamera usw.), nur mit einem Auge betrachten. Der Ort des Beobachters bzw. der Kamera soll dabei durch die Pupillen- bzw. Blendenmitte festgelegt sein, wobei ihr Durchmesser als hinreichend klein angenommen wird. Wenn dann die Augennetzhaut bzw. die Bildebene als kleiner Ausschnitt aus einer Kugelfläche mit dem Beobachter- bzw. Kameraort als Kugelmittelpunkt angesehen werden kann, ist gewährleistet, daß alle zum Beobachtungszeitpunkt t durch die Blende aus verschiedenen Richtungen einfallenden Lichtbündel am Bildort sich bei optisch homogenem Medium im Auge bzw. Kamera nur um einen konstanten Betrag von t unterscheiden. Beim stereoskopischem Sehen entstehen natürlich zum Beobachtungszeitpunkt zwei Bilder, die zusätzlich zu den anderen Parametern durch den Augenabstand und die Blickwinkeldifferenz bestimmt sind.

mehr wegheben, unterscheidet sich dieses Experiment grundsätzlich vom vorherigen. Die relativistische Kontraktionsformel wird hierbei durch einen Zusatzterm in folgender Form modifiziert

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2} - \frac{v}{c} (s_2 - s_1)$$

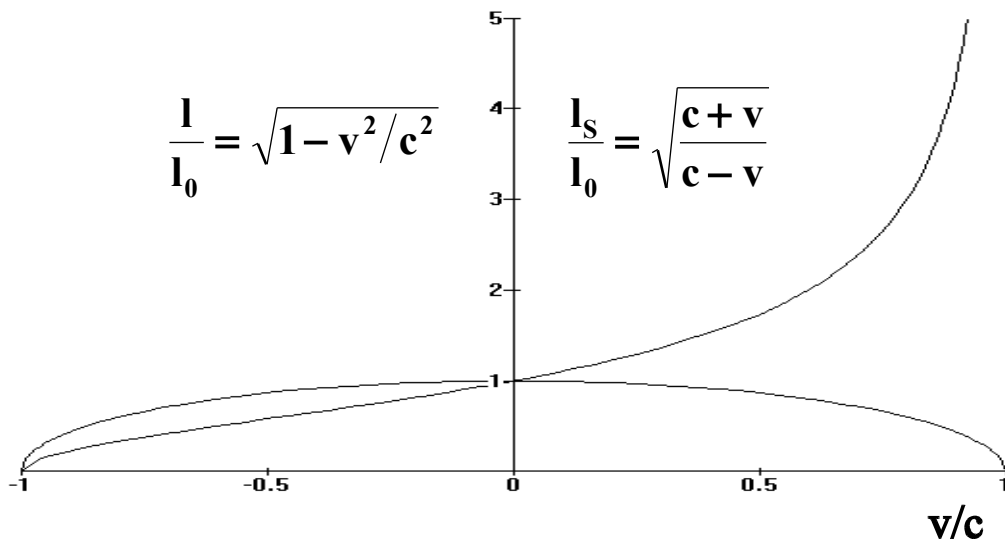


Abb.3: Vergleich zwischen der relativistischen Längenkontraktion l/l_0 und der Längenänderung beim Sehen eines Stabes l_s/l_0 für Beobachter in der Nähe der x-Achse

wobei dieser die Strecke angibt, die ein Punkt während der Laufzeitdifferenz der beiden genannten Lichtwellen mit der Geschwindigkeit v zurückgelegt hat. Da dieser Ausdruck besonders relevant wird, wenn der Beobachter in der Nähe der x-Achse steht, ist in Abb.3 für diesen Fall ($s_2 - s_1 \approx x_2 - x_1$) ein Vergleich der Längenänderungen für die beiden diskutierten Szenarien dargestellt. Wenn sich der Stab auf den Beobachter zu bewegt, sieht dieser den Stab nicht kontrahiert, sondern elongiert, wobei mit wachsendem v die Länge l_s/l_0 divergiert. Bewegt sich der Stab dagegen in umgekehrter Richtung, ist die Kontraktion stärker als im Falle der relativistischen Längenkontraktion. Damit ist hinreichend deutlich geworden, daß im allgemeinen Falle das Aussehen eines schnellbewegten Körpers - seine äußere Form und die Struktur seiner Oberfläche - sehr stark von der aktuellen Position des Beobachters und der Bewegungsrichtung des Objekts abhängt. Dieser Sachverhalt wird in der Fachliteratur ab etwa 1959 zuerst für Spezialfälle [5,6] und später generell [7,8,9,10,11,12] untersucht und gelöst. Dabei war sicher überraschend, daß im Gegensatz zu Einsteins Betrachtung eine Kugel immer nur mit kreisförmigem Rand gesehen werden kann, weil alle Randstrahlen gleiche Laufzeiten zum Auge des Beobachters besitzen, selbst wenn dabei die Kugeloberfläche extrem verzerrt wird.

Neben den die Form und Oberflächenstruktur der Körper beeinflussenden Gesetzmäßigkeiten sind beim "Sehen" zusätzlich alle Effekte von Bedeutung, die die Richtung, die Intensität und die spektrale Zusammensetzung der vom Betrachter wahrgenommenen Lichtbündel verändern. Diese ergeben sich unter der Voraussetzung, daß jeder Punkt eines Körpers bzw. einer Lichtquelle in seinem Ruhesystem eine monochromatische Kugelwelle mit isotroper Strahlstärke abstrahlt, aus dem relativistischen Additionstheorem für Geschwindigkeiten und der hieraus ableitbaren Formel für die Aberration eines Lichtbündels [13,14], dem Ausdruck für die richtungsabhängige Intensitätsänderung der betrachteten Kugelwelle im bewegten System [7,8,13] und dem relativistischen Dopplereffekt, der bekanntlich neben dem longitudinalen auch einen transversalen

Effekt [15,16] beinhaltet. Diese Formeln können ebenfalls dazu dienen, die Reflexion von Lichtbündeln an Spiegelflächen bzw. an Grenzflächen von durchsichtigen Körpern zu beschreiben, indem die Parameter des Lichtbündels in das Ruhesystem des Objekts transformiert, hier die bekannten Reflexions- und Brechungsgesetze unter Berücksichtigung der vorhandenen Absorption angewandt und dann die erhaltenen Parameter zurücktransformiert werden. Da es an dieser Stelle zu weit führen würde, alle genannten Effekte im einzelnen zu diskutieren, werden im folgenden nur noch einige Phänomene angegeben, die im Vergleich zum "normalen Sehen" zu unerwarteten Bildern führen.

Wenn von einem schnellbewegten Körper unter den genannten Bedingungen Licht ausgesandt wird, so erscheint dies für einen ruhenden Beobachter in Bewegungsrichtung fokussiert und in der umgekehrten Richtung geschwächt zu werden. Dieser Effekt, der unter modifizierten Bedingungen auch bei der Synchrotronstrahlung oder der Strahlung von Radiogalaxien zu beobachten ist, wirkt sich ähnlich wie eine Scheinwerferbeleuchtung des sich nähernden Körpers aus. In engem Zusammenhang mit der Intensitätsänderung steht die durch den relativistischen Dopplereffekt bewirkte Frequenzverschiebung des ausgesandten Lichts. In Bewegungsrichtung tritt ähnlich wie bei entsprechenden Schallwellen eine Frequenzerhöhung bzw. Blauverschiebung, in entgegengesetzter Richtung eine Frequenzminderung bzw. Rotverschiebung auf, wobei der Betrag der jeweiligen Verschiebung zusätzlich noch vom Beobachtungswinkel abhängt. Der transversale Dopplereffekt ist gegenüber dem longitudinalen von zweiter Ordnung und bewirkt eine Rotverschiebung. Sehr überraschend sind Phänomene, die durch die relativistische Aberrationsformel erklärt werden und die für den Fall auftreten können, daß der Winkel zwischen Beobachtungs- und Bewegungsrichtung kleine Werte annimmt oder sich geringfügig verändert. So ist es z. B. möglich, daß ein Beobachter, der sich nahe der Flugbahn eines auf ihn mit annähernd Lichtgeschwindigkeit zukommenden Körpers befindet, dessen Seitenflächen oder sogar seine Rückseite sieht.

2. Grundstruktur und Optionen des Programms "Relativistisches Ray Tracing"

Das entwickelte Computerprogramm wurde mit der didaktischen Zielsetzung geschrieben, alle grundlegenden Effekte, die im Zusammenhang mit der optischen Abbildung schnellbewegter Objekte auftreten, einzeln und in ihrem Zusammenwirken möglichst realistisch und ohne großen Zeitaufwand darstellen zu können. Dabei soll das Programm sowohl zum simulierten Experimentieren im Selbststudium als auch zur Demonstration und zur vergleichenden Betrachtung entsprechender Gesetzmäßigkeiten dienen. Als zweckmäßige und gleichzeitig preiswerte Hard- und Softwarebasis erwiesen sich PC's mit dem Betriebssystem Windows 3.xx oder 95, die mindestens mit einem 486-Prozessor oder einem 386-Prozessor mit Coprozessor und mit einem Bildschirm hoher Farbauflösung ausgestattet sind. Zur Bildgenerierung wird unter Berücksichtigung der notwendigen Modifikationen aus der speziellen Relativitätstheorie das aus der Computergraphik bekannte "Ray Tracing"-Verfahren [17] verwendet. Dabei wird der Weg des Lichtbündels, das einen entsprechenden Bildpunkt erzeugt, bis zu seinem Ursprungsort zurückverfolgt, um Farbe, Sättigung und Helligkeit dieses Pixels bestimmen zu können. Um die Rechenzeit ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit nicht unnötig zu verlängern, wurden für das Programm nur solche Situationen zugelassen, bei denen das Lichtbündel sich an Objekten nicht aufspaltet, so daß jeweils nur höchstens ein Lichtweg weiter verfolgt werden muß, bis dieser in einer Lichtquelle endet. Das im Programm verwendete Beobachtungsmodell ist in Abb.4 dargestellt, wobei die Überlegungen aus 1. zu berücksichtigen sind. Der Beobachter befindet sich an einem Ort, der wahlweise durch kartesische (X_b, Y_b, Z_b) oder Kugelkoordinaten (R_b, θ_b, ϕ_b) ([m] bzw. [°]) festgelegt werden kann, und schaut zum Koordinatennullpunkt. Dabei entsteht zum Beobachtungszeitpunkt T_b ([ns]) auf der

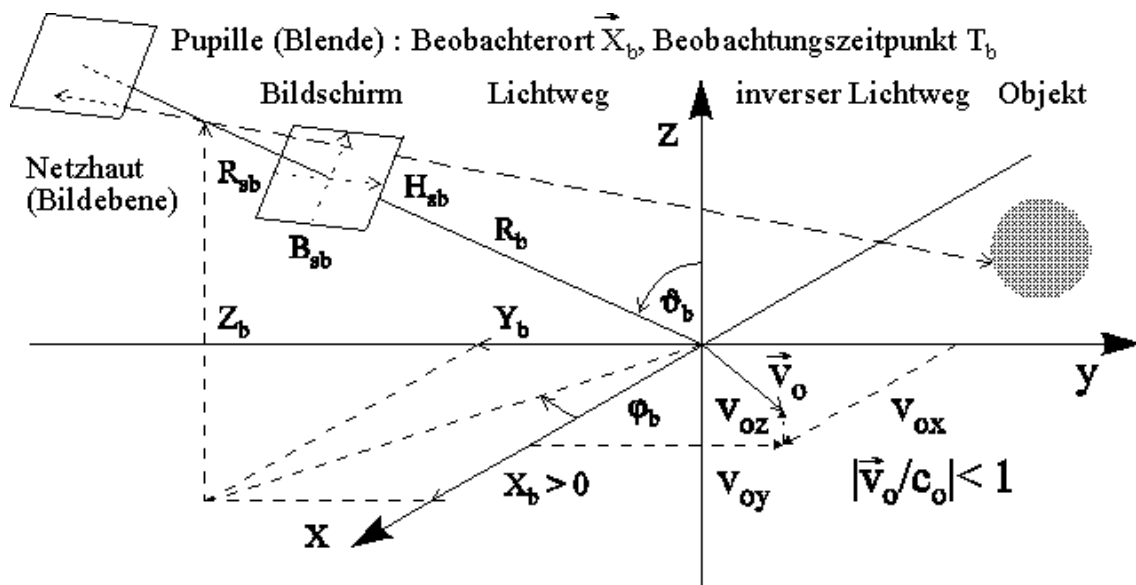


Abb.4: Übersicht über das Beobachtungsmodell für das "Relativistisches Ray Tracing"

Netzhaut des Auges ein Bild der Objekte in der Umgebung des Nullpunktes. Damit stattdessen durch Betrachtung des Computerbildschirms ein dazu identisches Bild entsteht, muß für alle Lichtbündel, die vom Beobachterort durch die Bildschirmpixel (Breite B_{sb} , Höhe H_{sb} , Beobachterabstand R_{sb}) hindurchgehen, das "relativistische Ray Tracing"-Verfahren angewandt werden. Als Voreinstellung für den Beobachtungszeitpunkt wird jeweils die Lichtlaufzeit vom Koordinatennullpunkt zum Beobachter (Latenzzeit) vorgegeben, weil zum Zeitnullpunkt die Koordinatennullpunkte von ruhendem und bewegtem System übereinstimmen sollen und daher dann Objekte in der Nähe der Koordinatenursprünge für den Beobachter sichtbar sind. Natürlich können auch andere Zeitpunkte gewählt werden. Der Vektor für die Relativgeschwindigkeit der Inertialsysteme kann im physikalisch möglichen Parameterbereich beliebig vorgegeben werden, so daß alle Phänomene untersucht werden können.

Im Sinne der genannten Zielsetzungen und Randbedingungen können grundsätzlich folgende Szenarien für die Bilderzeugung ausgewählt werden:

1. Selbstleuchtende Objekte ohne Fremdlicht,
2. von einer Punktlichtquelle beleuchtete Objekte ohne Eigenlicht.

In beiden Gruppen können dann sukzessive die diskutierten Grundeffekte eingeschaltet werden:

1. Nur Formänderungen der Objekte (Szenarium 2 mit Schatten),
2. mit Helligkeitsänderungen,
3. mit Helligkeitsänderungen und Dopplereffekt (im Eigensystem monochromatisches Licht mit einstellbarer Wellenlänge).

In allen Fällen können nun folgende Objektgruppen und Objekte zu einem Szene zusammengestellt werden:

1. Geometrisch einfache Flächen und Körper (Rechteck, Quader, Kugel, Zylinder, Doppelkegel, Torus), wobei alle Oberflächen farbig parkettiert sind,
2. metallische Spiegel (ebene Seiten- und Rückspiegel, Spiegelkugel und -zylinder) mit einem Reflexionsgrad von 92,3 % (20 Reflexionen reduzieren die Lichtintensität auf etwa 20 %),

3. durchsichtige Kugel mit eingebarem Brechungsindex und Absorptionskoeffizienten,
4. weiße bzw. monochromatische Punktlichtquelle mit variierbarer Strahlstärke.

Die räumliche Anordnung aller Objekte in ihrem Ruhesystem und ihr Bewegungszustand können beliebig und unabhängig voneinander festgelegt werden, wobei sich der Beobachter mit Ausnahme der durchsichtigen Kugel auch im Inneren der Objekte befinden kann. Das aus diesen Festlegungen berechnete Bild kann auf dem Bildschirm in voller Größe mit drei wählbaren Pixelauflösungen farbig oder in Graustufen sichtbar gemacht werden, wobei durch die Erzeugung eines kleinen Testbildes vorher eine Abschätzung der erforderlichen Rechenzeit möglich ist. Als Option kann weiter ein stereoskopisches Bild generiert werden, das mit Hilfe einer Rot-Grün- oder Rot-Blau-Brille betrachtet werden kann. Durch die vorgesehene Wahlmöglichkeit zur Erzeugung von 2, 4 oder 9 Bildern auf dem Monitor, kann die Abhängigkeit aller Effekte von den Parametern veranschaulicht und systematisch untersucht werden. Auf diese Weise können auch Videosequenzen aller genannten Phänomene zusammengestellt werden. In die berechneten Bilder lassen sich durch spezielle Programmfunktionen interessante Zusatzinformationen einblenden:

1. Durch Anklicken eines Bildpunktes werden die Wege erkennbar, die das entsprechende Lichtbündel zurückgelegt hat, wobei zusätzlich die getroffenen Objekte und die zugehörigen Treffzeitpunkte angegeben werden,
2. die Koordinatenachsen von Beobachter- und bewegtem System lassen sich sichtbar machen,
3. die Bahn der bewegten Lichtquelle kann angezeigt werden,
4. beim Vergleich können die variierten Parameterwerte in jedem Bild abgelesen werden.

Natürlich können alle Bildparameter in einer Datei bzw. das Bild in den Zwischenspeicher abgespeichert bzw. von dort wieder eingelesen werden. In das Programm ist eine Hilfsfunktion mit Index integriert. Leider können in dieser Arbeit die Farbbilder nicht reproduziert werden, die während des Vortrages und der Postersitzung gezeigt wurden (siehe Anlage).

Literatur

1. Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys. 17, 891, 1905.
2. Gamow, G.: Matter, Earth and Sky. 187, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1958.
3. Lorentz, H. A.: Lectures in Theoretical Physics. Vol. 3, 203, Macmillan, London, 1931.
4. Lampa, A.: Wie erscheint nach der Relativitätstheorie ein bewegter Stab einem ruhenden Beobachter. Z. Phys. 72, 138, 1924.
5. Penrose, R.: The Apparent Shape of a Relativistically Moving Sphere. Proc. Camb. Phil. Soc. 55, 137, 1959.
6. Weinstein, R.: Observation of Length by a Single Observer. Amer. J. Phys. 28, 607, 1960.
7. Terrell, J.: Invisibility of the Lorentz Contraction. Phys. Rev. 116, 1041, 1959.
8. Weisskopf, V. F.: The Visual Appearance of Rapidly Moving Objects. Phys. Today 13, 24, 1960.
9. Atwater, H. A.: Apparent Distortion of Relativistically Moving Objects. J. Opt. Soc. Amer. 52, 184, 1961.

10. Boas, Chr.: Apparent Shape of Large Objects at Relativistic Speeds. Amer. J. Phys. 29, 283, 1962.
11. Scott, G. D. a. M. R. Viner: The Geometrical Appearance of Large Objects Moving at Relativistic Speeds. Amer. J. Phys. 33, 534, 1965.
12. Scott, G. D. a. H. J. van Driel: Geometrical Appearance at Relativistic Speeds. Amer. J. Phys. 38, 971, 1970.
13. Greiner, W.: T. 1 Mechanik. Harri Deutsch, Frankfurt, 1989.
14. Landau, L. D. u. E. M. Lifschitz: Theoretische Physik. Bd. 2, Klassische Feldtheorie. Akademie, Berlin, 1976.
15. Jackson, J.: Klassische Elektrodynamik. de Gruyter, Berlin, 1993.
16. Ruder, H. u.M.: Die spezielle Relativitätstheorie. Vieweg, Braunschweig, 1993.
17. Glassner, A.: An Introduction to Ray Tracing. Academic Press, London, 1989.