

Experimente zur Untersuchung linearer und nichtlinearer elektrischer Serienschwingkreise

Burkhard Wolf, Hans-Josef Patt

Universität des Saarlandes, Experimentalphysik und Didaktik der Physik,
66041 Saarbrücken, Gebäude 8.2, <http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>

Kurzfassung

Unter der Vielzahl der Experimente zur nichtlinearen Physik eignet sich im Physikunterricht ganz besonders der nichtlineare elektrische Serienschwingkreis zur Demonstration charakteristischer Phänomene und Effekte. Den Schülern ist sein lineares Pendant in der Regel wohlvertraut. Daher überrascht es sie sehr, dass man durch geringe Modifikation oder Austausch nur eines Bauteils sein Verhalten grundlegend ändern kann. Auf diese Weise können dabei die wesentlichen Grundlagen solcher nichtlinearen Systeme besonders gut erarbeitet werden. Zur Unterstützung dieses Weges wurde ein Gerät entworfen, aufgebaut und erprobt, das nicht nur die quantitative Untersuchung solcher Schwingkreise vereinfacht bzw. die Möglichkeiten dabei erweitert, sondern auch die Demonstration und Veranschaulichung in entscheidender Weise qualitativ verbessert. Dazu wurden die charakteristischen Frequenzen, bei denen sich die Nichtlinearität bemerkbar macht, in den hörbaren Bereich [0,1 - 10 kHz] verlagert. So kommt zusätzlich zum Einsatz entsprechender elektrischer Messgeräte mit der Möglichkeit der optischen Darstellung auch noch die äußerst beeindruckende akustische Wahrnehmung der auftretenden Effekte hinzu.

1. Der elektrische Serienschwingkreis

Der lineare elektrische Serienschwingkreis besteht aus der Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R , einer Induktivität L und einer Kapazität C . Er soll von einer sinusförmigen Wechselspannung $U = \hat{U} \cos(\omega t)$ angeregt werden (Abb. 1).

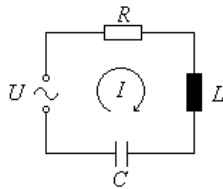


Abb. 1: Der verlustbehaftete Serienschwingkreis.

Dabei gelten für die einzelnen Bauteile die folgenden Beziehungen zwischen den elektrischen und magnetischen Größen:

ohmscher Widerstand	$U_R = RI$	
magnetischer Fluss in der Spule	$\Phi = LI$	(1)
Gesamtladung des Kondensators	$Q = CU$	

Da der Strom I in einem Leiter gleich der Ladungsmenge dQ ist, die in der Zeit dt durch seinen Querschnitt fließt, und da die Spannung an der Spule U_L gleich der zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses ist, erhält man mit Hilfe der Maschenregel

$$U = U_R + U_L + U_C \quad (2)$$

folgende lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, die den Schwingkreis aus Abb. 1 unter den genannten Idealisierungen eindeutig beschreibt:

$$\hat{U} \cos(\omega t) = L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C \quad (3)$$

Diese Gleichung besitzt die für eine mathematische Behandlung wesentliche Eigenschaft, dass das Superpositionsprinzip gültig ist und daher durch Addition zweier Lösungen eine weitere Lösung gewonnen werden kann. Um zu einem nichtlinearen Schwingkreis zu gelangen, der diese Eigenschaft im allgemeinen nicht mehr besitzt, muss mindestens ein Term der Differentialgleichung (3) durch einen nichtlinearen ersetzt werden [1], [3], [4]. Da die Gleichung (3) unter Verwendung der idealisierten linearen Beziehungen zwischen den elektrischen und magnetischen Größen aus (1) aufgestellt wurde, sieht man sofort, dass man Nichtlinearität nur erhalten kann, wenn der Schwingkreis mindestens ein nichtlineares Bauteil enthält. Für ein solches Element gelten dann nicht mehr die in (1) angegebenen Ausdrücke, sondern es treten an ihre Stelle die wesentlich allgemeineren Beziehungen [7]:

$$\begin{aligned} U_R &= f_1(I) \\ \Phi &= f_2(I) \\ Q &= f_3(U) \end{aligned} \quad (4)$$

Dabei können bei existierenden Bauteilen die Funktionen f_1 bis f_3 häufig nicht durch geschlossene analytische Ausdrücke angegeben werden, sondern liegen in Form von experimentell aufgenommenen Kurven oder Tabellen vor, den Kennlinien des betreffenden Bauelements. Betrachtet man z. B. eine Spule mit Eisenkern, so ist wegen der Hysterese des Kerns die Kennlinie nicht nur nichtlinear sondern sogar mehrdeutig. Dies erschwert die Behandlung solcher Schaltungen sehr. Ein ähnlicher Sachverhalt ergibt sich, wenn der ohmsche Widerstand durch einen der im Prinzip zahlreich vorhandenen, einfach zu beschaffenen nichtlinearen Widerstände ersetzt würde. Außerdem werden die charak-

teristischen nichtlinearen Effekte durch einen nichtlinearen Widerstand auf Grund der Energiedissipation und der Abhängigkeit des Widerstandswertes von der Temperatur teilweise unterdrückt, ähnlich übrigens wie durch eine zusätzlich der Eingangsspannung überlagerte geringfügige Rauschspannung. Aus diesem Grund werden nichtlineare Schwingkreise vorwiegend unter Verwendung spezieller nichtlinearer Kapazitäten realisiert, den Kapazitätsdioden. Bei diesen treten zum einen die nichtlinearen Eigenschaften besonders deutlich hervor, und zum anderen sind nur in geringem Maße Hystereseeffekte zu erwarten.

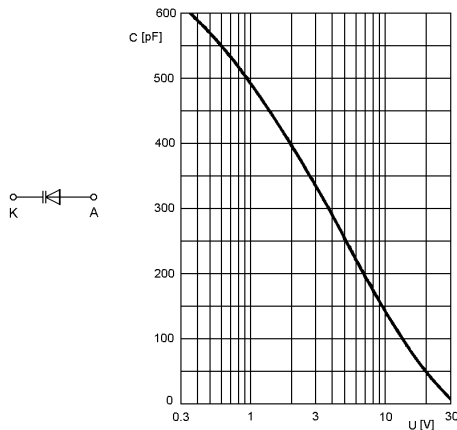


Abb. 2: Schaltzeichen und Kennlinie einer typischen Kapazitätsdiode (BB312 [9, 161]).

In der Literatur sind im Wesentlichen zwei verschiedene Modelle zur Beschreibung der Abhängigkeit der Kapazität von der Diodenspannung zu finden [5], [8], [10], auf die hier aber nicht näher eingegangen werden soll. Die sich aus numerischen Berechnungen ergebenden Lösungen sind bei beiden Modellen etwa gleich strukturiert und decken sich näherungsweise mit den experimentell gefundenen Ergebnissen [6]. Bei zweckmäßigen Voraussetzungen (Anregung des Schwingkreises nahe der Resonanzfrequenz und bei geringer Dämpfung) treten bei Erhöhung der Treiberamplitude \hat{U} sukzessive Periodenverdopplungen auf, d.h. die Responsefrequenz besteht nicht mehr nur aus der Anregungsfrequenz f_0 und den eventuell vorhandenen höheren Harmonischen, sondern es finden sich auch nacheinander die Subharmonischen $f_0/2$, $f_0/4$, $f_0/8$, .. im Frequenzspektrum wieder (subharmonische Bifurkationen). Bei weiterer Erhöhung der Amplitude \hat{U} verschwindet jegliche Harmonizität (chaotischer Bereich). Doch mitten im Chaos bilden sich schließlich wieder neue Strukturen (Intermittenzen), es entstehen periodische Fenster mit anderen Subharmonischen z. B. $f_0/3$, $f_0/5$, .. In etwa das gleiche Verhalten ist festzustellen, wenn bei genügend grosser Amplitude \hat{U} der Eingangsspannung deren Kreisfrequenz ω von kleinen zu größeren Werten oder umgekehrt durchgeföhren wird.

2. Zielsetzung und Aufbau des Gerätes

Zur Untersuchung des Verhaltens nichtlinearer elektrischer Serienschwingkreise wurde ein Gerät entwickelt,

das zum einen den Versuchsaufbau erleichtert, da es die zur Messung benötigten Komponenten schon enthält, und zum anderen die Demonstrationsmöglichkeiten entscheidend verbessert, indem es die Möglichkeit bietet, Schwingkreise mit einer niedrigen Resonanzfrequenz im hörbaren Bereich ($f_0 \approx 1$ kHz) zu realisieren, damit man das unten beschriebene Feigenbaumszenario (M. J. Feigenbaum, 1978) auch akustisch verfolgen kann.

Um Letzteres zu erreichen, benötigt man allerdings eine große Induktivität mit niedrigem Serienwiderstand, damit man eine hohe Kreisgüte erreicht und die nichtlinearen Effekte nicht von vornherein durch Dämpfung verschwinden. Da dies mit den üblichen Kupferspulen kaum zu realisieren ist, und die Verwendung eines Eisenkerns aufgrund der Hystereseeffekte ausgeschlossen ist, wurde eine große Induktivität mit niedrigem Innenwiderstand elektronisch simuliert. Dazu wird in dem entwickelten Gerät eine *Gyratorschaltung* verwendet. Als Gyrator bezeichnet man eine Transformationschaltung, mit der man beliebige Impedanzen in ihre dazu dualen umwandeln kann, also z.B. eine Induktivität in eine Kapazität oder umgekehrt.

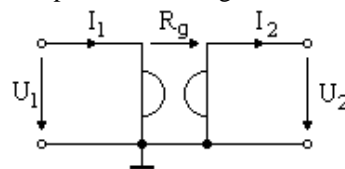


Abb. 3: Das Schaltsymbol des Gyrators [11, 383].

Betrachtet man Abb. 3, so ist also der Strom auf der einen Seite proportional zur Spannung auf der anderen Seite. Auf eine Herleitung der Übertragungsgleichungen soll an dieser Stelle verzichtet werden, da sie in der Literatur ausführlich beschrieben wird [11, 383]. Schließt man nun auf der einen Seite einen Kondensator der Kapazität C an, so ergibt sich aufgrund der Impedanzwandlung für die Größe L der simulierten Induktivität der Wert

$$L = R_g^2 C. \quad (5)$$

Um verschieden große Induktivitäten zu erhalten, kann mit einem Drehschalter zwischen verschiedenen Kondensatoren umgeschaltet werden. Auf diese Weise werden Werte der Induktivität von 0,1H bis 50H erreicht. Außerdem wurde die Gyratorschaltung dahingehend erweitert, dass auch der Innenwiderstand der simulierten Spule verändert werden kann. Dies ist nötig, da (5) aufgrund von Paarungstoleranzen der einzelnen Bauteile um einen Term erweitert werden muss, der einem simulierten Innenwiderstand äquivalent ist. Durch diese Modifikation ist der Serienwiderstand im Schwingkreis gezielt beeinflussbar. Dabei kann außerdem eine hohe Kreisgüte erzielt werden ($Q > 50$).

Neben der genannten Funktion sind zusätzlich noch einige Messschaltungen in das Gerät integriert, die verschiedene Darstellungsweisen des nichtlinearen Verhaltens ermöglichen: Zeitabhängigkeit der Spannung an

der Diode $U_D(t)$ und des Stromes $I(t)$ im Schwingkreis, Phasenportraits im Spannungs - Strom - Raum $U_D - I$ sowie diskrete Stroboskopbilder $\hat{U}_D(\hat{U})$ (Bifurkationsdiagramme). Dazu werden zum einen zwei Differenzverstärker benutzt, die sowohl die Spannungen an den einzelnen Bauteilen als auch den Strom durch den Schwingkreis erdfrei zu messen gestatten, ohne dabei das Verhalten des Systems wesentlich zu beeinflussen. Zum anderen wurde eine Schaltung entworfen und realisiert, die es ermöglicht, synchron mit der Frequenz der Eingangsspannung immer nur die Maxima der Diodenspannung zu messen. Diese phasenschiebbare, stroboskopische Spannungsmessung wurde unter Verwendung eines Sample & Hold - Bausteins realisiert, der von einer speziellen Schaltung, basierend auf den frequenzvervielfachenden Eigenschaften eines PLL - Bauelements angesteuert wird.

3. Verwendete Experimentiergeräte

Zur Durchführung der Experimente wurden neben dem speziell für diese Versuche gebauten Gerät Spusi50 folgende, am Lehrstuhl zur Verfügung stehende Geräte verwendet:

- Frequenzgenerator mit einstellbarer und wobbelbarer Amplituden- bzw. Frequenzmodulation,
- digitales Frequenzmessgerät,
- Speicheroszilloskop (mit zusätzlichem Interface zur Übertragung der gespeicherten Daten an einen angeschlossenen PC),
- Oszilloskop mit nachleuchtendem Schirm,
- Audioverstärker mit angeschlossenem Lautsprecher,
- Digitalmultimeter,
- PC mit Sound- und Zusatzkarte.

Der Schwingkreis wurde auf einer Experimentierplatte aufgebaut. Dabei wurde als Serienwiderstand der im Gerät Spusi50 eingebaute Widerstand zur Strommessung von 50Ω bzw. $1 \text{ k}\Omega$ benutzt. Die Spule wurde durch den Gyrator simuliert und als nichtlineare Kapazität wurden zunächst verschiedene Dioden verwendet, zu denen jeweils ein Drehkondensator mit einer Kapazität von $10 - 530 \text{ pF}$ parallel geschaltet war:

- Kapazitätsdioden BB110G, BB109, BB312,
- Gleichrichterioden 1N4005, 1N4006, 1N5407.

Dabei wurde festgestellt, dass die Unterschiede im nichtlinearen Verhalten jeweils nur minimal waren: Das gesuchte Verhalten konnte mit allen genannten Dioden beobachtet werden, lediglich die Amplituden, bei denen die einzelnen Periodenverdopplungen auftraten, unterschieden sich geringfügig voneinander.

Der Strom im Schwingkreis wurde jeweils mit einem der eingebauten Differenzverstärker direkt über den Spannungsabfall am Serienwiderstand gemessen, während die nichtlineare Antwort des Schwingkreises auf die Treiberspannung mit dem anderen Differenzverstärker an der jeweils eingesetzten Diode abgegriffen wurde. Dessen Ausgang lag dabei parallel am Oszilloskop und am Audioverstärker an.

Der Bifurkationsparameter war bei allen Versuchen die Amplitude \hat{U} der Erregerfrequenz. Es wurde zwar auch bei Änderungen der Frequenz nichtlineares Verhalten gefunden, aber gerade bei der Demonstration der Periodenverdopplungen ist es ein wenig irritierend, wenn sich zusätzlich zu den neu hinzukommenden Frequenzen auch noch die Grundfrequenz ändert. Die Wahl der Amplitude als Bifurkationsparameter bringt deshalb keine Nachteile, sondern nur Vorteile mit sich.

Bei allen Versuchen wurde eine Induktivität von 10 H eingestellt, da mit diesem Wert die besten Ergebnisse erzielt werden konnten und gerade hier sich eine für die akustische Wahrnehmung sehr geeignete Resonanzfrequenz von etwa 1100 Hz ergibt.

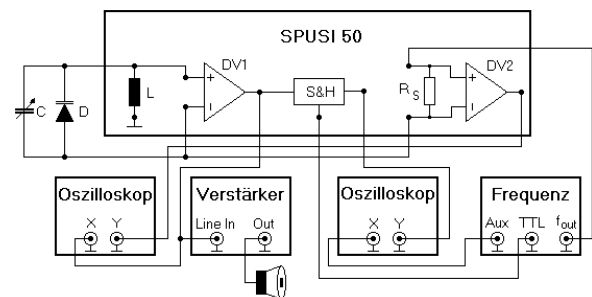


Abb. 4: Übersicht über den verwendeten Versuchsaufbau des Schwingkreises mit nichtlinearer Kapazität.

Der Versuchsaufbau ist schematisch in Abb. 4 zu sehen. Der Drehkondensator dient dabei dem Auffinden der Resonanzfrequenz des Schwingkreises. Dazu entfernt man zuerst die Diode und stellt den Drehkondensator auf seinen maximalen Kapazitätswert von $C = 530 \text{ pF}$ ein. Es ergibt sich dabei eine Resonanzfrequenz von etwa 1400 Hz . Anschließend setzt man die Diode in den Schwingkreis ein und verkleinert die Kapazität des Drehkondensators soweit wie möglich. Am Oszilloskop kann man dabei leicht verfolgen, dass die Spannung an der Diode aufgrund der Gleichrichtereigenschaften nicht mehr sinusförmig ist. Liegt jetzt schon eine Periodenverdopplung oder gar Chaos vor, so kann man dieses Phänomen aufgrund der niedrigen Frequenzen sehr gut hören bzw. am Oszilloskop beobachten. Die Amplitude der Treiberspannung sollte nun soweit verkleinert werden, bis gerade wieder lineares Verhalten vorliegt, d. h. bis nur noch die Grundfrequenz zu hören ist. Findet man auch bei größeren Amplituden und verschiedenen Frequenzen ($1200 \text{ Hz} \pm 300 \text{ Hz}$) kein nichtlineares Verhalten, so ist vermutlich der Innenwiderstand der Spule zu groß. Dieser muss dann mit dem eingebauten Potentiometer so eingestellt werden,

dass bei minimaler Amplitude noch lineares Verhalten vorliegt, dass aber bei Amplitudenerhöhung schnell die erste Periodenverdopplung auftritt und auch chaotisches Verhalten beobachtet werden kann.

4. Spannung und Strom als Funktion der Zeit

Zunächst wurde nun die Amplitude der Erregerspannung manuell erhöht und die Spannung an der Diode auf dem Oszilloskop als Funktion der Zeit betrachtet. Dabei wurden vier Periodenverdopplungen beobachtet, bevor der chaotische Bereich begann, wobei die Periode 16 nur sehr schwer zu finden und zu stabilisieren war. Hierbei wurde außerdem die Erregerspannung über einen Tastkopf mit dem Teilungsfaktor 10 an den zweiten Eingang des Oszilloskops gelegt. So konnten jeweils die einzelnen Amplituden ermittelt werden, ab denen eine Periodenverdopplung auftrat.

Die Feigenbaumtheorie sagt aus, dass die sogenannte Heugabelbifurkationen bei allen nichtlinearen Systemen folgender Formel gehorchen:

$$\delta_i = \frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{\hat{U}_{i+2} - \hat{U}_{i+1}} \quad (6)$$

Dabei beschreibt \hat{U}_i die Amplitude der Erregerspannung, bei der die i -te Periodenverdopplung eintritt, und δ_i die Konvergenzrate, deren Grenzwert liefert nach der Feigenbaumtheorie die sogenannte Feigenbaumkonstante δ :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = \delta = 4,6692016\dots \quad (7)$$

In Tabelle 1 sind die Messergebnisse eingetragen, aus denen die Konvergenzrate berechnet wurde. Der Grenzwert δ_∞ kann natürlich so nicht bestimmt werden, da nicht genügend Periodenverdopplungen gemessen wurden, aber man kann sehr wohl erkennen, dass die Werte im Rahmen der Messgenauigkeit das erwartete Ergebnis liefern.

Anschließend wurde die Spannung weiter erhöht, um den chaotischen Bereich auf periodische Fenster zu untersuchen. Dabei war es eine sehr große Hilfe, die Responsefunktion der Diode über den Lautsprecher auch akustisch verfolgen zu können, da gerade so die Unterschiede im chaotischen Bereich wesentlich deutlicher zu erkennen waren als am Oszilloskopschirm allein. Man findet auf diese Weise wesentlich einfacher die weiteren Perioden, die oft nur in einem sehr kleinen Spannungsbereich stabil sind, sich aber kurz vorher schon durch verändertes Rauschen ankündigen. Man erhält teilweise auch kein stehendes Bild, da die Subharmonischen zum Teil, bedingt durch kleine Schwankungen der Versorgungsspannungen, oft äußerst instabil sind. Dann gelingt es jedoch über die Speicherfunktion des Oszilloskops, die auftretenden Frequenzen auf dem Schirm einzufrieren.

Subharmonische	$\Delta \hat{U}_{pp}$	δ_i
$f_0/2$	1,592	
$f_0/4$	0,355	4,48
$f_0/8$	0,077	4,61
$f_0/16$		

Tabelle 1: Messergebnisse für die Abschätzung der Konvergenzrate.

Auf der Suche nach Intermittenzen wurde mit Erfolg die Güte des Schwingkreises variiert. So wurden für verschiedene Serienwiderstände auch im Chaos entsprechende Bereiche mit periodischen Frequenzen gefunden, wie sie bereits Linsay [5] beschrieben hat. Insgesamt konnten so die Perioden 3, 5, 6, 7, 10 und 12 im chaotischen Bereich beobachtet werden. Hat man ein periodisches Fenster einmal gefunden, kann aber die Amplitude nicht optimal einstellen, so dass die Subharmonische nur schlecht beobachtet werden kann, hilft eventuell der Drehkondensator weiter. Erhöht man nämlich seine Kapazität, so fällt die nichtlineare Kennlinie der Diode weniger stark ins Gewicht, und man kann so das nichtlineare Verhalten gezielter abschwächen als mit der Treiberamplitude allein. Man wählt also im konkreten Falle eine etwas zu hohe Amplitude und vergrößert dann die Kapazität des Drehkondensators, um die Subharmonische besser beobachten zu können.

Sehr komfortabel war die Möglichkeit, den Speicher des Oszilloskops mit dem Computer auszulesen und so die Anzeige in einer Bilddatei zu speichern, anstatt den Oszilloskopschirm abzufotografieren. Die Spannung ist in Y-Richtung mit 1 V/Skt. aufgetragen, während der Maßstab der Zeitachse variiert: Bis zur Periode 5 beträgt er 1ms/Skt., ab der Periode 6 2 ms/Skt.. Die Abb. 5 bis 9 zeigen zunächst die einzelnen Periodenverdopplungen. Anschließend folgen in den Abb. 10 bis 15 die festgestellten Intermittenzen.



Abb. 5: Periode 1 im U - t - Raum: Spannung an der Diode und Erregerspannung (Y1: 0,5 V/Skt., Y2: 1 V/Skt., X: 1 ms/Skt.).

Legt man statt der Erregerspannung den Spannungsabfall am Serienwiderstand an den zweiten Kanal des Oszilloskops an, so kann man auch die zeitliche Entwicklung der Stromstärke verfolgen. Auch hier erkennt man deutlich die verschiedenen Perioden. Zum besse-

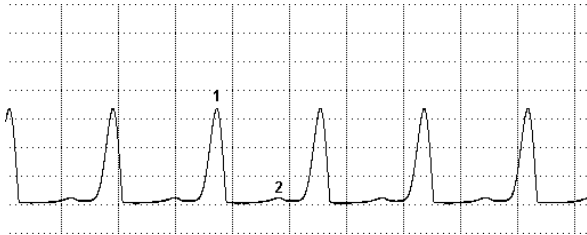


Abb. 6: Periode 2 im U - t - Raum (Y: 1 V/Skt., X: 1 ms/Skt.).

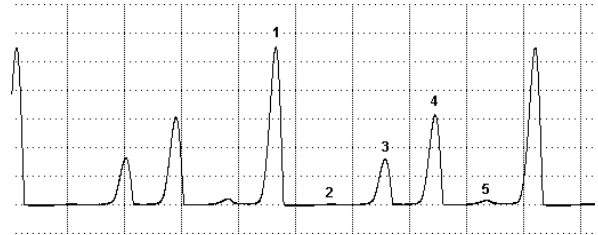


Abb. 11: Periode 5 im U - t - Raum (Y: 1 V/Skt., X: 1 ms/Skt.).

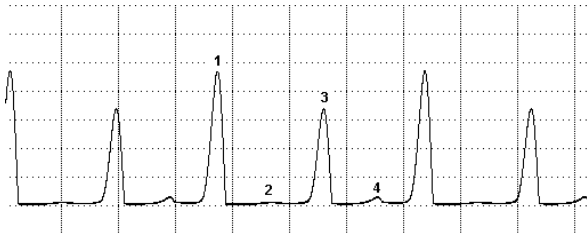


Abb. 7: Periode 4 im U - t - Raum (Y: 1 V/Skt., X: 1 ms/Skt.).

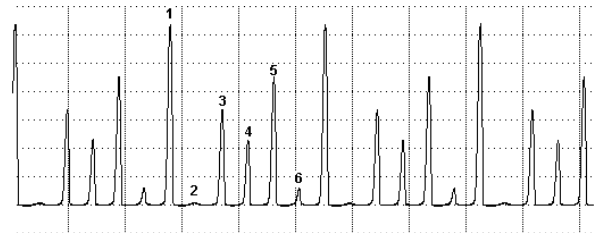


Abb. 12: Periode 6 im U - t - Raum (Y: 1 V/Skt., X: 2 ms/Skt.).

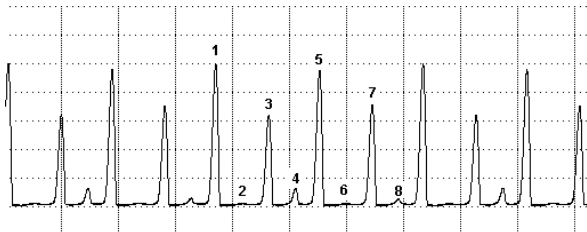


Abb. 8: Periode 8 im U - t - Raum (Y: 1 V/Skt., X: 2 ms/Skt.).



Abb. 13: Periode 7 im U - t - Raum (Y: 1 V/Skt., X: 2 ms/Skt.).

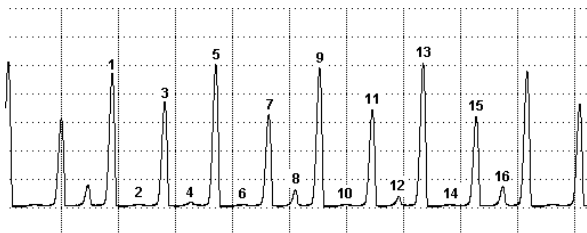


Abb. 9: Periode 16 im U - t - Raum (Y: 1 V/Skt., X: 2 ms/Skt.).

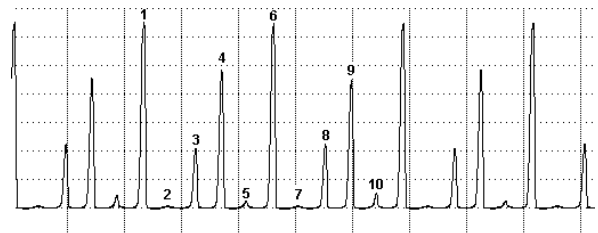


Abb. 14: Periode 10 im U - t - Raum (Y: 1 V/Skt., X: 2 ms/Skt.).

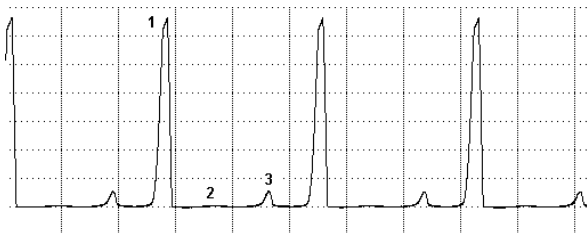


Abb. 10: Periode 3 im U - t - Raum (Y: 1 V/Skt., X: 1 ms/Skt.).

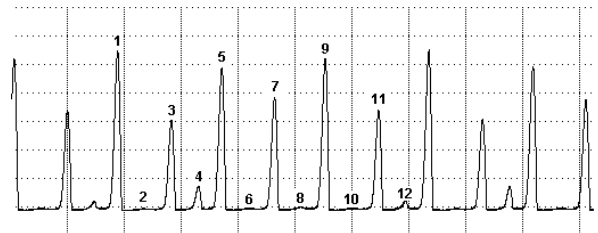


Abb. 15: Periode 12 im U - t - Raum (Y: 1 V/Skt., X: 2 ms/Skt.).

ren Vergleich ist in den Abbildungen nach oben die Spannung an der Diode und unten der Strom aufgetragen. Es werden hier nur die Perioden 1, 2, 4, 8 und 5 dargestellt (Abb. 16 bis 20), da die übrigen Subharmonischen prinzipiell das gleiche Verhalten zeigen.

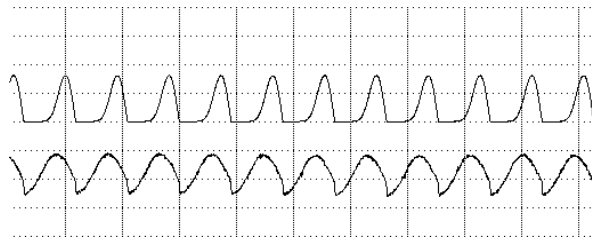


Abb. 16: Periode 1: $U_D(t)$ und $I(t)$ (Y1: 1 V/Skt., Y2: 20 mV/Skt., X: 1 ms/Skt.)

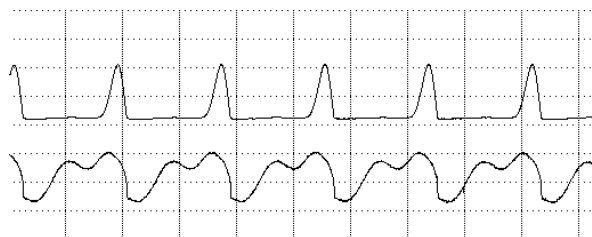


Abb. 17: Periode 2: $U_D(t)$ und $I(t)$ (Y1: 2 V/Skt., Y2: 40 mV/Skt., X: 1 ms/Skt.)



Abb. 18: Periode 4: $U_D(t)$ und $I(t)$ (Y1: 2 V/Skt., Y2: 40 mV/Skt., X: 1 ms/Skt.)

5. Der Phasenraum von Spannung und Strom

Eine weitere Möglichkeit zur Darstellung der nichtlinearen Effekte bietet der Phasenraum von Spannung und Strom. Legt man die Diodenspannung an den Y - Kanal des Oszilloskops und den Spannungsabfall am Serienwiderstand $R_S = 1000\Omega$, der proportional zum Strom ist, an den X - Kanal an (beides natürlich wieder unter Verwendung der Differenzverstärker) und erhöht dann wieder manuell die Amplitude der Erregerspannung, so kann man völlig andere Bilder beobachten. Es ergeben sich geschlossene Kurven oder unterschiedlich helle Flächen, wobei diese beim linearen elektrischen Schwingkreis Ellipsen, Kreisen oder Geraden entsprechen [6].

Ausgehend von einer Ellipse, deren untere Seite aufgrund der Gleichrichtereigenschaften der Diode abgeflacht ist, entsteht bei anwachsender Amplitude die erste Periodenverdopplung, die sich durch das Auftreten einer zweiten Windung innerhalb der ersten bemerkbar macht (Abb. 22). Dieser Vorgang setzt sich entsprechend weiter fort (Abb. 23 bis 27), bis schließlich

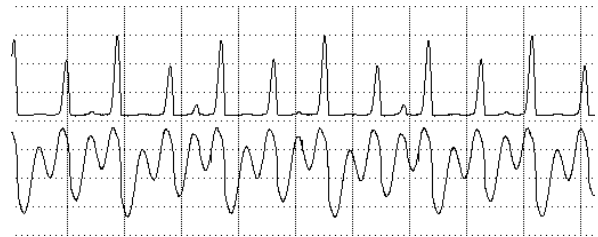


Abb. 19: Periode 8: $U_D(t)$ und $I(t)$ (Y1: 2 V/Skt., Y2: 40 mV/Skt., X: 1 ms/Skt.)

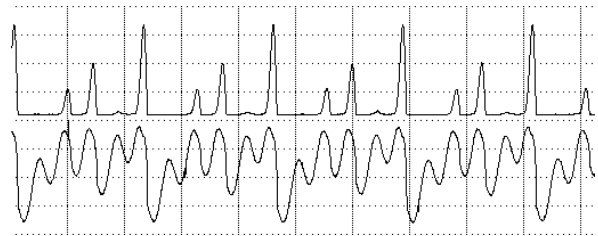


Abb. 20: Periode 5: $U_D(t)$ und $I(t)$ (Y1: 2 V/Skt., Y2: 40 mV/Skt., X: 1 ms/Skt.)

im Chaos keine einzelnen Kurven mehr zu unterscheiden sind bzw. eine Vielzahl sich in der Größe ändernder Windungen über den Schirm flimmern (Abb. 28).

Allerdings kann man mit Hilfe dieser Phasenraumportraits nicht so ohne weiteres entscheiden, um welche Periode es sich gerade handelt, denn oft haben die Kurven annähernd gleiche Größe und Form, so dass eine Unterscheidung schwer fällt. So scheint z. B. die Abb. 25 die Periode 4 anzuzeigen, in Wahrheit handelt es sich aber um die Periode 5.



Abb. 21: Periode 1 im U - I - Raum.

6. Die Aufnahme eines Bifurkationsdiagramms

Die Resonanzkurve des linearen elektrischen Schwingkreises beschreibt das Amplitudenverhältnis der Spannung am Kondensator im eingeschwungenen Zustand zur Amplitude der Eingangsspannung als Funktion der Erregerfrequenz. Bei nichtlinearen Schwingkreisen treten hierbei überhängende Resonanzkurven auf (Abb. 29). Bei diesen können gleichzeitig zwei verschiedene Amplituden bei einer Frequenz stabil sein, eine mit

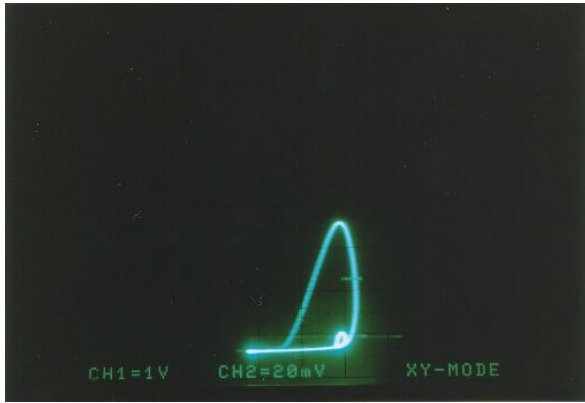


Abb. 22: Periode 2 im U - I - Raum.

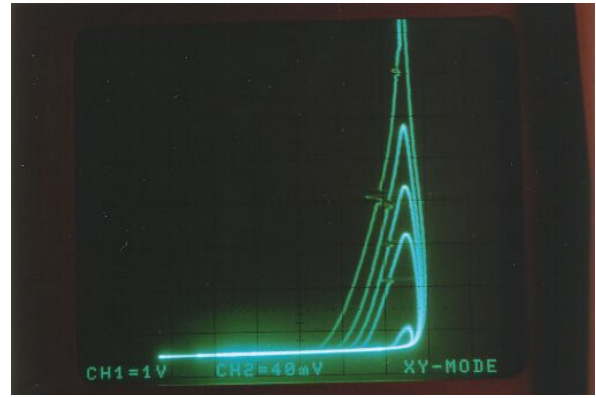


Abb. 26: Periode 6 im U - I - Raum.

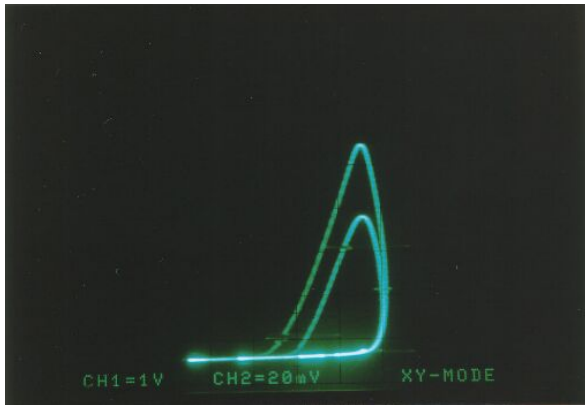


Abb. 23: Periode 4 im U - I - Raum.

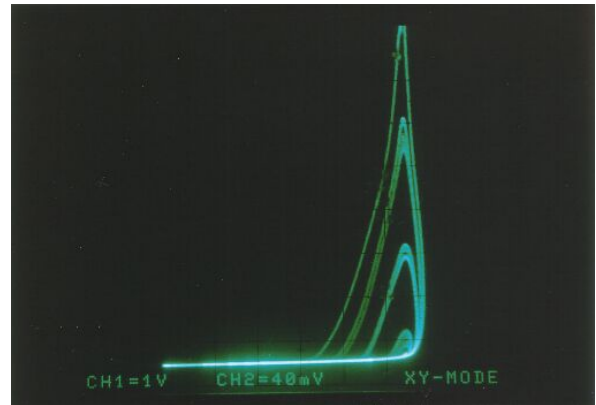


Abb. 27: Periode 10 im U - I - Raum.

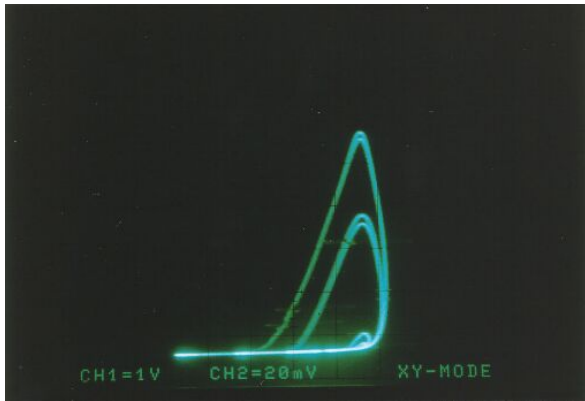


Abb. 24: Periode 8 im U - I - Raum.

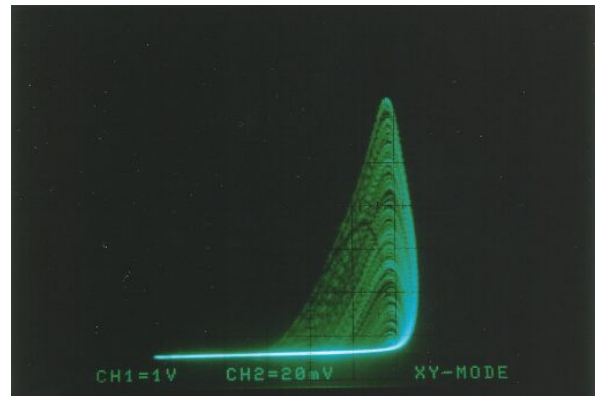


Abb. 28: Chaos im U - I - Raum.

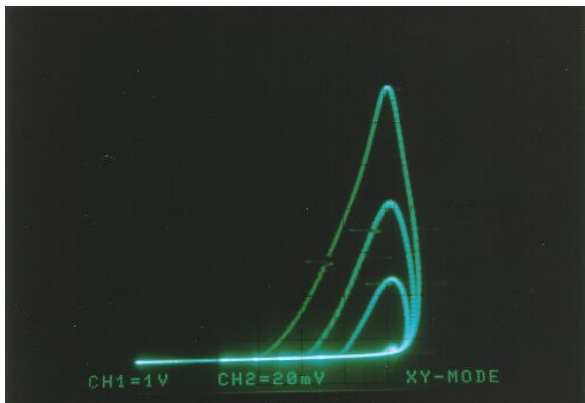


Abb. 25: Periode 5 im U - I - Raum.

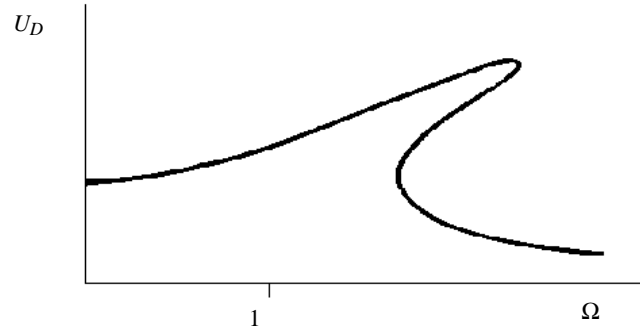


Abb. 29: Resonanzkurve eines nichtlinearen Schwingkreises [7, 341].

kleiner, und eine mit großer Amplitude. Welche Amplitude tatsächlich vorhanden ist und bei welcher Frequenz der Amplitudensprung erfolgt, hängt davon ab, ob die Frequenz langsam erhöht oder erniedrigt wird. Dabei kommt es in den kritischen Parameterbereichen zu entsprechenden Hystereseeffekten.

Bei noch größeren Anregungsamplituden treten darüber hinaus noch eine Vielzahl neuer Resonanzen auf. Dabei braucht die Periode der resultierenden Schwingung nicht mehr mit der der Anregung übereinzustimmen. Sie kann ein Vielfaches der Anregungsperiode betragen (subharmonische Schwingung) und offenbar gegen große Werte gehen (aperiodische Schwingungen, Chaos). Dieses Verhalten kann aber durch Resonanzkurven der üblichen Art nicht anschaulich dargestellt werden. Deshalb wurde der Begriff des Bifurkationsdiagramms entwickelt, das entlang einer eindeutig parametrisierten Kurve im Parameterraum die Schwingungen charakterisieren kann.

Bei diesem Versuch wird nun mit dem Frequenzgenerator automatisch die Amplitude der Erregerspannung verändert. Die Sample & Hold - Schaltung ermöglicht dann das Abtasten der Spannung an der Diode mit dem Zeitabstand einer Periodenlänge der Erregerfrequenz. Man kann nun ein Bifurkationsdiagramm aufnehmen, indem man die Amplitude der Modulationsspannung (Bifurkationsparameter) auf den X - Eingang des Oszilloskops gibt, und das Abtastsignal der Diodenspannung an den Y - Eingang anlegt.

Zu beachten ist bei diesem Versuch allerdings, dass die Wobelfrequenz nicht zu hoch sein darf, da sonst der Schwingkreis nicht genügend Zeit hat, in einen eingeschwungenen Zustand zu gelangen. Da die Einschwingdauer auch von der Anregungsfrequenz abhängig ist, muss die Modulationsfrequenz umso niedriger sein, je kleiner diese ist. Der Frequenzgenerator moduliert die Amplitude in Form einer ansteigenden Rampe, wobei die Dauer für einen Durchlauf auf etwa 20 - 30 s eingestellt wurde. Das Bifurkationsdiagramm wird nun während dieses Zeitraumes erstellt, wobei das Bild langsam von links nach rechts aufgebaut wird, ohne dass man ein stehendes Gesamtbild auf dem Oszilloskopschirm erkennen kann. Wenn der Schirm durch einen phosphoreszierenden Belag lange genug nachleuchtet, ist dagegen ein mehr oder weniger breiter, vertikaler Ausschnitt des Bildes zu beobachten. Da ein solches Oszilloskop in der Regel aber nicht an Schulen vorhanden ist, fotografiert man den Schirm besser mit einer Belichtungszeit, die der Laufzeit des Strahls für einen Durchlauf entspricht. Man erhält so durch Speicherung des Lichtes auf dem Film ein vollständiges Bifurkationsdiagramm, das die komplette Information enthält.

Auf dem Foto 32 erkennt man deutlich das beschriebene Feigenbaumscenario mit den Periodenverdopplungen, dem Chaos und der Intermittenz mit der Periode

6. Das Foto 30 zeigt ein ähnliches Verhalten, aber hier wurde bei einem anderen Serienwiderstand im Schwingkreis ein periodisches Fenster mit der Frequenz $f_0/5$ gefunden. Das Bifurkationsdiagramm mit Periode 5 entstand durch einen geringeren Widerstand im Schwingkreis, was man daran erkennen kann, dass hier das Chaos wesentlich ausgeprägter ist. Die beiden großen Äste der Bifurkation überschneiden sich auf dem Bild 30, während dies auf Bild 32 nicht zu beobachten ist. Dies liegt daran, dass man auf Grund des höheren Serienwiderstandes nicht so weit ins Chaos vordringen kann, da der Funktionsgenerator nicht beliebig hohe Spannungsamplituden zu liefern vermag. Besonders eindrucksvoll kann man den Unterschied im Chaos erkennen, wenn man während der Anzeige des Bifurkationsdiagramms das Geschehen akustisch verfolgt. Sobald nach den Periodenverdopplungen der chaotische Bereich beginnt, hört man ein Rauschen, das immer mehr zunimmt und nur während der Intermittenzen schwächer wird. Ab dem Zeitpunkt aber, zu dem sich die beiden großen Äste der Bifurkation schneiden, ist das Rauschen aber wesentlich stärker zu hören.

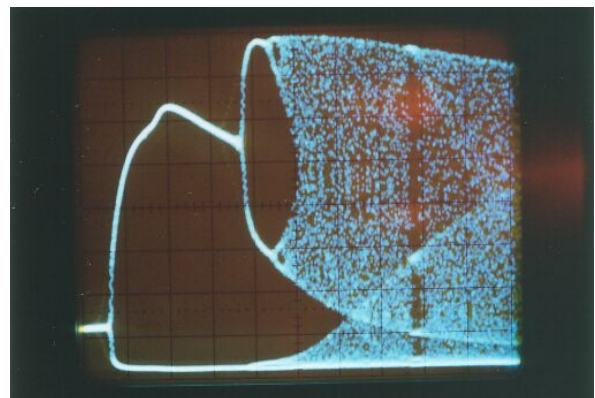


Abb. 30: Bifurkationsdiagramm bei Amplitudenmodulation, $f_0 = 1100\text{Hz}$, Intermittenz der Periode 5.

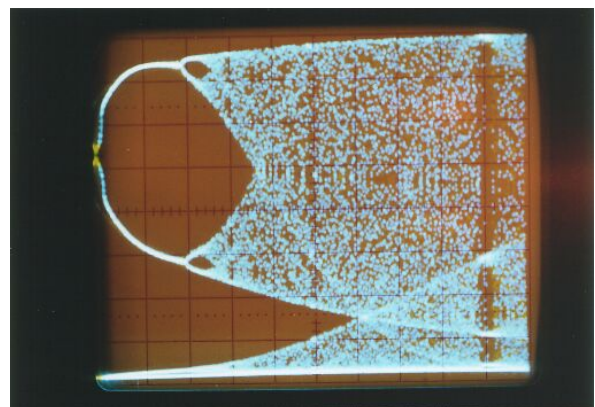


Abb. 31: Ausschnittsvergrößerung aus dem Bifurkationsdiagramm nach Abb. 30.

7. Das Frequenzspektrum der Responsefunktion

Zusätzlich zur Untersuchung des Spannungsabfalls an der Diode wurde auch noch das Frequenzspektrum der nichtlinearen Responsefunktion der Diode untersucht.

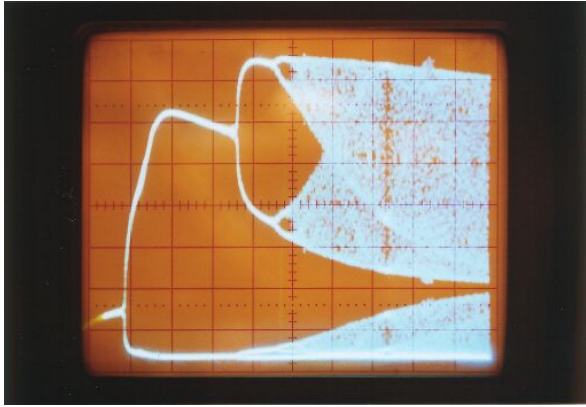


Abb. 32: Bifurkationsdiagramm bei Amplitudenmodulation, $f_0 = 1100\text{Hz}$, Intermitenz der Periode 6.

Dieses gibt in besonderer Weise Aufschluss über die im Signal erhaltenen Frequenzen und macht die einzelnen periodischen und chaotischen Bereiche besser sichtbar und damit unterscheidbarer.

Benötigte man früher für solche Untersuchungen einen Frequenzanalysator, so genügt heute für Frequenzen im hörbaren Bereich ein normaler PC mit Soundkarte. Dazu legt man die an der Diode abfallende Spannung mithilfe des Differenzverstärkers an den Line - Eingang der Soundkarte an und analysiert das Signal in Echtzeit oder zeichnet es auf. Die dazu benötigte Software ist normalerweise Bestandteil des Betriebssystems oder liegt der Soundkarte bei. Bei den Aufnahmeeigenschaften sollte man CD-Qualität ohne Kompression (44100 Hz, 16 bit, Mono) wählen, damit beim Digitalisieren nicht zu viele Informationen verloren gehen. Die Software, die man zur weiteren Untersuchung der erhaltenen Wave - Datei benötigt, ist kostenlos im Internet erhältlich, wobei außer dem hier verwendeten Programm sicherlich noch einige andere Programme ähnliche Möglichkeiten bieten: Das Freewareprogramm von R. S. Horne [2] - Spectrogram - ist in besonderer Weise für diese Versuche geeignet, denn es besitzt drei verschiedene Alternativen für die Darstellung des Frequenzspektrums. Gerade die Fähigkeit des Programms, ein Eingangssignal ohne Zwischenspeicherung in Echtzeit analysieren zu können, vereinfacht das Auffinden und Zuordnen der verschiedenen Bereiche sehr. So wurde auch bei der Aufnahme der U - t - Bilder im vorigen Abschnitt parallel zum Oszilloskop das Frequenzspektrum am Bildschirm verfolgt, da so auf den ersten Blick entschieden werden konnte, um welche Periode es sich gerade handelt.

Die Abb. 33 bis 36 zeigen die Grundfrequenz und die ersten vier Periodenverdopplungen als Spektrogramm. Dabei kann man z.B. in Abb. 36 deutlich die höheren Harmonischen der Periode 8 erkennen: Die tiefste Frequenz liegt hier bei ca. 136 Hz, also etwa 1/8 der Erregerfrequenz, und es sind auch alle ganzen Vielfachen von 136 Hz vorhanden. Dass natürlich auch schon bei

Periode 1 die höheren Harmonischen der Erregerfrequenz vorhanden sind, zeigt Abb. 38.

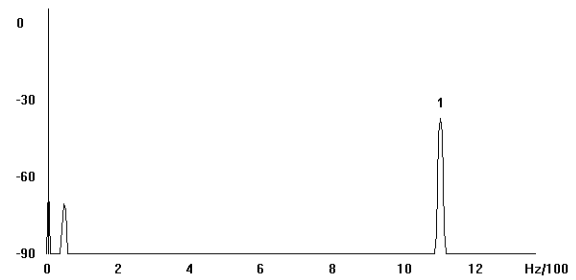


Abb. 33: Spektrogramm: Periode 1.

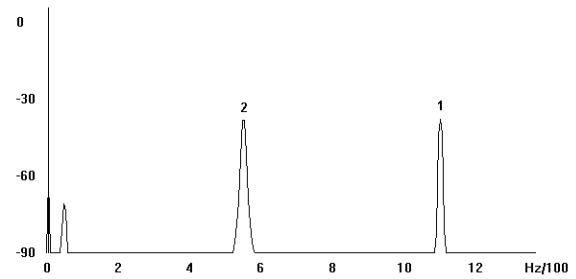


Abb. 34: Spektrogramm: Periode 2.

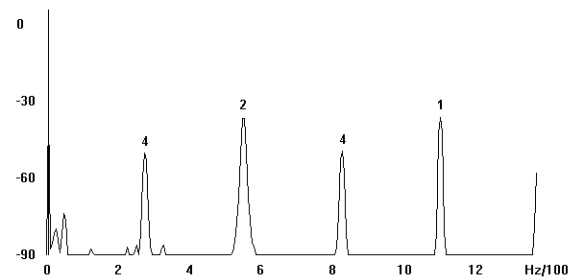


Abb. 35: Spektrogramm: Periode 4.

Man kann auf den Bildern auch deutlich erkennen, dass eine einmal aufgetretene Frequenz während der Periodenverdopplungen erhalten bleibt, was bereits Lindsay [5] beschrieben hat. Noch höhere Periodenverdopplungen konnten aber auch mit diesen Mitteln nicht beobachtet werden. Nach der Periode 16 scheint unmittelbar der chaotische Bereich zu beginnen, in dem dann aber schnell die Periode 12 (Abb. 39) auftaucht. Der Chaosbereich ist aber auch nicht völlig zufällig (weißes Rauschen), was daran zu erkennen ist, dass z. B. im Anfangsbereich des noch schwach ausgeprägten Chaos die Frequenzen $f/2$ und $f/4$ gut zu erkennen bzw. zu hören sind (Abb. 40).

Im Chaos befinden sich auch immer wieder kleine Bereiche mit periodischen Strukturen. Dies ist besonders deutlich beim Bifurkationsdiagramm bei der Periode 5 zu erkennen (Abb. 30 und 41), aber man findet je nach der Größe des Serienwiderstands auch die Perioden 7 (Abb. 42) und 10 (Abb. 43). Ist aber erst einmal intensives chaotisches Verhalten erreicht, so kann man außer der Anregungsfrequenz keine weiteren Frequenzen mehr ausmachen, sondern das Spektrogramm zeigt deutlich das hörbare Rauschen an (Abb. 44).

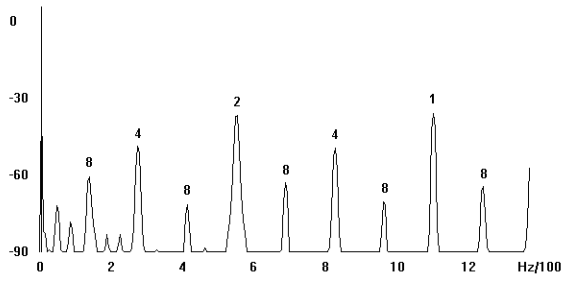


Abb. 36: Spektrogramm: Periode 8.

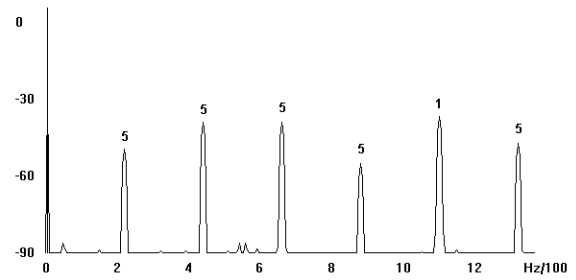


Abb. 41: Spektrogramm: Periode 5.

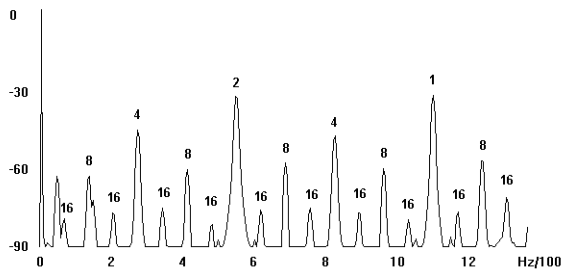


Abb. 37: Spektrogramm: Periode 16.

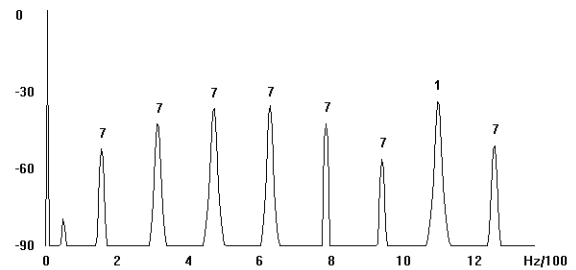


Abb. 42: Spektrogramm: Periode 7.

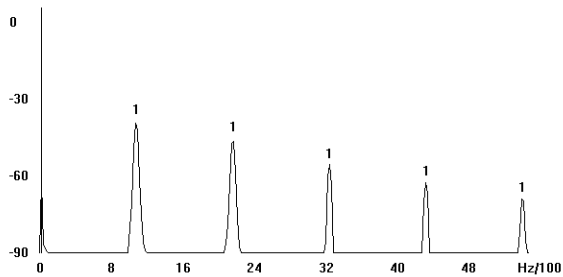


Abb. 38: Spektrogramm: Periode 1.

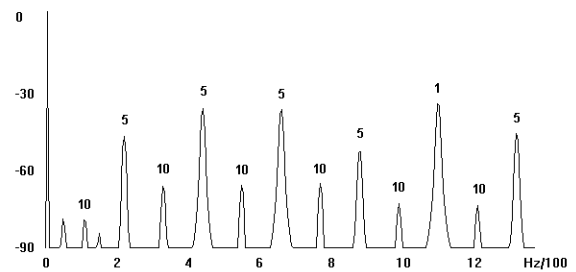


Abb. 43: Spektrogramm: Periode 10.

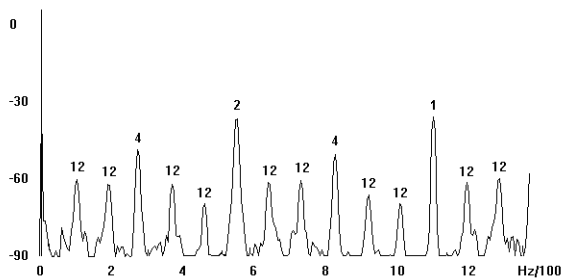


Abb. 39: Spektrogramm: Periode 12.

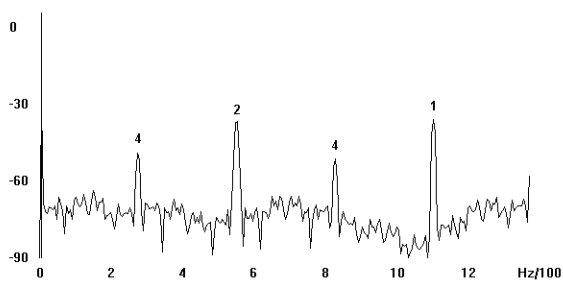


Abb. 40: Spektrogramm: Beginn des chaotischen Bereichs.

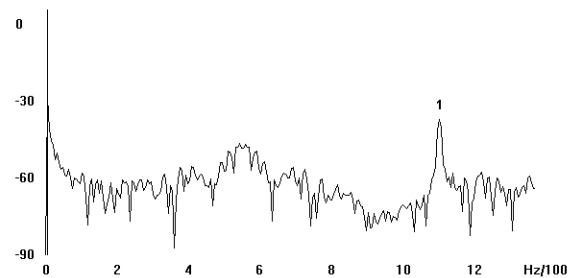


Abb. 44: Spektrogramm: Intensives Chaos.

Literatur

- [1] Brun, E.: Ordnung und Chaos, Phys. u. Did., Nr. 4, S. 289 - 305, 1985.
- [2] Horne, R. S.: Spectrogram. Freeware Computer Program, Version 5.1.7, 1994 - 2000, <http://www.monumental.com/rshorne/gram.html>
- [3] Lauterborn, W. u. W. Meyer-Ilse: Chaos. Phys. in unserer Zeit, Nr. 6, S. 177 - 187, 1986.
- [4] Leven, R. W., B.-P. Koch u. B. Pompe: Chaos in dissipativen Systemen. Akad. Verl., Berlin, 1994.
- [5] Linsay, P. S.: Period Doubling and chaotic Behavior in a driven anharmonic Oscillator, Phys. Rev. Let., vol. 47, No 19, pp. 1349 - 1352, 1981.
- [6] Patt, H.-J.: COSIMEX - Computerunterstütztes SIMulieren und EXperimentieren - Teil 1: Mathematische Simulation von Systemen. Univ. d. Saarl., Saarbrücken, 1999.
- [7] Philippow, E.: Nichtlineare Elektrotechnik, Akad. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig, 1971.
- [8] Rollins, R. W. a. E. R. Hunt: Exactly solvable Model of a physical System exhibiting universal chaotic Behavior. Phys. Rev. Let., vol. 49, no 18, pp. 1295 - 1289, 1982.
- [9] Siemens (Hrsg.): Dioden Datenbuch. Siemens, München, 1980 - 1981.
- [10] Testa, J., J. Pérez a. C. Jeffries: Evidence for universal chaotic Behavior of a driven nonlinear Oscillator. Phys. Rev. Let., vol. 48, no 11, pp. 714 -717, 1982.
- [11] Tietze, U. u. Ch. Schenk: Halbleiterschaltungstechnik. Springer-Verl., Heidelberg Berlin, 1999.