Universität des Saarlandes
Lehrstab für Mathematik
Prof. Dr. Ralf Kellner

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Zusatzübungsblatt zum Wiederholungskurs
Mathematik für WirtschaftswissenschaftlerInnen
SS 2019

Aufgabe 1

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass folgende Summenformeln für alle n $\in \mathbb{N}$ gelten:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = n + 2n^2$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Aufgabe 2

a) Gegeben seien die folgenden Folgen:

i) $\frac{1}{11}, \frac{1}{101}, \frac{1}{1001}, \frac{1}{10001}, \ldots$

ii) $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^6}, \ldots$

iii) $2, -2, \frac{8}{3}, -4, \frac{32}{5}, \frac{-64}{6}, \ldots$

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz. Geben Sie jeweils das kleinste n_0 an, sodass für alle weiteren Folgeglieder $\mathrm{n} > \mathrm{n}_0$ gilt: $|a_\mathrm{n}| < 0,0000001$. Formulieren Sie allgemein, wie groß n in Abhängigkeit eines beliebigen ϵ sein muss, sodass für alle weiteren Folgenglieder $\mathrm{n} > \mathrm{n}_0$ gilt: $|a_\mathrm{n}| < \epsilon$.

b) Überprüfen Sie folgende Reihen auf konvergentes Verhalten:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_4 &= 5 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 &= 5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 2x_4 &= 5 \\ -x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Finden Sie näherungsweise die Nullstellen/Lösungen der folgenden Ausdrücke. Runden Sie dabei alle Zwischenergebnisse auf die dritte Nachkommastelle.

a) $f(x) = 5x^5 - 3x^4 + 7x^2 \qquad x_0 = 1, \qquad$ 8 Schritte

b) $e^x = (1+x)^2 - \frac{1}{5} \qquad x_0 = 0, \qquad$ 5 Schritte

Aufgabe 5

a) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen um die Stelle x_0 in eine Taylor-Reihe:
(*Hinweis: Entwickeln Sie bis einschließlich* $P_5(x, x_0)$.)

   i) $f(x) = \cos(x), \qquad x_0 = \frac{\pi}{3}$

   ii) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad x_0 = 1$

b) Gegeben sei folgende Gleichung:

$$0 = e^{-2x} - \frac{63}{64} + \frac{129x}{64} - \frac{37x^2}{16} + \frac{49x^3}{48} + \frac{x^4}{3} + \frac{19x^5}{15}$$

   i) Führen Sie eine Taylorentwicklung des Terms e^{-2x} um $x_0 = 0$ bis einschließlich der 5. Ordnung durch.

   ii) Ersetzen Sie e^{-2x} durch das entstandene Taylorpolynom und führen Sie anschließend eine Polynomdivision durch. *(Hinweis: Eine bekannte Nullstelle ist* $x = -1$*).*

   iii) Finden Sie die übrigen Nullstellen.

Aufgabe 6

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^3 - 4x$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 3)$

c) $f_a(x) = (x - a)^2 \cdot e^x$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, den Wertebereich, die Nullstellen und die Grenzwerte der angegebenen Funktionen. Untersuchen Sie die Funktionen im Anschluss auf Extrema sowie Wendepunkte und geben Sie das Monotonie- sowie das Krümmungsverhalten an. Skizzieren Sie die Funktionen in jeweils ein geeignetes Koordinatensystem.

Zusatz zu Aufgabenteil c):

i) Skizzieren Sie f_2 in ein geeignetes Koordinatensystem.

ii) Wie groß ist die Fläche zwischen dem Graph f_2 und der Abszissenachse innerhalb der Extremstellen?

Aufgabe 7

a) Eine Kleiderfabrik kann von zwei Kleidermodellen insgesamt 9360 Stück verkaufen, wenn die Kleider in höchstens 30 Arbeitstagen fertiggestellt sind. Je Arbeitstag können von Modell „Ingrid" höchstens 240 Stück, von Modell „Gisela" höchstens 360 Stück angefertigt werden.
Welche Stückzahl maximiert den Erlös des Unternehmens, wenn die Kleider zu Absatzpreisen von 450 € bzw. 400 € angeboten werden?

b) Ein Gärtner möchte auf einem 190 m^2 großen Gemüsebeet Gurken und Tomaten anpflanzen. Durch den Verkauf des Gemüses möchte er einen möglichst großen Gewinn erzielen. Pro Quadratmeter Gurken muss er 3 €, pro Quadratmeter Tomaten 5 € investieren. Der Ertrag beläuft sich auf 6 € pro Quadratmeter Gurken und 9 € pro Quadratmeter Tomaten. Seine Investitionen sind begrenzt auf 750 €. Außerdem soll nicht mehr als 120 m^2 Tomaten angebaut werden. Wie viele Quadratmeter von welchem Gemüse sollte der Gärtner anpflanzen, um maximalen Gewinn zu erzielen?

c) Das Unternehmen *Quickfit* produziert im rheinlandpfälzischen Pirmasens Nahrungsergänzungsmittel. Der Kassenschlager, das Produkt „PS-Boost", ist für seinen außerordentlich hohen Vitamingehalt bekannt und besteht aus drei Grundstoffen. Vier Vitamine sind für den Vitamingehalt von „PS-Boost" entscheidend und in unterschiedlichen Konzentrationen in den jeweiligen Grundstoffen enthalten. Aus produktionstechnischen Gründen ist die kleinste herstellbare Einheit 7 kg. Firmengründer und Visionär Pieter Sens möchte von seinem Produktionsleiter wissen, welche Menge an Grundstoffen (G1,G2,G3) in das Produkt einfließen sollten, um die Kosten möglichst gering zu halten.
Folgende Daten sind bekannt:

Vitamine	Menge der Vitamine in $\frac{mg}{kg}$			Mindestmengen	Höchstmengen
	G1	G2	G3		
V1	3	2	1	16	-
V2	4	6	3	33	-
V3	7	8	4	-	76
V4	5	1	0	-	46
Kosten in $\frac{€}{kg}$	8	9	6		

Aufgabe 8

Berechnen Sie, sofern möglich, folgende Integrale:
(*Hinweis: partielle Integration und Substitution könnten hilfreich sein!*)

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos(x) \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{10x^4}{2x^5 - 4} \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \mathrm{d}x$