

Millikan Versuch – Elementarladung

Die genaue Messung der Elementarladung durch R. A. Millikan und seinen Doktoranden H. Fletcher um 1910 war ein wichtiger Meilenstein in der Physik. Die Idee, dass elektrische Ladung durch diskrete Teilchen hervorgerufen wird, geht auf B. Franklin um 1750 zurück, jedoch war deren Ladung unbekannt. Das Elektronen als ein Elementarteilchen wurde durch J. J. Thomson 1897 nachgewiesen. Die Entdeckung des Atomkerns durch Rutherford 1911 führte 1913 zur Entwicklung des Bohrschen Atommodells. Seit Mai 2019 ist die Elementarladung $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C eine festgelegte Naturkonstante und definiert das Ampere im neuen SI-System. Eine Messung von e wie in diesem Versuch hat damit ihren ursprünglichen Sinn verloren. ☺.

1 Lernziele

- Die Einheit der Ladung Coulomb ist $1\text{ C} = 1\text{ Ampere} \cdot \text{Sekunde}$.
- Bei der Bewegung langsamer, μm -großer, kugelförmiger Teilchen in Gasen oder Flüssigkeiten ist die Strömung laminar und es gilt die lineare Stokes-Reibung $F_{\text{Stokes}} = 6\pi\eta r v$. Sie ist proportional zur Geschwindigkeit des Partikels und dessen Durchmesser.
- Bei großen und schnellen Objekten gibt es Turbulenz und es gilt die Newton-Reibung. Sie ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit und der Querschnittsfläche $F_N \propto A v^2$.
- Die Kraft \vec{F} auf ein Objekt mit der Ladung q im elektrisches Feld \vec{E} ist $\vec{F} = q \vec{E}$.

2 Experimenteller Aufbau

Millikan-Apparat von 3B-Scientific und Computer mit:

- Hochspannungsquelle $0 \dots \pm 600\text{ V}$ für den Luftkondensator mit einer kleinen Öffnung zum Eintritt der Öltröpfchen
- Kondensatorplattenabstand: $d = (3 \pm 0.1)\text{ mm}$
- Öl im Zerstäuber mit einer Dichte $\rho = (874 \pm 3)\text{ kg/m}^3$
- Beobachtungsmikroskop, $2\times$ Vergrößerung mit Kamera
- Temperatur- und Drucksensor im Millikan-Apparat zur Bestimmung der aktuellen dynamischen Viskosität η der Luft
- Zeitmesser im Millikan-Apparat
- Nadel zur Einstellung des Fokuspunktes
- Steinchen aus dem Schwarzwald, minimal radioaktiv um Ionen in der Luft zu erzeugen
- Computer mit Kamerasoftware und zur Datenauswertung



3 | Aufgabenstellung zur Messung - | Durchführung - | Auswertung

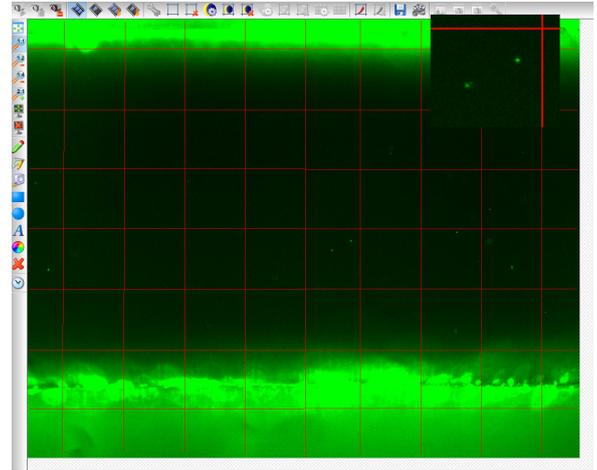
3.1 Einstellung Fokuspunkt Mikroskop

- 1) Überprüfen Sie mit der angebrachten Dosenlibelle ob der Apparat horizontal ausgerichtet ist.
[https://de.wikipedia.org/wiki/Libelle_\(Messtechnik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Libelle_(Messtechnik))
- 2) Heben Sie die Plexiglasabdeckung mit dem Zerstäuber vorsichtig ab und setzen Sie die Nadel in die Öffnung des Kondensators.
- 3) Schalten Sie die grüne LED-Beleuchtung mit dem Drehregler ein.
- 4) Am Arbeitsplatz finden Sie eine Anleitung zur Einstellung und Bedienung der Kamerasoftware.

3.2 Geladene Öltröpfchen erzeugen

- 1) Entfernen Sie die Nadel zur Fokuspunkteinstellung. Legen Sie den kleinen Steinsplitter neben die obere Öffnung des Kondensators. Dieses Steinchen ist ein natürlicher, sehr, sehr schwacher α -Strahler. Er verstärkt die Entstehung geladener Öltröpfchen gegenüber der natürlichen Bildung aufgrund der in der Umgebungsluft vorhandenen Ionen. Setzen Sie vorsichtig die Abdeckung mit dem Zerstäuber wieder auf, beachten Sie die Stifte und Löcher am Boden. Dies ist die Sicherheitsschaltung, damit keine Hochspannung an den Kondensatorplatten anliegt, wenn die Abdeckung entfernt ist.

- 2) Stellen Sie die Schalter für die Spannung U und die Zeitmessung t auf OFF, den Drehknopf für die Spannung auf den linken Anschlag 0V und die Zeiten am Display mit `Reset` (Touch-Display) auf 0s.
- 3) Durch ein- oder zweimaliges kurzes, kräftiges Drücken des Gummiballs wird ein Öltröpfchennebel erzeugt. Es dauert ein bis zwei Minuten bis sich die Wolke etwas verteilt hat. Durch vorsichtiges Drücken (keine neuen Tropfen, nur etwas Wind) können die Tröpfchen besser verteilt werden, da so Luft zwischen die Kondensatorplatten geblasen wird. Es sollten nicht zu viele Tröpfchen im Sichtfeld sein.
- 2) Wenn Sie kurzzeitig eine hohe Spannung einstellen (Drehregler auf 600 V und Schalter auf 0n) können Sie zu stark geladene Tröpfchen entfernen. Wir suchen nach Tröpfchen mit nur wenigen Elementarladungen.
- 3) Sie können die Kamera auch abnehmen und ein Okular aufsetzen um die Tröpfchen mit dem Auge zu sehen. Sie werden feststellen, dass Ihr Auge eine deutlich bessere Auflösung als die Kamera hat.
- 4) Notieren Sie die Temperatur T , den Luftdruck p und die vom Gerät aus einer internen Tabelle bestimmte Viskosität η der Luft.



3.3 Messung nach der Schwebemethode

Eine Methode zur Bestimmung der Ladung eines Tröpfchen besteht darin, die Gewichtskraft eines ausgewählten, geladenes Öltröpfchen im Schwerfeld der Erde mit einem elektrischen Feld zu kompensieren und in Schwebelage zu halten. Die Ladung kann positiv oder negativ sein. Sie können die Polung der Kondensatorplatten am Gerät umstellen. Versuchen Sie, die Spannung an den Kondensatorplatten zu finden, bei der sich das ausgewählte Tröpfchen nicht mehr in vertikaler Richtung bewegt. Zusätzlich zu einer möglichen Drift, bewegt sich das Tröpfchen irregulär aufgrund der Brown'schen Bewegung. Um die Größe, beziehungsweise das Gewicht, dieses Tropfens zu bestimmen, wird das elektrische Feld abgeschaltet und die konstante Sinkgeschwindigkeit des Tropfens $v = s/t$ gemessen.

Kleinste Tröpfchen sind aufgrund der Oberflächenspannung nahezu perfekt kugelförmig. Bei diesen ist die Luftströmung um die Tröpfchen laminar und es gilt die Stokes'sche Reibungskraft

$$F_{\text{Stokes}} = 6\pi \eta r v_{\text{sink}} \quad (1)$$

Es stellt sich unmittelbar das Kräftegleichgewicht aus Gravitationskraft, abzüglich des Auftriebs $F_g = mg = (q_{\text{Öl}} - q_{\text{Luft}})Vg$ und der Stokesreibung ein, siehe Vorbereitung. Somit kann der Radius des jeweiligen Tröpfchens bestimmt werden.

Die Sinkzeit bei abgeschaltetem \vec{E} -Feld der $r \approx 1 \mu\text{m}$ großen Tropfen wird zwischen 5 s und 30 s betragen. Kleine und größere Tropfen können Sie ausschließen. Die Radien r_i befinden sich in der Größenordnung der mittleren freien Weglänge der Luftmoleküle (siehe Vorbereitung), daher treten Korrekturterme in der Stokes'schen Reibung auf. Diese wurden 1910 von Ebenezer Cunningham hergeleitet, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Gesetz_von_Stokes#Cunningham-Korrektur. Für Tropfen in der Größenordnung der freien Weglänge der Gasmoleküle wird die Stokes'sche Reibung etwas reduziert, weil die Tröpfchen besser zwischen den Molekülen durchfallen können. Dies wird berücksichtigt mit einem korrigierten Tröpfchenradius:

$$r = \sqrt{\frac{9 \eta v_{\text{sink}}}{2 (q_{\text{Öl}} - q_{\text{Luft}}) g}} \quad ; \quad r_{\text{korr}} = \sqrt{r^2 + \frac{b^2}{4p^2}} - \frac{b}{2p} \quad \text{mit} \quad b = 82 \mu\text{m} \cdot \text{hPa} \quad (2)$$

Es zeigte sich, dass die Schwebemethode recht ungenau ist, insbesondere ist die Einstellung der elektrischen Feldstärke für den Schwebezustand durch die Brown'sche Bewegung sehr fehlerhaft. Probieren Sie es selbst aus.

Es ist deutlich günstiger, einer größeren Spannung zu verwenden und aus der Geschwindigkeit, mit der die Tropfen dann aufsteigen, die Ladung der Tropfen zu ermitteln.

3.4 Messung nach der Steigmethode

Bei der Steigmethode wird nach dem Sinken eine Spannung angelegt, welche ausreichend groß ist, damit sich das Tröpfchen gleichmäßig wieder nach oben zum Ausgangspunkt bewegt. Es passiert dabei die Strecke $\ell = 1.5 \text{ mm}$ zwei Mal, von der oberen zur unteren Marke und beim Anlegen der Spannung von der unteren Marke zurück zur oberen Marke. Diese Methode liefert genauere Ladungswerte als die Schwebemethode.



Ihr größter Feind ist die thermische Aufheizung und die damit verbundene Konvektion.



Schalten Sie den Aufbau nach zirka einer Stunde für 15 min aus. Heben Sie die Plexiglasabdeckung ab und öffnen Sie den Kondensator zur besseren Kühlung. Machen Sie eine solche Unterbrechung spätestens dann, wenn die kleinsten, gerade noch sichtbaren, Tröpfchen in der Nähe der Öffnung, bei abgeschaltetem \vec{E} -Feld nach oben steigen anstatt sehr langsam zu sinken.

- 1) Setzen Sie die Zeiten t_1 und t_2 am Gerätedisplay mit Reset auf Null.
- 2) Wählen Sie ein geladenes Tröpfchen aus, welches *nicht* direkt unter der Eintrittsöffnung ist. Durch vorsichtiges Drücken des Gummiballs können Sie die Tröpfchen horizontal verschieben.
- 3) Heben Sie den Tropfen mit eingeschalteter Spannung über eine Gitternetzlinie ins obere Drittel der Messzelle. Notieren Sie die eingestellte Spannung.
- 4) Schalten Sie die Spannung aus, das Tröpfchen beginnt zu sinken.
- 5) Wenn das Tröpfchen die Gitternetzlinie passiert starten Sie mit $t \rightarrow ON$ die Zeitmessung t_2 .
- 6) Wenn das Tröpfchen nach ℓ eine untere Gitternetzlinie erreicht, schalten Sie die Spannung mit $U \rightarrow ON$ ein. Die Zeitmessung t_2 stoppt automatisch und die Messung von t_1 startet automatisch.
- 7) Stoppen Sie die Messung von t_1 mit $t \rightarrow OFF$, wenn das Tröpfchen wieder die obere Gitternetzlinie erreicht. Wenn Sie dann die Spannung ausschalten verhindern Sie, dass der Tropfen die obere Kondensatorplatte erreicht und sie können ihn erneut untersuchen.
- 8) Üben Sie diese Abfolge. Tragen Sie die Werte gleich in eine vorbereitete SciDAVis Tabelle ein, um direkt die Ladung des jeweiligen Tropfens zu berechnen. Nur Tropfen mit weniger als $\pm 10e$ Ladung verdeutlichen die Quantisierung.
- 9) Versuchen Sie, mit zwei oder drei Tropfen dieses Sinken/Steigen mindestens drei Mal hintereinander durchzuführen, vielleicht auch mit unterschiedlich eingestellten Spannungen für den selben Tropfen. Sie erhalten daraus eine Abschätzung über die Reproduzierbarkeit der Messung.

Auswertung: Steigmethode

Da bei der Steigmethode eine Feldstärke vorliegt, welche die Tröpfchen gleichmäßig mit v_{steig} ansteigen lässt, ergibt sich die Ladung zu:

$$q = 9\pi \frac{d}{U} (v_{\text{steig}} + v_{\text{sink}}) \sqrt{\frac{2\eta^3 v_{\text{sink}}}{(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g}} ; \quad q_{\text{korr}} = q \left(1 + \frac{b}{r_{\text{korr}} p}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{mit } b = 82 \mu\text{m} \cdot \text{hPa} \quad (3)$$

- a) Erstellen Sie im Computer eine Tabelle mit den Spalten: Messungsnummer, Tropfennummer (bleibt gleich, wenn der selbe Tropfen mehrmals verwendet wird), Spannung U , Steigzeit t_{steig} und Fallzeit t_{sink} .
- b) Berechnen Sie q_{korr} sowie das Verhältnis q_{korr}/e mit der Ihnen bereits bekannten Elementarladung e . Hinweis, in SciDAVis können Sie bei Angabe der Formel für die Berechnung eines Spaltenwertes auch Abkürzungen einführen und verwenden, zum Beispiel: $v_{\text{steig}}=...$; $r=...$; $r_{\text{korr}}=...$; $q=...$; $q_{\text{corr}}=...$, letzte Zeile ohne „;“.
- c) Aktualisieren Sie die Spalten mit den Berechnungen zwischendurch um ein Gefühl zu bekommen, welche Tropfen weniger als 10 Elementarladungen tragen. Sie sollen keine Daten verwerfen, aber man erkennt die Quantisierung bei einer niedrigen Zahl wesentlich besser.
- d) Sortieren Sie Ihre Tabelle gelegentlich nach dem q_{korr}/e und tragen Sie dieses Verhältnis aufsteigend auf. Ein **X-Column** mit **Fill Selection > Row numbers** nach dem Sortieren erweist sich hier als günstig. Es sollte sich im Laufe Ihres Experimentes eine abgestufte Funktion ergeben. **Ihre erste Messung der Quantisierung der Ladung, Ihr experimenteller Einstieg in die Quantenwelt ☺.**
- e) Denken Sie daran, dass der Apparat nach zirka einer Stunde eine 15 minütige Pause benötigt.
- f) Drucken Sie abschließend die Tabelle für Ihre Unterlagen aus. Den Graf drucken Sie erst nach dem Eintrag der Fehlerbalken aus, siehe Messunsicherheitsbetrachtungen.

3.5 Messunsicherheitsbetrachtungen

Bei der Berechnung von q fließen viele, mit Unsicherheiten behaftete Messgrößen ein. Wir wollen abschätzen, welche Unsicherheiten vernachlässigbar sind, ohne alle Ableitungen von Gl. (3) zu berechnen. Des Weiteren unterscheiden wir zwischen der Reproduzierbarkeit der Messungen und der Größtfehlerrechnung.

- Schätzen Sie die Reproduzierbarkeit der q Bestimmung aus Ihren Daten ab. Verwenden Sie dazu die Tropfen, deren Sink-/Steigzeiten Sie mehrmals gemessen haben. Tragen Sie dies als Fehlerbalken in Ihrer Darstellung für den jeweiligen Tropfen mit ein.

Größtfehlerrechnung

- Die Unsicherheiten durch den Korrekturterm b/p muss aufgrund seiner kleinen relativen Unsicherheit weder für q noch für r berücksichtigt werden. Die Unsicherheit der Viskosität der Luft $u(\eta)$ und der Dichten $u(\rho)$ gehen ebenfalls nicht in die Größtfehlerabschätzung von q ein, da ihre relativen Unsicherheiten im Vergleich zu den Messgrößen U und $t_{\text{sink/steig}}$ ebenfalls sehr klein sind. Wie groß ist die relative Messunsicherheit des Terms $\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}$?
- Des Weiteren sind folgende Abschätzungen plausibel: Die passierte Wegstrecke ist $\ell = (1.5 \pm 0.1)$ mm und der Kondensatorplattenabstand ist $d = (3 \pm 0.1)$ mm.
- Berechnen Sie die relative Messunsicherheit für q und die absolute Unsicherheit für einen Tropfen mit der Ladung e .

4 Vorbereitung und Fragen

- Wer war der Doktorand mit dem Robert Millikan den Versuch 1910 durchführte?
- Skizzieren Sie die Kräfte, die an dem Öltröpfchen angreifen, wenn eine Spannung an den Kondensatorplatten anliegt.
- Welchen Durchmesser hat ein Öltröpfchen, wenn es beim Sinken in Luft über einen Weg von 1 mm eine Zeit von 20 s benötigt?
- Die mittlere freie Weglänge ist $\lambda = 1/(n\sigma)$, mit der Teilchenzahldichte n und dem totalen Wirkungsquerschnitt σ , was in etwa der Querschnittsfläche der Kreisscheibe eines Luftmoleküls entspricht. Wenn sich alle Teilchen ungeordnet bewegen wird diese Weglänge um $1/\sqrt{2}$ kürzer. Schätzen Sie damit die mittlere freie Weglänge unter Ihren Umgebungsbedingungen ab. Im Praktikum liegt die Raumtemperatur bei zirka 20°C (nicht 0°C).
- Zusatz (etwas Anspruchsvoller)^a: Stellen Sie die Differentialgleichung für die beschleunigte Sinkbewegung eines Tröpfchens vom Radius r in Luft auf. Verwenden Sie das Kräftegleichgewicht aus Gravitationskraft, Beschleunigungskraft und Reibungskraft. Lösen Sie diese Gleichung mit dem Tröpfchendurchmesser von $r = 2 \mu\text{m}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$. Was ist die finale Sinkgeschwindigkeit v_∞ für $t \rightarrow \infty$? Wie lange dauert es bis das Tröpfchen 99% dieser Sinkgeschwindigkeit erreicht hat.

- Anhand dieser Rechnung erkennen Sie, warum die Annahme einer konstanten Sinkgeschwindigkeit gerechtfertigt ist, im Gegensatz zur beschleunigten Bewegung beim freien Fall großer Körper. Dies ist ein generelles Phänomen und betrifft alle Bewegungen auf μm -Skalen, oder genauer bei sehr kleinen Reynoldszahlen - es gibt keine Verzögerungen durch Trägheitsterme.

5 Literatur

Herr Millikan musste viel Aufwand betreiben um die Konvektion zu verhindern. So hat er seinen kompletten Aufbau in einem Wasserbad thermisch isoliert. Dennoch ging nicht immer alles gut, siehe auch eine Seite aus seinem Laborbuch im Zusatzmaterial. **! Achtung !** So sollte Ihr Laborbuch **nicht** aussehen, es sei denn, Sie wollen auch einen Nobelpreis, allerdings ist ein so geführtes Laborbuch noch nicht hinreichend. Er hatte auch keinen Stein aus dem Schwarzwald und musste eine Röntgenröhre zur Ionisierung der Luft benutzen.

- W. Schenk and F. Kremer (Hrsg.), *Physikalisches Praktikum*. Springer, 14. Auflage, 2014, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2>.
- D. Meschede, *Gerthsen Physik*. Springer, 25. Auflage, 2015, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5>.
- P. A. Tipler, *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 2019, <https://doi.org/10.1007/978-3-662-58281-7>.

6 Zusatzmaterial

Die beiden folgenden Seiten sind aus dem Artikel: A. Franklin, *Millikan's Oil-Drop Experiments*, The Chemical Educator **2**, 1–14 (1997). <http://dx.doi.org/10.1007/s00897970102a>.

Mit Google kann man diesen Artikel auch als Fulltext finden.

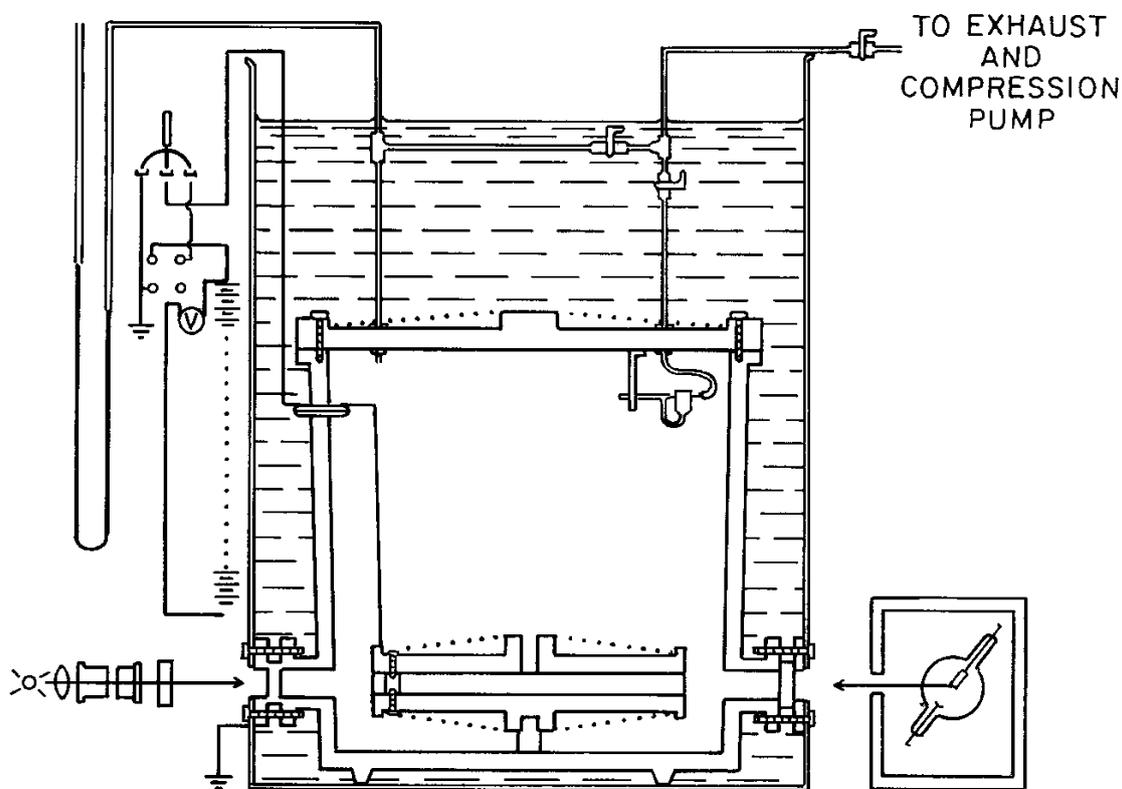


FIGURE 1. MILLIKAN'S OIL-DROP APPARATUS. THE PLATES TO WHICH THE VOLTAGE WAS APPLIED ARE SHOWN IN THE LOWER CENTER. THE OPTICAL SYSTEM AT THE LOWER LEFT AND AN X-RAY SOURCE TO INDUCE CHARGES IN THE CHARGE ON THE DROPS IS SEEN AT THE LOWER RIGHT [2].

Let us examine how Millikan demonstrated the existence of a fundamental unit of electrical charge and measured its value, so that we can understand the credibility of his results. The experimental apparatus is shown in Figure 1. Millikan allowed a single oil drop to fall a known distance in air. Millikan did not measure the time of fall from rest, but allowed the drop to fall freely for a short distance before it passed a crosshair, which was the start of the time measurement. Because of air resistance the drop was then traveling at a constant, terminal velocity. After the drop passed a second crosshair, which determined the time of fall at constant speed for the known distance between the crosshairs, an electric field was turned on. The charged oil drop then traveled upward at a different constant speed and the time to ascend the same distance was measured. These two time measurements allowed the determination of both the mass of the drop and its total charge.

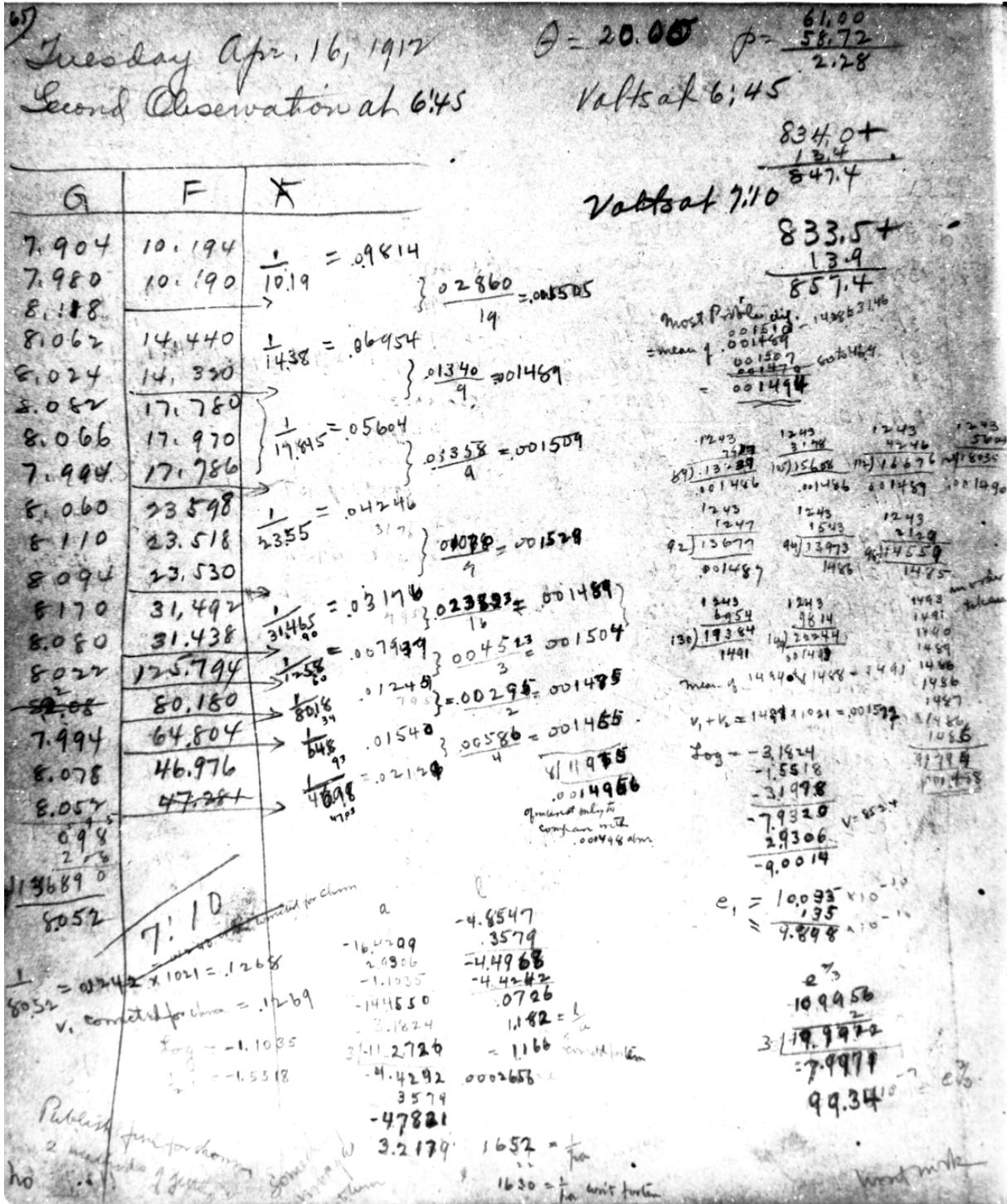


FIGURE 3. MILLIKAN'S DATA SHEET FOR APRIL 16, 1912 (SECOND OBSERVATION). NOTICE "WON'T WORK" IN THE LOWER RIGHT-HAND CORNER. COURTESY OF THE ARCHIVES, CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY.