Frequenzanalyse akustischer Schwingungen

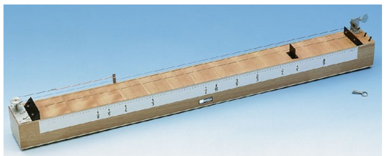
Schwingungsvorgänge treten bei sehr vielen physikalischen Phänomenen auf. Oft sind sie mit einer Wellenausbreitung verbunden. Ein Beispiel dafür sind die akustischen Schwingungen.
Die computergestützte Auswertung von periodischen Vorgängen mit Hilfe der Fourier-Transformation wird Frequenz- oder Fourieranalyse genannt. Diese findet in vielen Bereichen der Physik Anwendung.

1 Lernziele

- Schwingungen und deren Kenngrößen wie Frequenz, Amplitude, Phase, ...
- Wellen und deren Kenngrößen wie Frequenz, Amplitude, Phasengeschwindigkeit, ...
- Überlagerung von Schwingungen - Schwebung, Schwebungsfrequenz Δf
- Saitenschwingung - die Grundfrequenz f_1 hängt von der Länge L , der Spannung F/A und der Materialdichte ϱ ab: $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\varrho A}}$
- Frequenzspektrum als Darstellung der Amplitude von Frequenzanteilen in einem Signal

2 Experimenteller Aufbau

- zwei Saiten auf einem Resonanzkasten (Monochord),
- Referenzstück einer Seite,
- Gewichte zur Änderung der Seilspannung,
- Maßband mit einer Ablesegenauigkeit von ± 1 mm,
- Präzisionswaage,
- Gabellichtschranke,
- Resonanzstimmgabeln mit Abstimmgewicht,
- Mikrophon an Sensor-CASSY zur Aufnahme und anschließenden Fourieranalyse mit dem Computer,



3 Messung - Durchführung - Auswertung

3.1 Frequenz $f(F)$ einer eingespannten Saite als Funktion der Saitenspannung F/A

Die Eigenfrequenz einer Saite $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\varrho A}}$ ist eine Funktion der Länge L, der Dichte ϱ und der Spannung F/A mit der Querschnittsfläche A und der Zugkraft F. Da die Saiten zylinderförmig sind, vereinfacht sich der Vorfaktor vor $\sqrt{F}$ und es folgt

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\ell}{m}}\sqrt{F}. \tag{1}$$

1) Ermitteln Sie das Verhältnis ℓ/m aus Messungen an einem Referenzstück. Notieren Sie die jeweiligen Messunsicherheiten $u(\ell)$ und $u(m)$ für die Größtfehlerberechnung bei der Auswertung.
2) Erfassen Sie die Eigenfrequenz (Grundfrequenz) einer Saite $f_1(F)$ für verschiedene Zugkräfte bei der festen Saitenlänge L (ohne Steg). Die Saite wird in der Mitte horizontal zum Schwingen angeregt, damit möglichst nur die Grundschwingung ertönt. Die Schwingungsfrequenz wird mit einer Gabellichtschranke in der Mitte der Saite erfasst. Die variablen Zugkräfte werden durch Gewichte realisiert, welche über eine Umlenkrolle an der Saite anhängen. Messen Sie für mehrere Zugkräfte mit bis maximal 8.6 kg die Frequenz der Grundschwingung.

a) Berechnen Sie den Faktor $c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{m}}$ des Saitenmaterials aus der Masse und der Länge der Referenzprobe. Welche Einheit hat c? Führen Sie die Größtfehlerberechnung für $u(c)$ durch.
b) Stellen Sie die Eigenfrequenz $f_1(F)$ grafisch dar, wobei der Koordinatenursprung enthalten sein soll. Führen Sie einen benutzerdefinierten, nichtlinearen Fit mit der Funktion $f_1(F) = c_F\sqrt{F}$ durch, um c_F zu ermitteln. Welche Einheit hat c_F?
c) Berechnen Sie $c_F^B = c/L$ und die Messunsicherheit $u(c_F^B)$ aus $u(c)$ und $u(L)$[a]. Vergleichen Sie c_F^B mit c_F aus Ihrem Fit. Zeichnen Sie die Funktion $f_1^B(F) = c_F^B\sqrt{F}$ und die Funktionen $(c_F^B \pm u(c_F^B))\sqrt{F}$ in Ihre Abbildung ein.

[a] B-für berechnet

3.2 Frequenzspektrum und die Grundfrequenz f_1 einer Resonanzstimmgabel

Stimmgabel einzeln

1) Verwenden Sie die Resonanzstimmgabel $a^1 = 440\,\text{Hz}$ ohne Abstimmgewicht mit den Anschlaghammer zur Tonerzeugung. Mit einem Mikrophon werden die ausgesendeten Schallwellen von den Stimmgabelschwingungen in elektrische Spannungen umgewandelt und diese mit dem CASSY analysiert. Die CASSY-Software stellt sowohl die Amplitude $a(t)$ des aufgezeichneten Signals als auch das zugehörige Frequenzspektrums $|\hat{A}(f)|$ dar. Sie können i) die Empfindlichkeit des Mikrophons, ii) die Messdauer und iii) die Abtastrate variieren, wodurch sich die Genauigkeit der Frequenzbestimmung ändert. Ermitteln Sie geeignete Einstellungen, um die Eigenfrequenz der Stimmgabel auf genauer als 0.5 Hz zu ermitteln. Drucken Sie eine Bildschirmkopie des Signals und des zugehörigen Frequenzspektrums für Ihr Protokoll aus.

a) Notieren Sie in Ihrem Protokoll den Einfluss der Messdauer T und der Abtastfrequenz f_A auf das Frequenzspektrum, insbesondere im Hinblick auf die erreichbare Frequenzauflösung, dem Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Frequenzwerten im Spektrum. Was ist die maximale Frequenz im Spektrum als Funktion von der Messdauer und der Abtastfrequenz? Diese maximale Frequenz wird auch Nyquist-Frequenz genannt.

3.3 Frequenz $f(L)$ einer eingespannten Saite als Funktion von der Saitenlänge L

Saitenschwingungen – veränderliche Saitenlänge

1) Bestimmen Sie mit der Gabellichtschranke zuerst die Grundfrequenz $f_1(L)$ für die fest eingespannte Saite (die ohne Umlenkrolle), ohne den Steg.
2) Erfassen Sie mit dem Mikrofon und dem CASSY das Frequenzspektrum dieser Anordnung und identifizieren Sie in diesem die Grundfrequenz. Drucken Sie das Spektrum aus und kennzeichnen Sie die Position der Grundfrequenz und der höheren Harmonischen.
3) Ermitteln Sie aus den jeweiligen Frequenzspektren die Grundfrequenzen der Saitenschwingungen für 7 verschiedene Saitenlängen L. Verwenden Sie dazu den Steg und die Schaumstoffdämpfer. Schätzen Sie die Messunsicherheit bei der Frequenzbestimmung ab.

a) Erstellen Sie eine Abbildung zur Abhängigkeit der Grundfrequenz / der 1. Harmonischen von der Länge der Saite mit $f_1(L)$ und führen Sie einen nichtlinearen Fit mit $f_1 = c_L \cdot L^{-1}$ durch.
b) Berechnen Sie aus den bestimmten Wert c_L die Kraft F, mit der die Saite eingespannt ist.
c) *Zusatz:* Erstellen sie auch eine zweite Abbildung mit $f_1(1/L)$ und führen Sie eine lineare Regression zur Bestimmung von c_L^l durch. Diskutieren Sie die Ursachen für die möglichen Unterschiede zwischen c_L und c_L^l. Beachten Sie, dass beide Werte aus dem selben Datensatz berechnet wurden. Hinweis: Die nichtlineare Regression ist richtig, aber wieso?

3.4 Schwebungsfrequenz Δf zweier, zueinander leicht verstimmter Stimmgabeln

zwei Stimmgabeln – Schwebung

1) Verwenden Sie bei einer Stimmgabel ein Abstimmgewicht. Variieren Sie dessen Position an der Gabel, bis Sie beim gleichzeitigen Anschlagen beider Stimmgabeln eine Schwebung mit der Frequenz von ungefähr 1 Hz hören.
2) Führen Sie die Fourieranalyse durch. Optimieren Sie die Messparameter (siehe oben) bis Sie eindeutig die beiden Frequenzen f_1 und f_2 der Stimmgabeln im Frequenzspektrum voneinander trennen können. Drucken Sie eine Bildschirmkopie des Signal $a(t)$ und des Frequenzspektrums $|\hat{A}(f)|$ für Ihre Unterlagen aus.

a) Bestimmen Sie die Frequenzen der Stimmgabeln f_1^a und f_1^b aus dem Frequenzspektrum $|\hat{A}(f)|$ der Schwebung. Berechnen Sie die Differenz $\Delta f = |f_1^a - f_1^b|$ und kennzeichnen Sie die zugehörigen Peaks f_1^a, f_1^b.
b) Stellen Sie die gemessene zeitabhängige Amplitude $a(t)$ in zwei Skalierungsstufen dar: i) so skaliert,

dass die einzelnen Schwingungen sichtbar sind und ii) dass die einhüllende Funktion der Schwebung deutlich erkennbar ist. Skizzieren Sie in ii) eine Schwingung mit der Frequenz Δf.

c) Die Lautstärkewahrnehmung ist proportional zur mittleren übertragenen Leistung der Schallwellen. Diese ist proportional zum Quadrat der Amplitude $a(t)$. Erstellen Sie in CASSY eine Abbildung mit $a(t)^2$ und tragen Sie in diesem Diagramm die Periodendauer der empfundenen Lautstärkemodulation der Schwebung ein. Welche Frequenz hat die empfundene Lautstärkemodulation?

3.5 Zusatz: Frequenzspektren verschiedener Schallquellen

schwingende Saite – verschiedene Seitenlängen

1) Untersuchen Sie die drei Frequenzspektren des Monochords mit der fest eingespannten Saite wenn die Anregung in der Mitte und bei $\frac{1}{4}L$ oder $\frac{1}{8}L$ erfolgt.
2) Kennzeichen Sie in den drei Frequenzspektren die Grundfrequenz f_1 und die höheren harmonischen Schwingungen f_n. Welche qualitativen Aussage können Sie über die Amplituden der höheren Harmonischen angeben, wenn Sie die Spektren zu den unterschiedlichen Anregungspunkten miteinander vergleichen?

weitere Schall- und Klangquellen

1) Am Arbeitsplatz stehen verschiedene Musikinstrumente zur Verfügung. Zeichnen Sie deren unterschiedlichen Klänge als Frequenzspektren auf. Auch können Sie versuchen, mit Ihrer Stimme den Kammerton a^1 der Stimmgabel möglichst genau wiederzugeben ☺.
2) Beobachten Sei bei Ihren Versuchen insbesondere die Amplitude der Grundschwingung f_1 und deren Verhältnis zu den höheren harmonischen Schwingungen zu $f_n = nf_1$. Der Klang eines Instrumentes definiert sich durch die Verhältnisse der Amplituden einzelner Obertöne (höhere Harmonische). Geräusche - probieren Sie Händeklatschen- hingegen haben keinen eindeutigen Grundton und sind nichtperiodisch.

4 Vorbereitung, Fragen und Berechnungen vor Versuchsantritt

Die Physik dieses Versuches finden Sie in einschlägigen Lehrbüchern unter der Thematik „Schwingungen und Wellen" zum Beispiel in [1, 2]. Insbesondere wird in [2, Kap.12.7] die Resonanz einer stehenden Seilwelle diskutiert.

Das verwendete Monochord ist in der Ref. [3] im Abschnitt F Kap. 1.3 beschrieben. Als Vorbereitung auf die Fourieranalyse sollten Sie die Idee der Fouriertransformation verstanden haben. Eine Einführung erhalten Sie am Anfang des Abschnittes F in Ref. [3]. Informationen zur Schwebung finden Sie ebenfalls in diesem Buch im Kapitel zu gekoppelten Pendeln und in F 1.1.

1) Wann ist eine Schwingung – im physikalischen Sinne – harmonisch? Nennen Sie Beispiele von unharmonischen Schwingungen welche dennoch periodisch sind?
2) Was sind höhere harmonische Schwingungen?
3) Was ist der Zusammenhang zwischen der Periodendauer T, der Frequenz f und der Kreisfrequenz ω einer Schwingung?
4) Skizzieren Sie die harmonische Schwingung $a(t) = a_1 \cos(\omega t)$ und $b(t) = a(t)^2$. Ist $b(t)$ ebenfalls harmonisch? Tragen Sie die Parameter Amplitude und Periodendauer ein. Welche Periodendauer hat $b(t)$ bezüglich $a(t)$?
5) Was ist der Unterschied zwischen einer Welle und einer Schwingung?
6) Leiten Sie Gl. (1) aus $f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\varrho A}}$ her und zeigen Sie, dass der Ausdruck die Dimension einer Frequenz besitzt.
7) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle, deren Frequenz und Wellenlänge? Was ist der Unterschied zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit?
8) Ist bei Schallwellen in Luft die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz abhängig?
9) Was bedeuten die || bei der Amplitude $|\hat{A}(f)|$ im Frequenzspektrum von $a(t)$?
10) Was besagt das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem in diesem Zusammenhang?

5 Literatur

Ein sehenswertes Video mit Ton (Englisch) beschreibt die Fouriertransfomation sehr anschaulich: https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY&t=58s.

[1] D. Meschede, *Gerthsen Physik*. Springer, 25. Auflage, 2015, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5.

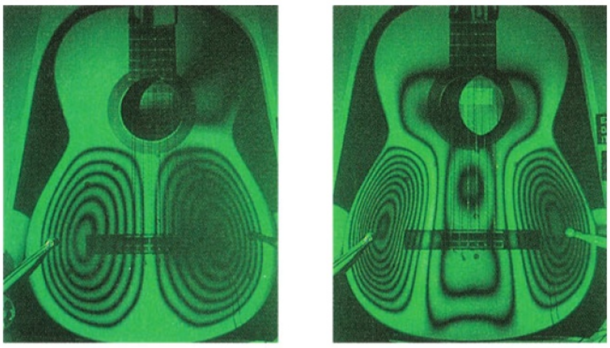
[2] P. A. Tipler, *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 2019, https://doi.org/10.1007/978-3-662-58281-7.

[3] W. Schenk and F. Kremer (Hrsg.), *Physikalisches Praktikum*. Springer, 14. Auflage, 2014, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2.

[4] W. Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*. Springer, 2018, https://doi.org/10.1007/978-3-662-54847-9.

6 Zusatzmaterial

- Die Eigenfrequenz oder auch Grundschwingung wird manchmal mit f_0 und manchmal mit f_1 bezeichnet. Letzteres in Anlehnung, dass es die erste Harmonische ist. Welche benutzt wird ergibt sich aus dem Kontext.
- Das Dach „ˆ“ bei der Amplitude $\hat{A}(f)$ weißt hier darauf hin, dass diese Funktion eine komplexwertige Funktion ist, auch wenn das zugrundeliegende Signal $a(t)$ reell ist.
- Die Abbildung $a(t) \longleftrightarrow \hat{A}(f)$ vom Zeit- in den Frequenzraum ist eineindeutig und somit umkehrbar. Dies bedeutet ebenfalls, dass das vollständige komplexwertige Fourierspektrum $\hat{A}(f)$ die selbe Information wie das zugrundeliegende Zeitsignal hat. Dies gilt nicht mehr für das Amplitudenspektrum $|\hat{A}(f)|$, es fehlt die Phaseninformation. Das ursprüngliche Signal $a(t)$ kann nicht wieder aus $|\hat{A}(f)|$ rekonstruiert werden.
- Holographische Interferogramme einer Gitarre bei zwei verschiedenen Anregungsfrequenzen. Die abwechselnden hellen und dunklen Streifen entstehen Aufgrund der Auswölbungen/Einbuchtungen des Gitarrendeckels. Zwischen dem Hell-Dunkel-Hell-Punkten ist ein Höhenunterschied von der Wellenlänge $\lambda \approx 0.5\,\mu m$ des verwendeten Lichtes, siehe auch Versuch „Newtonsche Ringe“. In der linken Abbildung ist eindeutig *ein* Wellenberg und *ein* Wellental zu erkennen, wobei der gegenseitige Höhenunterschied mehrere Wellenlängen(Interferenzodnungen) beträgt.



Die Abb. ist Ref. [2] entnommen.

- Eine Abbildung aus Ref. [4].

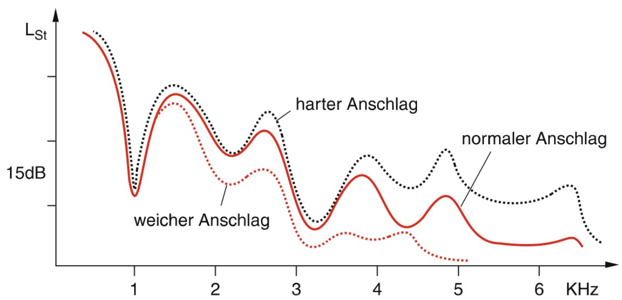


Abb. 11.96. Frequenzspektrum der C_4-Saite ($\nu_0 = 262\,\text{Hz}$) des Klaviers bei weichem, normalen und hartem Anschlag