Drehbewegungen

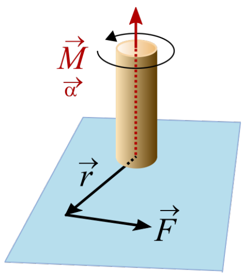
Beschreibt man einen Körper als Punktmasse, kann seine Bewegung auf die Translation seines Schwerpunktes reduziert werden. Berücksichtigt man jedoch die Ausdehnung des Körpers und die räumliche Verteilung seiner Masse um den Schwerpunkt, liefert die Rotation einen zusätzlichen Freiheitsgrad für den Bewegungszustand. Zu jeder physikalischen Größe der Translationsbewegung gibt es eine äquivalente Größe für die Rotation, z.B. Masse - Trägheitsmoment, Ortskoordinate - Winkel, usw. Das Trägheitsmoment hängt von der aktuellen Rotationsachse ab.

1 Lernziele

- Definition und Einheit von: Winkel, Winkelgeschwindigkeit, Trägheitsmoment, Drehmoment, ...
- Die Massenverteilung ist entscheidend für das Trägheitsmoment I, Einheit $[I] = \mathrm{kg\,m^2}$
- Das Trägheitsmoment ist additiv, $I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + \cdots$.
- Die Rotationsenergie ist $E_{\text{rot}} = \frac{I}{2} I\omega^2$, vergleichen Sie es mit $E_{\text{trans}} = \frac{m}{2} v^2$.
- Satz von Steiner: Trägheitsmoment $I = I_0 + m\,r^2$.
- Beim numerischen Differenzieren verstärkt sich das Messrauschen extrem.

2 Experimentelle Aufbauten

- Drehscheibe mit Trägheitsmoment I_0
- Gewichte m_i mit $(\{100,200,300\} \pm 1)$ g zur Erzeugung des Drehmomentes $\vec{M}$
- zwei Testmassen aus Messing
- Winkelsensor am `Sensor-Cassy` zur Aufnahme des Winkels $\varphi(t)$ als Funktion der Zeit
- `Cassy`-Template auf dem Desktop
- Rollbahn mit verschiedenen Zylindern und Laserentfernungsmesser



3 Messung - Durchführung - Auswertung

3.1 Drehmoment, Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment I_0

Zeigen Sie, dass die Winkelbeschleunigung $\alpha = |\vec{\alpha}|$ proportional zum antreibenden Drehmoment ist, $\vec{M} = I_0\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F}$. Bestimmen Sie experimentell das Trägheitsmoment I_0 der Grundplatte und vergleichen Sie es mit Ihrem Ergebnis aus der Versuchsvorbereitung.

Es stehen drei Gewichte m_i zur Verfügung, welche mit einem Faden über eine Umlenkrolle mit der Grundplatte verbunden sind. Deren Gewichtskraft erzeugt ein Drehmoment $\vec{M}$ an der Drehscheibe. Die Umlenkrolle ist gleichzeitig ein Winkelencoder, welcher mit dem `Sensor-Cassy` verbunden ist. Sie können instantan den Winkel φ, die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung α am Bildschirm sehen.

1) Bestimmen Sie für jedes Gewicht m_i die Winkelbeschleunigung α aus dem erfassten Winkel $\varphi(t) = \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2 + \varphi_0$. Passen Sie dazu eine Parabel an die Winkel $\varphi(t)$ im `Cassy-Lab` an. Eine Anleitung zur Benutzung von `Cassy-Lab` liegt am Experimentierplatz aus.
2) Wiederholen Sie die Messung mehrmals, um $u(\alpha)$ zu bestimmen.
3) Drucken Sie ein beispielhaftes Bildschirmbild zur Bestimmung der Winkelbeschleunigung für Ihre Unterlagen aus.

Auswertung:

a) Berechnen Sie das jeweilige angreifende Drehmoment $\vec{M}_i$ für die Massen m_i. Der Abstand $\vec{r}$ von der Drehachse wo das Drehmoment angreift beträgt (2.5 ± 0.1) cm.
b) In welche Richtung zeigen $\vec{\alpha}$ und $\vec{M}$?
c) Bestimmen Sie jeweils das mittlere $\bar{I}_0$ zu den drei Gewichten m_i.
d) Berechnen Sie aus $u(\alpha_i)$ die zugehörige Unsicherheit $u(I_0)$. Welche Größe gibt den größten Beitrag?
e) Überlegen Sie, mit welchem der drei Gewichte Sie den präzisesten Wert für I_0 erhalten? Begründen Sie dies kurz in Ihrem Laborbuch.
f) Vergleichen Sie das gemessene I_0 und $u(I_0)$ mit Ihrer Berechnung von I_0 vor Versuchsantritt. Diskutieren Sie mögliche Abweichungen.

3.2 Superpositionsprinzip

Das Tragheitsmoment ist wie die Masse eine additive Größe. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des roten Stahlzylinders in dem Sie diesen zusammen mit der Grundplatte beschleunigen.

1) Legen Sie den roten Stahlzylinder mittig auf die Grundplatte.
2) Benutzen Sie zur Drehmomenterzeugung das Gewicht, das Ihrer Analyse nach den präzisesten Messwert liefert.
3) Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung.

Auswertung:

Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_{rot} und vergleichen Sie dieses mit Ihrer Berechnung vor Versuchsantritt.

3.3 Satz von Steiner

Es werden auf der Drehscheibe zwei Zusatzmassen im Abstand r von der Drehachse mit der Masse m_z und dem Trägheitsmoment I_z angebracht. Das resultierende Drehmoment ist $I_{\text{ges}} = I_0 + 2I_z + 2m_z r^2$.

1) Bestimmen Sie die Maße und das Gewicht der Zusatzmassen aus Messing. Notieren Sie ebenfalls die Messunsicherheiten in Ihrem Laborbuch.
2) Benutzen Sie zur Drehmomenterzeugung das Gewicht, das Ihrer Analyse nach den präzisesten Messwert liefert.
3) Legen Sie die zwei Zusatzmassen in mehreren Abständen r_i symmetrisch auf die Drehscheibe auf und bestimmen Sie die zugehörigen Winkelbeschleunigungen $\alpha_i(r_i)$. Entscheiden Sie selber, wie viele und welche Abstände Sie wählen um eine aussagekräftige Abbildung zu erhalten.

Auswertung:

a) Berechnen Sie die jeweiligen Trägheitsmomente $I_{\text{ges}}(r_i)$.
b) Erstellen Sie ein Diagramm $I_{\text{ges}}(r)$.
c) Führen Sie eine lineare Regression mit der benutzerdefinierte Fitfunktion $y = a + bx^2$ durch[a].
d) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_z aus den Abmessungen und dem Gewicht der Zusatzmassen. Hinweis: Das Trägheitsmoment des Gewindestifts zur Arretierung kann vernachlässigt werden.
e) Berechnen Sie die Unsicherheit $u(I_z)$ aus Ihren Messunsicherheiten. Welche Messgröße liefert den größten Beitrag?
f) Vergleichen Sie die ermittelten Fitparameter a und b mit Ihren gemessenen/berechneten Größen. Verwenden Sie für den Vergleich auch Ihre berechneten Messunsicherheiten und die ausgegebenen statistischen Unsicherheiten für die Fitparameter.

3.4 Abrollen auf der geneigten Ebene

Ausgedehnte Körper können neben Translations- auch Rotationsenergie haben. Untersuchen Sie das Weg-Zeit-Gesetz für abrollende Zylinder mit gleichen Außenmessungen aber unterschiedlichen radialen Massenverteilungen.

1) Bestimmen Sie den Anstellwinkel β der geneigten Ebene.
2) Erfassen Sie analog zu 3.1 den Weg $s(t)$, die Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ für die 3 Probenkörper. Eine Anleitung liegt vor Ort aus.
3) Bestimmen Sie die translatorische Beschleunigung $\bar{a}$ für die drei Probenkörper durch Anpassung von $s(t)$ an ein Polynom 2. Ordnung.
4) Drucken Sie ein beispielhaftes Bildschirmbild zur Bestimmung der translatorischen Beschleunigung für Ihre Unterlagen aus.

Auswertung:

Berechnen Sie aus den angepassten Beschleunigungen $\bar{a}$ die jeweiligen Trägheitsmomente der Körper. Die Gleichung dafür haben Sie bereits bei der Vorbereitung ermittelt.

[a] Diese Fitfunktion ist linear in den Parametern a und b, die Abhänigkeit in x ist beim Fitten nicht entscheidend.

4 Vorbereitung und Fragen

Erarbeiten Sie sich die Grundlagen der Drehbewegung als Vorbereitung auf diesen Versuch. Ein direkter Vergleich mit den Größen und Formeln der Translation ist sehr hilfreich. Beantworten Sie die Fragen und die Berechnungen vor Versuchsantritt in Ihrem Laborbuch.

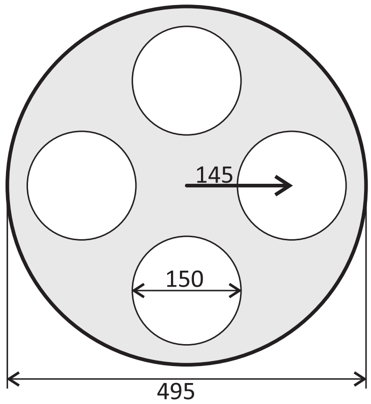
1) Wie ist die Umrechnung zwischen den Einheiten rad und °?
2) Was bedeutet ein Drehwinkel von 720° und ein Winkel von -420°?
3) Was sind die Formelzeichen und Einheiten von Winkel, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Trägheitsmoment, Drehmoment und Drehimpuls.
4) Wie lauten die entsprechenden Formeln bei Rotation: $E = \frac{m}{2}v^2$, $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{p} = m\vec{v}$.
5) Was besagt der Satz von Steiner?

Berechnungen vor dem Versuch

6) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Grundplatte (kreisrunde PVC-Scheibe mit vier kreisrunden Löchern) und des roten Probenkörpers (Zylinder aus Stahl), die Abmessungen sind:

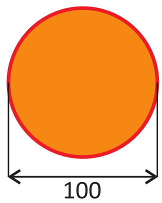
Grundplatte - PVC

ϱ = 1.36 g/cm³ h = (12±0.2) mm



Probenkörper rot - Stahl

m = (1993±3)g, h = (12±0.3) mm



7) Abrollen auf der geneigten Ebene: Ein Zylinder mit der Masse m und dem Radius R rolle reibungsfrei auf einer geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel β herab. Leiten Sie eine Gleichung für die translatorische Beschleunigung $a(t)$ ab, welche das Trägheitsmoment des Körpers berücksichtigt.
8) Begründen Sie mit dem Ergebnis aus 5): Was rollt schneller eine geneigte Ebene herab, eine volle oder eine leere Dose? Die Dosen haben den gleichen Außendurchmesser sind aber selbstverständlich unterschiedlich schwer.
9) Wie groß ist die Translationsbeschleunigung a eines Vollzylinders mit der Masse $m = 875\,\mathrm{g}$ und dem Durchmesser $D = 79.5\,\mathrm{mm}$ auf einer Ebene mit dem Neigungswinkel von 5°? Wie lange benötigt der Zylinder für eine Wegstrecke von 1.5 m?
10) Zusatz: Leiten Sie eine Gleichung für die Translationsbeschleunigung a eines Zylinder auf der schiefen Ebene ab, wenn eine konstante Reibungskraft F_{Reib} wirkt.

5 Literatur

[1] W. Demtröder, *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*. Springer, 2015, `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-46415-1`.

[2] W. Schenk and F. Kremer (Hrsg.), *Physikalisches Praktikum*. Springer, 14. Auflage, 2014, `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2`.

[3] D. Meschede, *Gerthsen Physik*. Springer, 25. Auflage, 2015, `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5`.

[4] P. A. Tipler, *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 2015, `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-54166-7`.