

Mechanik der Flüssigkeiten

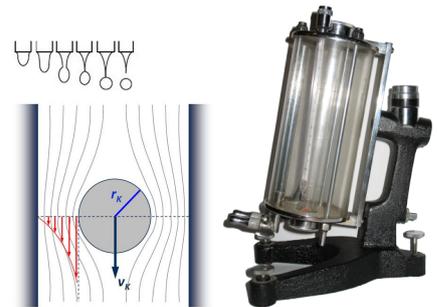
Die Grenzflächenspannung und die Viskosität sind wichtige Materialeigenschaften von Flüssigkeiten. Die Grenzflächenspannung γ zwischen nicht mischbaren Stoffen entsteht durch die wechselseitige Anziehung der Atome/Moleküle eines Materials. Diese Materialien können auch unterschiedliche Aggregatzustände haben, z. B. flüssig–fest, flüssig–gasförmig, fest–gasförmig und flüssig–flüssig. Insbesondere die Spannung flüssig–gasförmig wird Oberflächenspannung genannt. Die Viskosität einer Flüssigkeit oder eines Gases charakterisiert die Zähigkeit des strömenden Materials und beschreibt die Energieumwandlung in Wärme aufgrund der inneren Reibung innerhalb der Flüssigkeit/Gases. Das Fachgebiet zur Untersuchung der Viskosität wird Rheologie genannt.

1 Lernziele

- Die Grenzflächenspannung zwischen Flüssigkeit und Gas wird auch Oberflächenspannung genannt.
- Die drei Grenzflächenspannungen zwischen Fest/Flüssig/Gas beschreiben Benetzung.
- Die Größe abreißender Tropfen wird durch die Oberflächenspannung und dem Radius der Kapillare bestimmt.
- Es gibt die dynamische Viskosität η in Pa s und die kinematische Viskosität ν in $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$.
- Die Viskosität η von Flüssigkeiten nimmt mit der Temperatur stark ab, bei Gasen nimmt sie zu.
- Die dimensionslose Reynolds-Zahl erlaubt die Abschätzung zur Unterscheidung zwischen laminar und turbulenter Strömung, wobei der Übergang fließend ist.
- Bei laminarer Strömung ist die Stokes-Reibungskraft auf eine Kugel $F_{\text{Stokes}} = 6\pi\eta R v$.
- Der Unterschied zwischen Größtfehlerrechnung und Gauß'scher Fehlerfortpflanzung

2 Experimenteller Aufbau

- Pipettenflaschen, Präzisionswaage,
- Wasser mit $\rho = 0.998 \text{ g/cm}^3$; $\gamma_{20^\circ\text{C}} = 75.75 \pm 0.05 \text{ N/m}$
- Alkohol mit $\rho = 0.789 \text{ g/cm}^3$; $\gamma_{20^\circ\text{C}} = 22.55 \pm 0.05 \text{ N/m}$
- Stoppuhr,
- Kugelfallviskosimeter nach Höppler mit temperierbaren Wasserbad, Temperatursensor,
- langes Fallrohr, zwei Sorten Stahlkugeln, groß und klein



3 | Messung - | Durchführung - | Auswertung

3.1 Oberflächenspannungsverhältniss aus dem Tropfenabriss

Die Oberflächenspannung bestimmt das maximale Gewicht eines Tropfens an eine zylindrischen Kapillare mit dem Radius r , siehe „Tropfenmethode“ Mechanik Kapitel M-5.3 in [1]. Da der Radius des abreißenden Tropfens *nicht* dem Kapillardurchmesser entspricht müsste zur exakten Bestimmung der Oberflächenspannung die vollständige Tropfenform analysiert werden. Diese Methode wird *Drop Shape Analysis* genannt. In Praktikum soll das *Verhältnis* der Oberflächenspannung von Wasser zu Ethanol γ_W/γ_E bestimmt werden. Es wird davon ausgegangen, dass bei der Verwendung baugleicher Kapillaren das Gewicht der Tropfen direkt proportional zur Oberflächenspannung ist und somit

$$\frac{\gamma_W}{\gamma_E} = \frac{m_W}{m_E} = \Phi \quad , \quad (1)$$

mit den Oberflächenspannungen γ und den Massen m jeweils eines Wasser- oder Ethanoltröpfens, sowie dem Verhältnis Φ .

Wir wollen die Daten zu den Einzeltropfen ebenfalls nutzen um einen wichtigen Unterschied zwischen Größtfehlerrechnung und Gauß'scher Fehlerrechnung kennen zu lernen.

Bestimmen Sie zuerst die mittlere Masse eines einzelnen Tropfens und der zugehörigen Messunsicherheit aus einer statistischen Analyse.

- 1) Benutzen Sie ein Auffangschälchen auf der Präzisionswaage und setzen Sie die Anzeige der Waage auf 0 mit der Funktion Tara -O/T-.
- 2) Tropfen Sie einen Tropfen Wasser in das Schälchen und warten Sie mit dem Ablesen der Masse bis die Waage sich eingestellt hat, wobei der o erlischt.
- 3) Auf dem Computer ist eine Software installiert, womit der Anzeigewert der Waage protokolliert wird. Fehlmessungen und doppelte Messungen werden später bei der Auswertung eliminiert.
- 4) Führen Sie für die weiteren Tropfen *kein* erneutes Tara durch. Sie können bei der späteren Auswertung am Computer einfach die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Massen bestimmen. Dies spart Ihnen viel Zeit und ist genauer, als wenn Sie bei jeder Messung ein erneutes Tara durchführen. In SciDAVis kann die Berechnung der Differenz von aufeinanderfolgenden Elementen einer Spalte mit der Formel `col(1,i+1)-col(1,i)` erfolgen. Es ergeben sich die Einzelmassen, wenn der erste Eintrag in der Spalte 0 ist.
- 5) Messen Sie die aufsummierten Massen für mehr als 100 Tropfen Wasser.
- 6) Um ein Gefühl für die Reproduzierbarkeit der Tropfen-Größe/Masse zwischen *verschiedenen* Pipetten zu erhalten, führen Sie die gleiche Messung mit Wasser noch einmal mit einer zweiten Pipette mit 20 Tropfen durch.
- 7) Bestimmen Sie analog die aufsummierten Massen von Ethanol für 20 Tropfen.

Auswertung - Fehlerrechnung und Statistik für Fortgeschrittene ☺:

- a) Erstellen Sie einen Scatter-Plot der Tropfenmassen und löschen Sie offensichtliche Fehlmessungen.
- b) Bestimmen Sie von den Tropfen der Pipette **1** die mittlere Tropfenmasse m_1 und die Standardabweichung s_1 .
- c) Berechnen Sie den zugehörigen äquivalenten Tropfenradius r , welcher einer Kugel mit dem gleichen Volumen wie dem Tropfen entspricht um eine Vorstellung von deren Größe zu bekommen.
- d) Wir wollen untersuchen, was die Messunsicherheit einer Abwägung mit 10 Tropfen ist. Mit der Standardabweichung s_1 eines einzelnen Tropfens können Sie auch die Unsicherheit der Masse $m_{10} = \sum m_i$ von 10 Tropfen bestimmen. Nach Größtfehlerrechnung ergäbe sich $u(m_{10}) = 10 s_1$. Dies ist jedoch eine starke Überschätzung (worst case) weil sich Abweichungen auch ausgleichen können. Daher kommt auch der Name **Größtfehlerrechnung**. Mathematisch ergibt sich die Standardabweichung s_{10} aus der Fortpflanzung einzelner unabhängiger Standardabweichungen s_i nach

$$s_n = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} s_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} s_2\right)^2 + \dots} = \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} s_i\right)^2} \Rightarrow s_{10} = \sqrt{10} s_1 \quad . \quad (2)$$

Das ist die *Gaußsche Fehlerfortpflanzung*, nicht die Größtfehlerabschätzung.

- e) Um dies zu überprüfen, teilen Sie Ihren Datensatz Pipette **1** in 10 Spalten á 10 Werte auf.
- f) Bestimmen Sie für jede Spalte die 10 Massen $m_{10} = \sum m_i$. Hinweis: In SciDAVis können Sie mit gedrückter **Strg**-Taste mehrere Spalten markieren und **Analysis > Statistics on Columns** auch die Summen m_{10} errechnen. Die Mittelwerte und Standardabweichungen sollten um die eines einzelnen Tropfen streuen.
- g) Berechnen Sie von diesen 10 m_{10} den Mittelwert \bar{m}_{10} und die Standardabweichung s_{10} . Überprüfen Sie ob gilt $\bar{m}_{10} \approx 10 \cdot m_1$ und $s_{10} \approx \sqrt{10} \cdot s_1$.
- h) Bestimmen Sie von Pipette **2** die mittlere Tropfenmasse und deren Standardabweichung. Vergleichen Sie diese mit den Werten von Pipette **1**. Ist der Mittelwert der Tropfengröße von der einen Pipette im 1σ -Konfidenzintervall der anderen?
- i) Berechnen Sie analog die mittlere Masse und die Standardabweichung für *einen* Alkoholtropfen.
- j) Berechnen Sie das Verhältnis Φ der Oberflächenspannungen Wasser zu Alkohol und die zugehörige Messunsicherheit $u(\Phi)$ nach Größtfehlerrechnung mit den bestimmten Standardabweichungen der Tropfenmassen. Vergleichen Sie Ihr ermitteltes Oberflächenspannungsverhältnis $\Phi \pm u(\Phi)$ mit dem berechneten Verhältnis aus tabellarisierten Werten (siehe 2 Experimenteller Aufbau).

3.2 Temperaturabhängigkeit der Viskosität einer Glycerin-Wasser Mischung

Es wird ein Kugelfallviskosimeter nach Höppler mit Temperierung verwendet. Durch die Schrägstellung des Fallrohrs ist die Kugelbewegung wohl definiert und erlaubt gut reproduzierbare Messwerte. Es ist mit einer Glycerin-Wasser Mischung der Dichte $\rho_{\text{Gly}} = (1250 \pm 0.05) \text{ kg m}^{-3}$ gefüllt. Die Dichte der verwendeten Stahlkugel ρ_K und die Kugelkonstante K sind am Viskosimeter angegeben.

- 1) Das Fallrohr hat 3 Markierungen: Start, die halbe Fallzeit und die gesamte Fallzeit t .
- 2) Wenn Sie die rückseitige Arretierung lösen, können Sie den Glaskörper ! **vorsichtig** ! um 180° drehen und die Kugel fällt erneut.
- 3) Notieren Sie die gemessene Wassertemperatur (Raumtemperatur) mit ihrer Unsicherheit. Die Pumpe des Wasserbades bleibt ausgeschaltet.
- 4) Erfassen Sie mindestens zwei mal die Fallzeiten zwischen Start, der Markierung für $t_{1/2}$ und für die gesamte Fallzeit t . Vermeiden Sie einen Parallaxenfehler bei der Beobachtung.
- 5) Ermitteln Sie die mittlere Fallzeit \bar{t} und schätzen Sie die Unsicherheit $u(\bar{t})$.
- 6) Stellen Sie die Temperaturregler des Wasserbades auf 30°C ein und schalten Sie das Wasserbad ein. Die Pumpe befördert nun kontinuierlich Wasser durch das Viskosimeter. Ermitteln Sie die Fallzeiten für die Temperaturen $T_i = \{30^\circ\text{C}; 40^\circ\text{C}; 50^\circ\text{C}; 60^\circ\text{C}\}$. Beachten Sie, dass die vorgegebenen Temperaturen nur ungefähre Werte darstellen. Für Ihre Datenauswertung verwenden Sie immer die gemessene Wassertemperatur.
- 7) Da das Erwärmen des Wasser bis auf die neue Temperatur verhältnismäßig lange dauert, beginnen Sie bereits mit den Messungen für das lange Fallrohr.

Auswertungen: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Glycerin

- a) Berechnen Sie die dynamischen Viskositäten $\eta(T_i)$ des Glycerin-Wasser Gemisches nach

$$\eta = K(\rho_K - \rho_{\text{Gly}})t \quad . \quad (3)$$

Die Kugelkonstante K und deren Dichte ρ_K ist am jeweiligen Viskosimeter angegeben.

- b) Stellen Sie $\eta(T)$ grafisch dar.
- c) Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität folgt der Arrhenius-Andrade-Beziehung

$$\eta(T) = \eta_0 \exp\left(\frac{E_A}{N_A k_B T}\right) \quad , \quad T_i \text{ in Kelvin} \quad , \quad N_A k_B = R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \quad (4)$$

mit E_A als molare Aktivierungsenergie. Erstellen Sie zur grafischen Überprüfung dieser Beziehung eine weitere Abbildung mit $1000/T_i$ für die Abszisse und einer Ordinate mit $\ln(\eta[\text{Pa s}])$. Es sollte sich eine Gerade ergeben.

- d) Fitten Sie Ihre Daten an die Arrhenius-Andrade-Beziehung (4) an, um η_0 und die molare Aktivierungsenergie E_A zu ermitteln^a. Beachten Sie, dass η_0 der Viskosität bei sehr hohen Temperaturen entspräche und hier eher ein abstrakter Wert ist.
- e) Überlegen Sie, bei welcher Ihrer Messungen die *relative* Messunsicherheit $u_{\text{rel}}(\eta)$ des gemessenen η basierend auf Gleichung (3) am größten sein wird? Schätzen Sie $u(t)$ ab und berechnen Sie die zugehörige relative Unsicherheit aus der Größtfehlerrechnung für die Gl. (3).
- f) Am Arbeitsplatz liegt ein Diagramm/Tabelle zur Viskosität von Glycerin-Wassergemischen bei verschiedenen Konzentrationen und Temperaturen aus.

^aHinweis: Führen Sie keine Regressionen an linearisierte Zusammenhänge durch, wie im Punkt zuvor zur grafischen Überprüfung dargestellt. Die nichtlinearen Transformationen führen zu unterschiedlichen Gewichtungen der Messwerte und es ergeben sich etwas abweichende Fitparameter. Benutzen Sie daher in solchen Fällen eine nichtlineare Regression.

3.3 Stokes Reibung beim freien Fall

Sir George Gabriel Stokes leitete 1851 erstmals aus der Navier-Stokes-Gleichung die Reibungskraft auf eine Kugel mit der Geschwindigkeit v und dem Radius R in einer unendlich ausgedehnten, ruhenden Flüssigkeit der Viskosität η zu $F_{\text{Stokes}} = 6\pi\eta Rv$ ab. Bei der Bewegung in einer engen Röhre wird die Reibungskraft größer und es gibt einen empirischen Korrekturfaktor nach A. Ladenburg $\propto r_{\text{Kugel}}/r_{\text{Rohr}}$. In Ihrem Experiment wird ein senkrecht, zirka 1 m langes Glasrohr mit reinem Glycerin $\rho_{\text{Fl}} = 1250 \text{ kg m}^{-3}$ verwendet. Es stehen zwei Stahlkugelsorten mit unterschiedlichen Radien zur Verfügung.

- 1) Bestimmen Sie die Durchmesser und Dichten der Kugelsorten.
- 2) Jede Kugelsorte hat ihren Einfülltrichter mit jeweils passender Austrittsöffnung, damit die Kugel möglichst zentrisch in das Rohr fallen.
- 3) Das Fallrohr hat ebenfalls Markierungen für Anfang und Ende. Bestimmen Sie mehrmals die Fallzeiten für die jeweilige Kugelsorte und schätzen Sie daraus die Messunsicherheit ab.

Auswertungen: Stokes Reibung beim freien Fall

- a) Berechnen Sie die Viskositätswerte für die zwei mittleren Fallgeschwindigkeiten nach Stokes

$$\eta_{\text{Stokes}} = \frac{V_{\text{K}} (\rho_{\text{K}} - \rho_{\text{Fl}}) g}{6\pi r_{\text{K}} v_{\text{K}}} \quad \text{mit } V_{\text{K}} - \text{Volumen Kugel.} \quad (5)$$

- b) Berechnen Sie die Viskositätswerte für die zwei mittleren Fallgeschwindigkeiten mit Ladenburg-Korrektur

$$\eta_{\text{Ladenburg}} = \frac{V_{\text{K}} (\rho_{\text{K}} - \rho_{\text{Fl}}) g}{6\pi r_{\text{K}} v_{\text{K}} \left(1 + 2.1 \frac{r_{\text{K}}}{r_{\text{R}}}\right)} \quad \text{mit } r_{\text{K}/\text{R}} - \text{Radius Kugel/Rohr.} \quad (6)$$

- c) Berechnen Sie die vorliegende Reynolds-Zahl für die großen Kugeln

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{Fl}} L v}{\eta} \quad \text{mit } L - \text{Kugeldurchmesser.} \quad (7)$$

- d) Am Arbeitsplatz liegt ein Diagramm zur Viskosität von Glycerin-Wassergemischen bei verschiedenen Konzentrationen und Temperaturen aus. Passt Ihr Wert zu den Tabellenwerten?
- e) Zusatz: Versuchen Sie die Unsicherheiten $u(\eta_{\text{Stokes}})$ und $u(\eta_{\text{Ladenburg}})$ möglichst effizient abzuschätzen. Hinweis: es werden keine Ableitungen benötigt.

4 Vorbereitung und Berechnungen vor Versuchsbeginn

- 1) Was sind die physikalischen Ursachen und die Definitionen und Einheiten der Oberflächenspannung und Viskosität?
- 2) Skizzieren Sie das Kräfte diagramm mit $\gamma_{\text{f/fl/g}}$ (fest/flüssig/gas) für den Kontaktwinkel α einer Flüssigkeit auf einem Festkörper. Wie berechnet sich α aus $\gamma_{\text{f/fl/g}}$?
- 3) Was sind die Unterschiede zwischen Größtfehlerrechnung und Gaußscher Fehlerfortpflanzung?
- 4) Zeigen Sie mit Gl. (2), dass die Standardabweichung $s_{\bar{X}}$ des Mittelwertes \bar{X} aus N Größen, jeweils mit der Standardabweichung s_X sich zu $s_{\bar{X}} = s_X/\sqrt{N}$ ergibt.
- 5) Zum Nachdenken: Was ist genauer, eine Flüssigkeitsmenge mit einer kleinen Pipette zu 30 Tropfen oder mit einer größeren Pipette zu 10 Tropfen abzumessen? Die Flüssigkeitsmengen sind gleich und die relativen Unsicherheiten der einzelnen Tropfen ebenfalls.
- 6) Was heißt Newtonsche Flüssigkeit, geben Sie Beispiele für *nicht*-Newtonsche Flüssigkeiten an.
- 7) Wie ist die Reynolds-Zahl definiert? Was ist ein laminarer und was ein turbulenter Fluss?
- 8) Was besagt die Arrhenius-Andrade-Beziehung?
- 9) Berechnen Sie aus der konstanten Sinkgeschwindigkeit des Morgennebels von zirka 10 m pro Stunde die Größe der Wassertröpfchen. Ist die Strömung laminar? Materialparameter finden Sie im Internet. Hinweis: Gravitationskraft und Reibungskraft heben einander auf.

5 Literatur

Die Kugelfallmethode und das Höppler-Viskosimeter sind im Buch [1] im Kap. 6 beschrieben.

- [1] W. Schenk and F. Kremer (Hrsg.), *Physikalisches Praktikum*. Springer, 14. Auflage, 2014, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2>.
- [2] D. Meschede, *Gerthsen Physik*. Springer, 25. Auflage, 2015, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5>.
- [3] P. A. Tipler, *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 2019, <https://doi.org/10.1007/978-3-662-58281-7>.