Elastizität, mech. Schwingungen, Resonanz

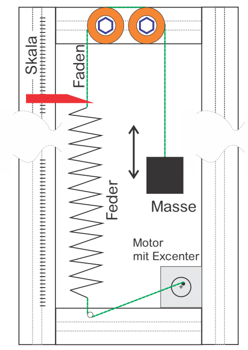
Die elastische Deformation/Dehnung von Festkörpern ist ein Teilgebiet der Mechanik. Das Hookesche Gesetz beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen der Spannung σ und der Dehnung ε auf Grund der reversiblen Abstandsvergrößerung zwischen Atomen/Ionen/Molekülen. Bei Elastomeren (Gummi) hingegen liegt eine Streckung der Polymerketten vor. Resonanz ist das verstärkte Mitschwingen bei einem schwingfähigen Systems mit einer periodischen Anregung, wobei die Anregungsfrequenz in der Nähe der Eigenfrequenz liegt. Resonanz tritt bei einer Vielzahl von Anwendungen auf.

1 Lernziele

- Hooke'sches Gesetz bei Festkörpern
- Spannungs/Dehnungs–Diagramm bei Elastomeren
- Schwingungen und deren Kenngrößen wie Amplitude, Frequenz, Kreisfrequenz, Periodendauer, ...
- Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ eines harmonischen Oszillators
- Resonanzverhalten in der Nähe der Eigenfrequenz beim angeregten harmonischen Oszillator mit schwacher und starker Dämpfung

2 Experimenteller Aufbau

- Metallrahmen mit Messlatte, Messunsicherheit $u(\ell) = 1\,\text{mm}$
- Messchieber, Messunsicherheit $u(\ell) = 0.1\,\text{mm}$
- Gewichtssatz
- Elastomerband (Gummiband) für den Spannungs-Dehnungs-Versuch
- Torsions(Spiral)feder, Masse $m_\text{F} = (105 \pm 2)\,\text{g}$
- Stoppuhr/Handy, $u(T) = 0.1\,\text{s}$
- Schrittmotor mit Steuerung zur Anregung der Schwingungen



3 Messung - Durchführung - Auswertung

3.1 Spannungs–Dehnungsdiagramm $\sigma(\varepsilon)$ Elastomer

Messen Sie das Spannungs-Dehnungsdiagramm $\sigma(\varepsilon)$ eines Elastomers (Gummiband).

1) Für die Berechnung der Spannung $\sigma = F/A$ benötigen Sie die Querschnittsfläche A des Elastomers wenn keine Belastung vorliegt (Ausgangsquerschnitt). Bestimmen Sie die Maße des rechteckigen Querschnitts mit dem Messschieber und notieren Sie die abgeschätzte Messunsicherheit.
2) Messen Sie die Anfangslänge ℓ_0 des Gummibandes und schätzen Sie die Messunsicherheit.
3) Der Rahmen hat oben eine Schraube zur Aufhängung des Gummibandes, eine Messlatte und einen Spiegel, um Parallaxenfehler beim Ablesen zu vermeiden. Messen Sie die Längenzunahme $\Delta\ell$ des Elastomers für zunehmende Belastungen mit $F_i = m_i g$. Verwenden Sie dazu den Gewichtssatz und kombinieren Sie die Gewichte. Lassen Sie das Gummiband bei Gewichtserhöhung nicht relaxieren. Dehnen Sie so das Gummiband -Vorsichtig!- bis kurz vor oder bis zum Reißen. Hinweis: Notieren Sie die Massen und den Ablesewert der Skala, die resultierenden Längenänderungen werden bei der Auswertung bestimmt.

Auswertung: Spannungs-Dehnungsdiagramm – Elastomer

a) Berechnen Sie die Ausgangsquerschnittsfläche A und die zugehörige relative Unsicherheit $u_{rel}(A)$ und die Unsicherheit $u(\sigma)$ für den Messpunkt mit der maximalen Dehnung. Beachten Sie, dass die Fläche doppelt zu zählen ist, weil der Gummi ein Ring ist. Siehe auch Kap. 6 Zusatzmaterial.
b) Erstellen Sie in QtiPlot eine Tabelle mit den Massen der Gewichte und den zugehörigen abgelesenen Auslenkungen y und erstellen Sie ein Diagramm $y(m)$.
c) Ermitteln Sie durch Extrapolation auf $m \to 0$ den Skalenwert y_0 für die unbelastete Auslenkung (Ablesen des Achsenschnittpunktes).
d) Fügen Sie weitere Spalten zu Ihrer Tabelle hinzu und berechnen Sie die jeweiligen Werte. Eine Spalte ΔL für die Längenänderung. Die Werte errechnen sich mit `Set column Values -> y0-col(y)`,

da mit größer werdender Auslenkung die Skalenwerte abnehmen. Eine weitere Spalte $\varepsilon = \Delta L/\ell_0$ für die relativen Dehnungen. Setzen Sie diese als `X-Column`. Eine Spalte für die Spannungen $\sigma = m\,g/A$ und eine Spalte, in die Sie ihre berechnete Unsicherheit $u(\sigma)$ bei der maximalen Auslenkung eintragen. Setzen Sie diese Spalte als `Y-Error`. Markieren Sie die drei Spalten ε, σ und $u(\sigma)$ (`STRG`-gedrückt halten) und erstellen Sie ein `Line+Symbol` Diagramm. Dieses Diagramm soll für einen Messpunkt die Messunsicherheit $\pm u(\sigma)$ als Fehlerbalken beinhalten.

e) Formatieren Sie Ihre Abbildung (Achsenbeschriftungen, Einheiten,...) und drucken Sie diese aus. Was sind die Unterschiede zwischen dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Elastomers und dem entsprechenden $\sigma(\varepsilon)$-Diagramm bei Festkörpern wie zum Beispiel Stahl?

3.2 Kraft-Weg-Diagramm $F(\Delta L)$ für die Torsionsfeder, k – statische Methode.

Wir messen das Kraft-Weg-Diagramm $F(\Delta\ell)$ für die Torsionsfeder und ermitteln daraus die Federkonstante k – statische Methode.

- Verwenden Sie den Aufbau 6(a) in Zusatzmaterial und messen Sie die Längenzunahme ΔL der Torsionsfeder bei einer Belastung mit Gewichten in 100 g Schritten bis 1 kg.
- Erstellen Sie das Kraft-Weg-Diagramm $F(\Delta L)$ und bestimmen Sie durch lineare Regression von $F = k \cdot \Delta L$ die Federkonstante k der verwendeten Torsionsfeder in N/m. Beachten Sie, dass die Regression durch den Koordinatenursprung gehen muss.

3.3 Ungedämpfte, freie Schwingung, k – dynamische Methode.

Die Federkonstante kann ebenfalls sehr gut aus der Eigenfrequenz des ungedämpften Federschwingers berechnet werden. Je größer die Masse, desto länger die Periodendauer. Die Masse der Feder m_F wird dabei berücksichtigt, da diese sich auch bewegt. Die genaue Rechnung zeigt, dass sie nur zu 1/3 eingeht.

- Verwenden Sie den Aufbau 6(a) mit der Torsionsfeder. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen f_1 und f_2 der Feder-Gewicht-Kombinationen für die zwei Gewichte $m_1 = 300\,\mathrm{g}$ und $m_2 = 600\,\mathrm{g}$. Lenken Sie die Massen vertikal aus und lassen Sie diese frei schwingen. Bestimmen Sie die Periodendauer T der (fast) ungedämpften Schwingung aus der gemessenen Zeit für mehrere Schwingungsperioden. Dies erhöht die Genauigkeit der der Periodendauerbestimmung.
- Berechnen Sie die Federkonstante k aus den zwei ermittelten Eigenfrequenzen $f_{1,2}$, beziehungsweise Kreisfrequenzen $\omega_{1,2} = 2\pi f_{1,2}$, mit $\omega_{1,2} = \sqrt{k/(m_{1,2} + m_\mathrm{F}/3)}$.
- Vergleichen Sie die ermittelten k-Werte mit dem Wert aus der Regression. Welche Methode ergibt Ihrer Meinung nach das genauste k? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

3.4 Amplitude des angeregten harmonischen Oszillators – Resonanz

Das System Feder-Masse wird mit einem Motor harmonisch angeregt. Harmonisch bedeutet in der Physik mit einer reinen Sinusbewegung. Wir Messen die Amplitude $A(f)$ der Schwingung als Funktion der Anregungsfrequenz f ohne zusätzliche Dämpfung.

1) Für das Experiment – *angeregter harmonischer Oszillator mit kleiner Dämpfung* – verwenden Sie den Aufbau 6(b) mit der Masse $m = 600\,\mathrm{g}$. Bereits die Reibung der Kugellager ist eine kleine aber deutlich messbare Dämpfung für das System. Notieren Sie sich die Ruheposition L_0 der Masse.
2) Mit Hilfe der Motorsteuerung können Sie dieses System mit einer variablen Frequenz f anregen. Nach dem Einschalten der Anregung beginnt sich das System einzuschwingen. Nach einigen Sekunden ist das System eingeschwungen und es stellt sich eine konstante Auslenkamplitude $2A(f) = \Delta L$ ein. Die Amplitude ist die Hälfte zwischen dem oberen und unteren Umkehrpunkt, zum Vergleich: $y(t) = A\,\sin(\omega t) + A_0$ dieses schwingt zwischen $A_0 - A$ und $A_0 + A$. Benutzen Sie den Schieber und den Spiegel um parallaxenfrei die Umkehrpunkte zu bestimmen.
3) Es nicht nötig, das System zwischen den Frequenzwechseln anzuhalten, jedoch müssen Sie abwarten, bis sich das System erneut eingeschwungen hat. Danach erst bestimmen Sie die zugehörige Auslenkamplitude.
4) Bestimmen Sie $A(f)$ für mindestens 10 Anregungsfrequenzen im Bereich von 0.5 Hz bis 2 Hz.

! Achtung auf der nächsten Seite !

!!! Achtung !!! Bei einer Anregungsfrequenz in der unmittelbaren Nähe der Resonanzfrequenz kann es passieren, dass die Amplitude immer weiter anwächst. Halten Sie in diesem Fall die Masse und die Feder fest und stoppen Sie die Anregung. !!! Verletzungsgefahr !!!
Für diese Frequenzen können Sie kein $A_1(f)$ bestimmen.

5) In der Umgebung der Resonanzfrequenz erhöhen Sie die Anregungsfrequenz nur in sehr kleineren Schritten, um mehr Datenpunkte zu erhalten.

Auswertung mit *nichtlinearer Regression*

a) Erstellen Sie das Diagramm $A(f)$ als `Scatter-Plot`.
b) Es soll der theoretische Funktionsverlauf als *nichtlinearer Fit* eingetragen werden. Nutzen Sie `Analyze -> Fit Wizard` für eine `User Defined Function`, siehe Zusatzmaterial in Kap. 6 um die Amplitudenfunktion zu definieren und die Anpassung durchführen. Beachten Sie dabei, dass der Fit-Algorithmus sinnvolle Anfangswerte für A_0, f_0 und δ benötigt. Er verändert diese und versucht so die optimalen Parameterwerte zu Ihren Messpunkten zu ermitteln. Überlegen Sie, was A_0 physikalisch bedeutet.
c) Notieren Sie A_0, die bestimmte Eigenfrequenz und Dämpfung in der korrekten Einheit in Ihrem Diagramm und drucken Sie dieses aus.

4 Vorbereitung, Fragen und Berechnungen vor Versuchsantritt

Erarbeiten Sie sich einen Überblick zu folgenden Schlagwörtern

1) Hooksches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm, Elastizitätsmodul mit Einheit
2) Ein Auto mit der Masse von einer Tonne hängt an einem 5 m langem Stahlseil mit einem Durchmesser von 1 cm. Das Elastizitätsmodul von Stahl ist $E = 180\,\mathrm{GPa}$. Um wie viel ist das Seil durch die Last länger geworden?
3) Schematischer Aufbau von Elastomeren
4) harmonischer Oszillator ohne Dämpfung, ohne Anregung: $y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$
   Lösung $y(t)$ mit Skizze
5) harmonischer Oszillator mit Dämpfung, ohne Anregung: $y''(t) + 2\delta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$
   Lösung $y(t)$ mit Skizze, Wie berechnet sich die Schwingungsfrequenz? Ist diese größer oder kleiner im Vergleich zum vorherigen System ohne Dämpfung?
6) harmonischer Oszillator mit Dämpfung und Anregung: $y''(t) + 2\delta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{F}{m}\cos(2\pi f t)$
   Skizze der Lösung $y(t)$, Amplitudenfunktion $A(f)$ des eingegeschwungenen Systems, Resonanzfrequenz f_R, Dämpfung δ, Phasenverschiebung zwischen Anregung und Systemantwort
7) Welchen Wert nimmt die Amplitude $A(f)$ des angeregten harm. Oszillators für die Grenzfälle $f \to 0$ und $f \to \infty$ an?

5 Literatur

Zur Gummielastizität finden Sie einige Anmerkungen im Zusatzmaterial.
Interessierte Leser finden in [1, Kap. M3.3] eine exakte Herleitung des Zusammenhanges zwischen dem Torsionsmodul G des Federmaterials und der Federkonstante k (dort als c bezeichnet). Des Weiteren finden Sie dort die Begründung, warum die effektive Masse bei der Federschwingung $m + m_F/3$ ist. Der harmonische Oszillator wird an mehreren Stellen in diesem Buch behandelt. Ebenfalls ist der Wikipediaartikel zur Resonanz lesenswert `https://de.wikipedia.org/wiki/Resonanz`. Ein Video in der Wikipedia verdeutlicht Ihnen, welche Auswirkungen die Resonanz haben kann `https://de.wikipedia.org/wiki/Tacoma-Narrows-Br%C3%BCcke`.

[1] W. Schenk and F. Kremer (Hrsg.), *Physikalisches Praktikum*. Springer, 14. Auflage, 2014, `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00666-2`.
[2] D. Meschede, *Gerthsen Physik*. Springer, 25. Auflage, 2015, `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5`.
[3] P. A. Tipler, *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 2019, `https://doi.org/10.1007/978-3-662-58281-7`.

6 Zusatzmaterial

- Die beschreibende Differentialgleichung eines angeregten harmonischen Oszillators mit Dämpfung ist:

$$y''(t) + 2\delta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{F}{m}\cos(2\pi f t) \quad . \tag{1}$$

Nach dem Einschwingen ergibt sich die Lösung zu: $y(t) = A(f)\cos(2\pi f t - \varphi)$

$$\text{mit der Amplitude} \quad A(f; A_0, f_0, \delta) = A_0 \frac{f_0^2}{\sqrt{(f_0^2 - f^2)^2 + \delta^2 f^2/\pi^2}}, \tag{2}$$

und den Parametern A_0, f_0 und δ. Außerdem besteht zwischen der Anregung und der Antwort eine Phasenverschiebung φ. Bei sehr kleinen Frequenzen ist die Antwort ohne Phasenverschiebung ($\varphi \approx 0$) und bei sehr großen Frequenzen ist die Antwort im Gegentakt ($\varphi \approx -\pi$). Besonders in der Nähe der Resonanzfrequenz können Sie die zeitliche Verschiebung zwischen der Anregung (Motor) und der Antwort (Schwingung) beobachten.

- Größtfehlerrechung für $\sigma = F/A$: Wenn die Formel nur Produkte und Quotienten enthält, addieren sich die relativen Messunsicherheiten (Fehler) da:

$$\sigma = F/(a\cdot b); \quad u(\sigma) = \left|\frac{\partial}{\partial F}\sigma\Big|_{F,a,b}\right| u(F) + \left|\frac{\partial}{\partial a}\sigma\Big|_{F,a,b}\right| u(a) + \left|\frac{\partial}{\partial b}\sigma\Big|_{F,a,b}\right| u(b) \tag{3}$$

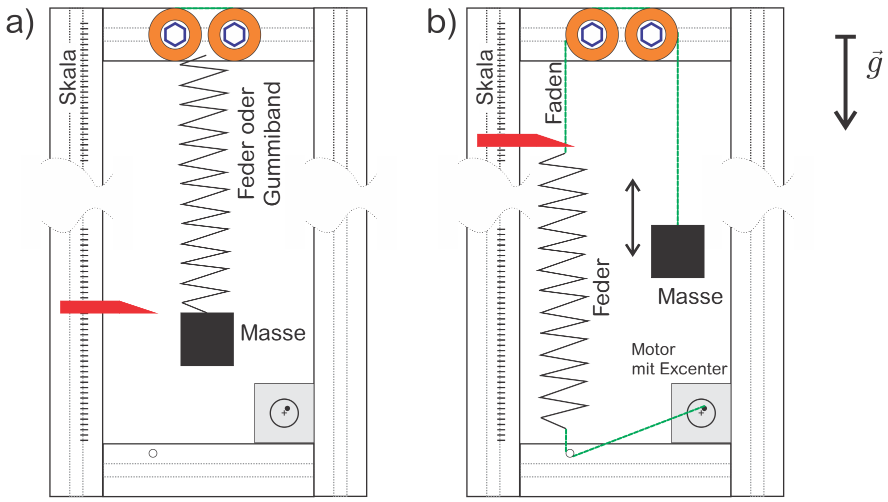
$$= \frac{1}{a\cdot b}\Big|_{F,a,b} u(F) + \frac{F}{a^2\cdot b}\Big|_{F,a,b} u(a) + \frac{F}{a\cdot b^2}\Big|_{F,a,b} u(b) \quad . \tag{4}$$

Durch Einsetzen zeigt sich, die rel. Messunischerheit $u_{\text{rel}}(\sigma)$ ist die Summe der rel. Unsicherheiten von F, a und b:

$$u_{\text{rel}}(\sigma) = \frac{u(\sigma)}{\sigma} = \frac{u(F)}{F} + \frac{u(a)}{a} + \frac{u(b)}{b} \qquad ☺. \tag{5}$$

Die Unsicherheit der Kraft/Masse kann in diesem Versuch vernachlässigt werden kann, da die Gewichte relativ genau sind, also $u(F)/F \ll u(a)/a$ und $u(F)/F \ll u(b)/b$.

- Aufbau



- Festkörper- versus Gummielastizität: Festkörper bestehen aus Kristallgitter. Wenn der Körper gedehnt oder gestaucht wird werden die Abstände zwischen den Atomen/Molekülen/Ionen größer bzw. kleiner, um genau dieses $\Delta\ell/\ell_0$. Dafür ist eine Kraft notwendig, da die Atome wieder in ihre Gleichgewichtslage möchten. Wenn die Kraft nachlässt, kehren die Atome exakt an ihre Ruheposition zurück. Somit ist der Vorgang 100 %-ig reversibel. Erst wenn die Dehnung zu stark wird und sich durch die Dehnung die Anordnung der Atome verändert, liegt eine plastische Deformation vor, sie ist nicht reversibel.
  Bei der Gummielastizität oder Entropieelastizität werden lange Makromoleküle gestreckt. Dadurch haben sie dann nicht mehr die entropisch günstigste Konfiguration. Wenn die Kraft nachlässt, ist es die thermische Bewegung, welche die Moleküle wieder sich wieder „Zusammenknäulen“ lässt. Da dies ein Entropie-Effekt ist, ist die Spannungs-Dehnungs-Kurve stark nichtlinear, siehe Stress-Strain in https://en.wikipedia.org/wiki/Rubber_elasticity. Des Weiteren ist die Entropieelastizität sehr stark von der Temperatur abhängig. Außerdem gibt es beim Gummi so gut wie kein Stauchen (es ist inkompressibel). Wenn Sie Gummi stauchen (ausprobieren mit einem weichen Radiergummi), weicht das Material in andere Raumrichtungen aus und wird so wieder gedehnt.

  Chemisch gesehen muss das Bündel der langen Moleküle zusätzlich vernetzt sein (Cross-Linker). Dieses Vernetzen nennt man Vulkanisieren (Cross-linking). Praktisch: Wenn Sie den Schlauch beim Fahrrad reparieren, dann tragen Sie kein Klebstoff zwischen Schlauch und Flicken auf, sondern eine Vulkansierflüssigkeit. Daher reichlich verwenden und gut „einwirken“ lassen vor dem Verbinden. Hingegen sollten Sie bei Klebstoff (kein Cross-Linker) immer nur wenig verwenden um eine möglichst stabile Verbindung zu erreichen.

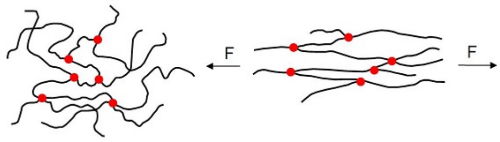


Abb. aus: https://wiki.polymerservice-merseburg.de/index.php/Vernetzung_Elastomeretext

- Ein Zitat aus https://de.wikipedia.org/wiki/Resonanz. „Jedoch wurde die mechanische Resonanz im Wesentlichen erst ab Anfang des 20. Jahrhunderts richtig gewürdigt, nachdem der Physiker und Mathematiker Arnold Sommerfeld – als erster Professor für Technische Mechanik, der nicht vorher Ingenieur gewesen war – darauf hingewiesen hatte. Damals waren Hängebrücken mit marschierenden Soldaten oder schnell fahrenden Dampflokomotiven schon durch Resonanz eingestürzt, und bei den langen Antriebswellen von größeren Dampfschiffen waren bei bestimmten Geschwindigkeiten bereits unerwartet starke Schwingungen aufgetreten, die mehrfach schon zu Zerstörungen geführt hatten.“