Runge - Kutta - Verfahren

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

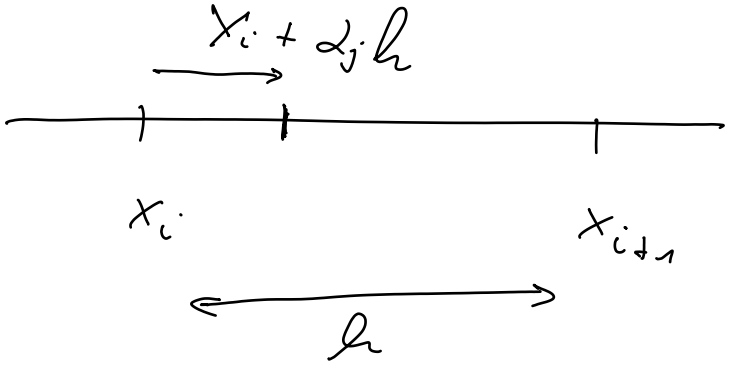
$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx$$

$$= h\, \phi(x_i, y_i)$$

$\phi(x_i, y_i, h)$ heißt Schnittfunktion

Ziel: ϕ gibt eine möglichst gute Approximation für das Integral ab $\Longrightarrow$ Quadraturformeln

Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ wird mit Stützstellen $x + \alpha_j h$ beschrieben



$0 \leq \alpha \leq N$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx \approx \sum_{j=0}^{N} \gamma_j\, f(x_i + \alpha_j h,\ y(x_i + \alpha_j h))$$

⇒ erfordert Auswertung von $y(x_i + \alpha_j h)$

⇒ diese Werte werden aus einer zweiten Quadratur aus der Dgl ermittelt

$$y'(x_j + \alpha_j h) = f(x_i + \alpha_j h,\ y(x_i + \alpha_j h))$$

$$\approx k_j = f\left(x_i + \alpha_j h,\ \underbrace{y_i + h \sum_{l=0}^{n} \beta_{jl} k_l}_{\text{2. Quadratur}}\right)$$

→ Vorgabe von $\alpha_j, \gamma_j, \beta_{jl}$

Verfahrensvorschrift

$$k_j = f\left(x_i + \alpha_j h,\ y_i + h \sum \beta_{jl} k_l\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \sum \gamma_j k_j$$

- $\beta_{jl} = 0$ für $l \geq j$ ⇒ explizites Verf.
- $\beta_{jl} = 0$ für $l > j$ ⇒ diagonal-implizit
- $\beta_{jl} \neq 0$ für $l > j$ ⇒ implizit

Für den Fall der diag. impl. und impliziten Varianten müssen i.A.R. nichtlineare Gl. gelöst werden.

$\alpha_j, \beta_{je}, \gamma_j$: nach Genauigkeits- und Stabilitätsanforderungen bestimmen

Anordnung der Parameter im Butcher-Array

α_j	β_{je}	γ_j
α_1	$\beta_{11}\ \beta_{12}\ \cdots$	γ_1
α_2	$\vdots$	γ_2
$\vdots$		$\vdots$

Verfahren von Heun

$$y' = f(x,y)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h \left(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i)) \right)$$

approx. am Intervallende

RK

$\alpha_1 = 0$ $\quad k_1 = f(x_i, y_i)$ $\quad \beta_{11} = 0$

$\alpha_2 = 1$ $\quad k_2 = f(x_i, y_i) + h k_1$ $\quad \beta_{21} = 1$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h k_1 + \frac{1}{2} h k_2 \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$$

α_j	β_{jc}		γ_j
0	0	0	1/2
1	1	0	1/2

explizit

„klassisches RK"

α_j	β_{jc}				γ_j
0	0	0	0	0	1/6
1/2	1/2	0	0	0	1/3
1/2	0	1/2	0	0	1/3
1	0	0	1	0	1/3

gleiche Werte k_j können durch unterschiedliche γ_j zur Lsg. unterschiedlicher Genauigkeit kombiniert werden → Fehlerschätzung u. Schrittweitensteuerung

„einige bekannte Verfahren"

Bemerkungen zur Stabilität

Genauigkeit (Konvergenzordnung) vs. Stabilität

hier: Untersuchung am Bsp. mit linearer Dgl

$$y' = \lambda y$$

Diskretisierung mit Einschrittverfahren $\longrightarrow$

Rekursive Lsg.

$$y_{i+1} = g(h, \lambda)\, y_i$$

Bsp $\lambda = -1$ $\qquad y' = -y$

mit Trapezregel

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h \left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right)$$

$$= y_i + \frac{1}{2} h \lambda \left(y_i + y_{i+1} \right)$$

$$y_{i+1} = \left(\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right) y_i = g(h, \lambda)\, y_i$$

$g(h,\lambda)$ entscheidet über Stabilität, d.h.
ob Lsg. beliebig anwachsen oder nicht.

$\rightsquigarrow \quad |y_{i+1}| \leq |y_i| \Rightarrow |g| \leq 1$

Def: Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ (komplexe Zahlen)
mit $h\lambda \in G$ heißt Gebiet der absoluten
Stabilität, falls $|g(h\lambda)| < 1$ für alle
$h\lambda \in G$.

Wenn $\mathbb{C}_- = \{z : \mathrm{Re}\, z < 0\}$ Untermenge
von G ist, dann heißt das Verfahren
A-stabil $\rightarrow$ Verfahrensfehler klingen ab

Häufig ist man an A-stabilen Verfahren interessiert.

weitere Verf.: Warmer-Rosenbrock, Mehrschritt-Verf...

Bem: Anwendung der Verfahren auf Systeme von Dgl.

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}(x)) \rightsquigarrow$$ Behandlung analog für alle Komponenten der Vektorfkt. $\underline{y}(x)$

Bem: Dgln. höherer Stufe können immer auf Systeme von Dgl. 1. Ordnung reduziert werden.

$$f(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$$

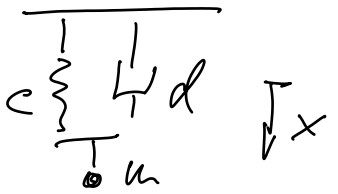
$$\Big\downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y' &= z_1 \\ y'' &= z_1' = z_2 \\ y''' &= z_2' = z_3 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad f(x, y, z_1, \dots z_n) = 0$$

$n+1$ Gl. $y, z_1, z_2 \dots z_n$

(Es muß sich dabei um ein Anfangswertproblem handeln)

AWP 2. Ordnung

Bsp 

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = mg$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

als System 1. Ordnung

$$\dot{x} - v = 0$$

$$m\dot{v} + dv + cx = mg \quad \Bigg\} \Rightarrow \text{RK}$$

$dv \to d\dot{x}$

alternativ: Newmark-Verfahren für direkten Lsg. der Dgl. 2. Ordnung.

Idee: Taylorreihe von u, v

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \underbrace{\dot{u}\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{u}}_{\text{An Stelle } t}\,\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \dot{v}\,\Delta t + O(\Delta t^2)$$

$\dot{v} \to$ entsprechend der Dgl

Wenn man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwendet, kann man zeigen, dass die Newmarksätze ohne die Fehlerterme $O(\cdot)$ exakt sind, wenn die Auswertung an einer „geeigneten" Zwischenstelle erfolgt

$$\Rightarrow \quad u(t+\Delta t) = u(t) + \dot{u}(t)\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{u}_\beta\,\Delta t^2$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \dot{v}_\gamma\,\Delta t$$

Auswertung im Intervall zwischen t und $t+\Delta t$

Approximation der Zwischenwerte

$$\left.\begin{aligned} v_\gamma &= (1-\gamma)\,\dot{v}(t) + \gamma\,\dot{v}(t+\Delta t) \\ \ddot{u}_\beta &= (1-2\beta)\,\ddot{u}(t) + 2\beta\,\ddot{u}(t+\Delta t) \end{aligned}\right\} *$$

Konvention

Einsetzen in Dgl.

$$M\ddot{u}_{n+1} + d\Big(\underbrace{\dot{u}_n + \Delta t(1-\gamma)\ddot{u}_n}_{v}\ \Delta t + \gamma\,\ddot{u}_{n+1}\Big)$$

$$+ C\Big\{\underbrace{u_n + \Delta t\,\dot{u}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2(1-2\beta)\ddot{u}_n}_{u} + \frac{1}{2}\Delta t^2 2\beta\,\ddot{u}_{n+1}\Big\}$$

$$= M g$$

$\rightsquigarrow$ neue Beschleunigung aus alten Verschiebungen und Geschwindigkeiten

$$\left(m + d\gamma\,\Delta t + c\beta\,\Delta t^2\right)\ddot{u}_{n+1} =$$

$$mg - d\left(\dot{u}_n + \Delta t(1-\gamma)\,\ddot{u}_n\right)$$
$$- c\left(u_n + \Delta t\,\dot{u}_n + \tfrac{1}{2}(1-2\beta)\,\Delta t^2\,\ddot{u}_n\right)$$

neue Werte für u, v aus $(*)$

Start: $u_0 = u(0)$, $v_0 = v(0)$ } gegebene AB

Einsetzen in Dgl. liefert $a_0 = \ddot{u}_0$

Wahl von β, γ determiniert die Eigenschaften des Verfahrens

$\frac{1}{2} \le \gamma \le 2\beta$: abs. stabil, keine Schrittweitenbegrenzung

$\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$: Zentrales Differenzenverf.

$2\beta = \gamma = \frac{1}{2}$: Trapezregel

$2\beta = \gamma = 1$: Implizit Euler

RWP 2. Ordnung

als System 1. Ordnung

$$\underline{y}' + f(x, \underline{y}) = \qquad \underbrace{y_0 = y(0)}_{\text{AWP}}$$

alternativ

$$\underbrace{\begin{aligned} x_1 = a &: \quad A(x_1, y) = 0 \\ x_n = b &: \quad B(x_n, y) = 0 \end{aligned}}_{\text{RWP}}$$

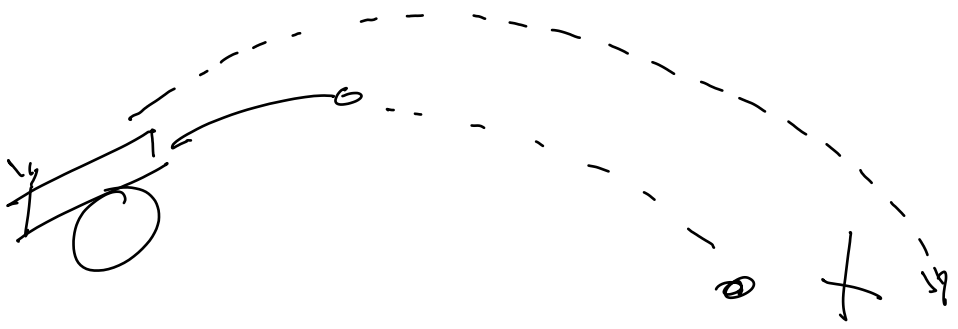
$\underline{y}$ kann so sortiert werden

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1(x_1, y) \\ a_2(x_1, y) \\ \vdots \\ a_n(x_1, y) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{n+1} \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}\right\} N \text{ Komponenten}$$

Lsg. mit Schießverfahren: Behandlung als AWP mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ c_{n+1} \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

mit Schätzwerten c_i, so dass die b_i richtig berechnet werden



im Prinzip ja, aber ...

→ Daher andere Ansätze:

Differenzenverfahren

FEM