2.5 Kontinuierliche Ladungsverteilungen

Um die Gesamtladung eines makroskopischen Körpers zu ermitteln, müsste man über alle geladenen Elementarteilchen gewichtet mit ihrer jeweiligen Ladung summieren. Allerdings ist die Anzahl der Teilchen sehr groß, und ihre genauen Orte sind selbst in homogenen (= gleichförmigen) Stoffen nicht bekannt.

Es ist die große Teilchenanzahl, die einen eleganten Ausweg bietet: Bei vergleichbaren Bedingungen (Temperatur, Druck) hat sich gezeigt, dass Körper desselben Stoffs und Volumens im Mittel gleich viele Teilchen enthalten und somit im Mittel auch dieselbe Ladung aufweisen. Weiterhin wird es mit steigender Teilchenzahl immer unwahrscheinlicher, eine vorgegebene Abweichung vom Mittelwert zu messen. Der Mittelwert stellt daher den *Erwartungswert* dar. Diese Aussagen beschreiben qualitativ das *Gesetz der großen Zahl*. Zudem werden die Abstufungen in ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung zunehmend irrelevant.

Solange alle Abmessungen wesentlich größer als jene der Teilchen sind, und die Teilchenzahl groß ist, ist daher die Modellvorstellung zulässig, dass die Ladung beliebige Werte annehmen kann. Man spricht von einer *kontinuierlichen* Größe. Weiterhin dürfen für makroskopische Betrachtungen die Teilchenzahl und auch Stoffeigenschaften wie Masse oder Ladung über das betrachtete Gebiet verschmiert werden. Dies führt zum Begriff der Dichte als Stoffeigenschaft. Seien V das betrachtete Volumen, $N(V)$ die Teilchenzahl, $m(V)$ die Masse und $Q(V)$ die Ladung. Dann gelten für homogene Stoffeigenschaften:

$$\text{räumliche Teilchendichte } n := \frac{N}{V} \qquad \text{mit } [n] = \frac{1}{\mathrm{m}^3}, \tag{2.5.1a}$$

$$\text{Massendichte } \rho := \frac{m}{V} \qquad \text{mit } [\rho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, \tag{2.5.1b}$$

$$\text{Raumladungsdichte } \rho := \frac{Q}{V} \qquad \text{mit } [\rho] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3}. \tag{2.5.1c}$$

Man beachte, dass für die Massendichte und die Raumladungsdichte dasselbe Symbol ρ üblich ist. Ist die Dichte – etwa als Stoffeigenschaft – bekannt, so folgt

$$N = n\, V, \tag{2.5.2a}$$

$$m = \rho\, V, \tag{2.5.2b}$$

$$Q = \rho\, V. \tag{2.5.2c}$$

Beispiel 2.5.1. Die Massendichte von Messing beträgt 8.73 g/cm^3. Welche Masse hat ein Rundstab von 12 cm Durchmesser und 40 cm Länge? Zweckmäßigerweise rechnet man in m und kg: $V = 0.00452$ m^3; $\rho = 8\,730$ kg/m^3. Mit (2.5.2b) folgt $m = 39.49$ kg.

Im Fall einer inhomogenen (= ungleichmäßigen) Ladungsverteilung kann man sich in folgender Weise behelfen: Man zerlegt das Volumen in kleine Elemente $\Delta V(\vec{r}_i)$ mit Mittelpunkt $\vec{r}_i$ und Ladung ΔQ_i. Nimmt man die Ladungsverteilung als stückweise konstant an, so folgt für die Raumladungsdichte ρ_i die

Näherung

$$\rho_i \approx \frac{\Delta Q_i}{\Delta V(\vec{r}_i)}. \tag{2.5.3}$$

Summieren über alle Elemente liefert

$$Q(V) = \sum_i \Delta Q_i \approx \sum_i \rho_i V(\vec{r}_i). \tag{2.5.4}$$

Lässt man die Größe der Volumenelemente gegen Null streben, so wird die Darstellung der Raumladungsdichte exakt. Somit lautet ihre allgemeine Definition

$$\text{Raumladungsdichte } \rho(\vec{r}_i) := \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q_i}{\Delta V(\vec{r}_i)} = \left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}\right|_{\vec{r}_i}. \tag{2.5.5a}$$

Die Größe $\mathrm{d}Q$ bzw. $\mathrm{d}V$ bezeichnet man als *differenzielles* oder *infinitesimales* Ladungs- bzw. Volumenelement oder *-inkrement*. Die Verteilung $\rho(\vec{r})$ bildet das Feld der Ladungdichte. Sie ist für makroskopische Untersuchungen oftmals als Ortsfunktion bekannt.

Auf gleiche Weise definiert man für flächen- und linenartige Ladungsverteilungen mit dem Flächenelement $\mathrm{d}A$ bzw. dem Linienelement $\mathrm{d}l$ die Flächenladungsdichte σ und die Linienladungsdichte τ:

$$\text{Flächenladungsdichte } \sigma(\vec{r}_i) := \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q_i}{\Delta A(\vec{r}_i)} = \left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}\right|_{\vec{r}_i}, \tag{2.5.5b}$$

$$\text{Linienladungsdichte } \sigma(\vec{r}_i) := \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q_i}{\Delta l(\vec{r}_i)} = \left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}\right|_{\vec{r}_i}. \tag{2.5.5c}$$

Das differenzielle Ladungselement $\mathrm{d}Q$ folgt durch Umstellen von (2.5.5) als

$$\mathrm{d}Q(r) = \rho(r)\ \mathrm{d}V, \tag{2.5.6}$$

$$\mathrm{d}Q(r) = \sigma(r)\ \mathrm{d}A, \tag{2.5.7}$$

$$\mathrm{d}Q(r) = \tau(r)\ \mathrm{d}l, \tag{2.5.8}$$

und die Gesamtladung ergibt sich durch Summieren über die Ladungselemente wie in (2.5.4) – allerdings über unendlich viele, infinitesimal kleine. Um dies zu kennzeichnen, benutzt man anstelle des Summenzeichens ein stilisiertes S, das Integralzeichen $\int$:

$$Q(V) = \int_Q \mathrm{d}Q = \int_V \rho(\vec{r})\ \mathrm{d}V, \tag{2.5.9}$$

$$Q(A) = \int_Q \mathrm{d}Q = \int_A \sigma(\vec{r})\ \mathrm{d}A, \tag{2.5.10}$$

$$Q(l) = \int_Q \mathrm{d}Q = \int_l \tau(\vec{r})\ \mathrm{d}l. \tag{2.5.11}$$

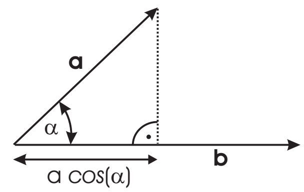

Abbildung 2.6.1: Geometrische Interpretation des Skalarprodukts.

Anmerkung 2.5.1. Das Feldstärkefeld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung folgt aus (2.4.3b), indem man die Punktladungen durch infinitesimale Ladungselemente dQ an den Quellpunkten $\vec{r}_q$ und die Summe durch das Integral ersetzt:

$$\vec{E}(\vec{r}_a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_Q \frac{\hat{e}_{qa}}{|\vec{r}_{qa}|^2} \, \mathrm{d}Q(\vec{r}_q). \tag{2.5.12}$$

Insbesondere erhält man für eine Raumladungsverteilung $\rho(\vec{r}_q)$ im Quellvolumen V_q durch Einsetzen von (2.5.9) die Beziehung

$$\vec{E}(\vec{r}_a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V_q} \frac{\hat{e}_{qa}}{|\vec{r}_{qa}|^2} \rho(\vec{r}_q) \, \mathrm{d}V \tag{2.5.13}$$

Aufgabe 2.5.1. Die Grenzübergänge in (2.5.5) führen auf infinitesimale Gebiete, die wegen ihrer verschwindenden Größe keinen einzigen Ladungsträger enthalten. Begründen Sie die Zulässigkeit der gewählten Vorgehensweise.

2.6 Die elektrische Spannung

2.6.1 Das euklidische Skalarprodukt

Definition 2.6.1 (Euklidisches Skalarprodukt)**.** Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ und α der von ihnen aufgespannte Winkel. Als *Euklidisches Skalrprodukt* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bezeichnet man die Abbildung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |a| \; |b| \cos \alpha. \tag{2.6.1}$$

Abb. 2.6.1 veranschaulicht, dass $\vec{a} \cdot \vec{b}$ der Normalprojektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ multipliziert mit der Länge von $\vec{b}$ entspricht. Für einen Einheitsvektor $\hat{e}_b$ gilt daher

$$\vec{a} \cdot \hat{e}_b = |a| \cos \alpha. \tag{2.6.2}$$

Dies beschreibt die Komponente von $\vec{a}$ in Richtung $\hat{e}_b$. Für $\vec{b} = \vec{a}$ erhält man

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |a|^2. \tag{2.6.3}$$

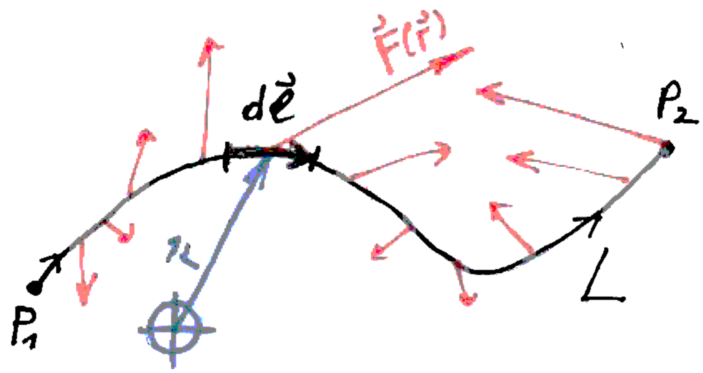

Abbildung 2.6.2: Kraftverlauf längs eines Weges.

In kartesischen Koordinaten gilt die einfache Berechnungsformel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.6.4}$$

Aus (2.6.1) folgen für nicht verschwindende Vektoren die Äquivalenzen

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \iff \vec{a} \,||\, \vec{b} \quad \text{Kollinearität,} \tag{2.6.5}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{Orthogonalität.} \tag{2.6.6}$$

Das Skalarprodukt ist positiv definit,

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0, \\ \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}, \end{cases} \tag{2.6.7}$$

und für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und Skalare $\sigma \in \mathbb{R}$ gelten die Rechenregeln

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{Symmetrie,} \tag{2.6.8a}$$

$$\sigma(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\sigma\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\sigma\vec{b}) \quad \text{Assoziativität,} \tag{2.6.8b}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \text{Distributivität.} \tag{2.6.8c}$$

2.6.2 Arbeit im elektrischen Feld

Wie in Abb. 2.6.2 dargestellt, ist bei der Berechnung der Arbeit W zu beachten, dass der Weg L durch eine beliebige Kurve beschrieben sein kann, und dass die Kraft$\vec{F}$ längs des Weges im Allgemeinen Betrag und Richtung ändert.

Betrachtet man jedoch ein infinitesimales Linienelement $\mathrm{d}\vec{l}$ um den Punkt $\vec{r}$, so darf wegen seiner verschwindend kleinen Länge die Kraft als konstant angenommen werden. Dann gilt für die längs $\mathrm{d}\vec{l}$ geleistete mechanische Arbeit $\mathrm{d}W$ gemäß „*Kraft in Wegrichtung mal Weglänge*" die Beziehung

$$\mathrm{d}W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{2.6.9}$$

Die gesamte Arbeit erhält man durch Summieren über alle Wegelemente als

$$W(L) = \int_L \vec{F}_m(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{2.6.10}$$

Bewegt sich eine konstante Ladung Q längs eines Weges L in einem gegebenen elektrostatischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$, so verrichtet die Coulomb-Kraft F_C Arbeit. Einsetzen der Definitionsgleichung für die Feldstärke (2.4.2) führt auf

$$W(L) = Q \int_L \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{2.6.11}$$

Positive Werte bedeuten, dass das elektrische Feld Arbeit verrichtet und hierdurch Feldenergie verliert. Negative Werte zeigen an, dass bei der Bewegung mechanische Arbeit gegen die Coulomb-Kraft geleistet wird, sodass sich die elektrische Feldenergie erhöht. In (2.6.11) hängt das Linienintegral nicht von der bewegten Ladung Q ab. Man definiert:

Definition 2.6.2 (Elektrische Spannung)**.** Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs eines Weges L wird als elektrische Spannung $U(L)$ bezeichnet. Sie wird in Volt gemessen:

$$U(L) := \int_L \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad [U] = \mathrm{V}. \tag{2.6.12}$$

Wegen (2.6.11) gilt für die vom Feld geleistete Arbeit

$$W(L) = QU(L), \tag{2.6.13}$$

und man erhält für das Volt die Darstellung

$$1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = 1\ \frac{\mathrm{N\ m}}{\mathrm{A\ s}} = 1\ \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{A\ s^3}}. \tag{2.6.14}$$

Somit ergibt sich als Einheit der Feldstärke

$$[\vec{E}] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}. \tag{2.6.15}$$

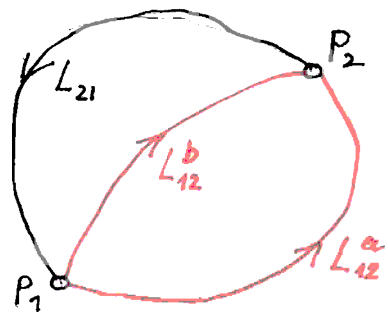

Abbildung 2.6.3: Gerichtete Wege zwischen zwei Punkten P_1 und P_2.

2.6.3 Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke

Definition 2.6.3 (Zirkulation)**.** Das Linienintegral eines Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r})$ längs eines geschlossenen Weges L:

$$\oint_L \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{2.6.16}$$

Der Ring unterstreicht, dass der Integrationspfad geschlossen ist.

Aus der Form der Coulomb-Kraft lässt sich der folgende Satz herleiten, der für die weiteren Betrachtungen von grundlegender Bedeutung ist:

Satz 2.6.4 (Energieerhaltung)**.** *Das elektrostatische Feld ist konservativ (= energieerhaltend): Durchläuft eine Ladung Q einen geschlossenen Weg im elektrostatischen Feld, so wird hierbei insgesamt keine Arbeit verrichtet.*

Einsetzen in die Darstellungen für die Arbeit (2.6.11) und (2.6.13) liefert

$$\mathring{W} \overset{(2.6.13)}{=} Q\mathring{U}(L) \overset{(2.6.13)}{=} Q \oint_L \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0. \tag{2.6.17}$$

Somit verschwinden in der Elektrostatik die Umlaufspannung $\mathring{U}$ und die Zirkulation der Feldstärke längs beliebiger geschlossener Pfade L:

$$\mathring{U}(L) \equiv 0, \tag{2.6.18}$$

$$\oint_L \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \equiv 0. \tag{2.6.19}$$

Felder verschwindender Zirkulation heißen *wirbelfrei.* Somit ist die elektrische Feldststärke im statischen Fall wirbelfrei: Sie besitzt keine geschlossenen Feldlinien, sondern bildet ein reines Quelle-Senke-Feld, dessen Feldlinien in den positiven Ladungen beginnen und in den negativen enden.

Abb. 2.6.3 zeigt zwei Punkte P_1 und P_2, zwei unterschiedliche Pfade L_{12}^a und L_{12}^b von P_1 nach P_2 und einen Rückweg L_{21}. Wegen (2.6.18) verschwindet die

Umlaufspannung längs jeden geschlossenen Weges. Wählt man zwei Umläufe mit gemeinsamem Rückweg,

$$\mathring{U}(L_{12}^a \cup L_{21}) = U(L_{12}^a) + U(L_{21}) = 0, \tag{2.6.20a}$$

$$\mathring{U}(L_{12}^b \cup L_{21}) = U(L_{12}^b) + U(L_{21}) = 0, \tag{2.6.20b}$$

so folgt durch Subtraktion der Umlaufspannungen

$$U(L_{12}^a) = U(L_{12}^b). \tag{2.6.21}$$

Weil die Wege L_{12}^a und L_{12}^b beliebig sind, gilt

Satz 2.6.5 (Wegunabhängigkeit der Spannung)**.** *Im elektrostatischen Feld ist die Spannung von einem Anfangspunkt P_1 zu einem Endpunkt P_2 vom gewählten Weg unabhängig. Man schreibt*

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{2.6.22}$$

2.7 Das elektrische Skalarpotenzial

Weil die Spannung nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, lässt sich diese elegant aus einem Skalarfeld ableiten, dem Feld des elektrischen Skalarpotenzials $\varphi(\vec{r})$. Hierzu weist man jedem Punkt des Raums einen Skalarwert so zu, dass sich die Spannung als negative Potenzialdifferenz ergibt:

$$\begin{aligned} U_{12} &= -(\varphi(P_2) - \varphi(P_1)) \\ &= \varphi(P_1) - \varphi(P_2). \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Auf die Wahl des negativen Vorzeichens wird später noch eingegangen.

Ist die Feldstärke $\vec{E}$ bekannt, so lässt sich das Potenzialfeld in zwei Schritten konstruieren:

1. Man wählt einen beliebigen Bezugspunkt P_0 und weist ihm einen beliebigen Potenzialwert φ_0 zu:

   $$\varphi(P_0) := \varphi_0. \tag{2.7.2}$$

   Häufig wählt man den Bezugspunkt im Unendlichen, an einem leitfähigen Gehäuse oder auf der Erdoberfläche. Das übliche Bezugspotenzial beträgt $\varphi_0 = 0$ V.

2. Eine Bestimmungsgleichung für jeden beliebigen Punkt P_i erhält man durch Anpassen der Indices, Umstellen von (2.7.1) und Einsetzen von (2.6.22):

   $$U_{0i} = \varphi_0 - \varphi(P_i), \tag{2.7.3}$$

   $$\varphi(P_i) \overset{(2.7.1)}{=} \varphi_0 - U_{0i}, \tag{2.7.4}$$

   $$\varphi(P_i) \overset{(2.6.22)}{=} \varphi_0 - \int_{P_0}^{P_i} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{2.7.5}$$

Es sei angemerkt, dass das Potenzialfeld einer Ladungsnordnung auch direkt – ohne den Umweg über die Felstärke – berechenbar ist.

2.7.1 Äquipotenzialflächen

Definition 2.7.1 (Äquipotenzialfläche)**.** Eine Fläche gleichen Potenzials.

Bewegt man eine Ladung Q zwischen zwei auf einer Äquipotenzialfläche liegenden Punkten P_1 und P_2, so verrichtet das Feld an ihr keine Arbeit:

$$W_{12} = Q\left(\varphi\left(P_1\right) - \varphi\left(P_2\right)\right) = 0. \tag{2.7.6}$$

Weil dies für alle Wege auf der Potenzialfläche der Fall ist, gilt wegen (2.6.11):

Satz 2.7.2. *Die Coulomb-Kraft und damit die elektrische Feldstärke stehen normal zu den Äquipotenzialflächen.*

Aus Unterabschnitt 2.4.2 ist bekannt, dass die Feldstärke stets normal auf leitfähige Körper steht. Daher ändert sich das Feldbild einer gegebenen Anordnung nicht, wenn man eine Äquipotenzialfläche mit einer dünnen, ungeladenen Metallfolie belegt.