

Kapitel 1

Das vollständige System der Maxwell'schen Gleichungen

1.1 Zusammenstellung der Maxwell-Gleichungen

Wir fassen nochmals die integralen Darstellungen der elektromagnetischen Feldgleichungen zusammen, wobei wir links die allgemeinen Fassungen und rechts – zur Erleichterung des Übergangs auf die differenziellen Darstellungen – die Spezialisierungen für räumliche Verteilungen angeben:

Induktionsgesetz:

$$\dot{U}_e(\partial\Gamma) = -\frac{d}{dt}\Phi(\Gamma), \quad \oint_{\partial\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\Gamma, \quad (1.1)$$

Durchflutungssatz:

$$\dot{U}_m(\partial\Gamma) = +\frac{d}{dt}\psi(\Gamma) + I_w, \quad \oint_{\partial\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = +\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{J}_w \cdot d\Gamma, \quad (1.2)$$

Elektrische Flussbilanz:

$$\dot{\psi}(\partial\Omega) = Q_w(\Omega), \quad \oint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\Gamma = \int_{\Omega} \rho_w d\Omega, \quad (1.3)$$

Magnetische Flussbilanz:

$$\dot{\Phi}(\partial\Omega) = 0, \quad \oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\Gamma = 0. \quad (1.4)$$

Hieraus erhalten wir die differenziellen Darstellungen

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_w + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_w, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.8)$$

Die Beziehungen zwischen den elektromagnetischen Feldgrößen lauten allgemein

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{J} = \sum \rho \mathbf{v}. \quad (1.11)$$

Im Fall von Leitungsströmen und linearen $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ - und $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ -Abhängigkeiten vereinfachen diese sich zu den Materialgesetzen

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(I + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(I + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.14)$$

1.2 Energiebetrachtungen

1.2.1 Energiebilanz

Für elektromagnetische Felder lässt sich der Energieerhaltungssatz in folgender Weise formulieren:

In einem Gebiet Ω gleicht die zeitliche Abnahme der elektromagnetischen Energie $\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m$ der Summe der im Gebiet in nicht-elektromagnetische Energieformen umgesetzten Leistung P_v und der durch die Berandung des Gebietes $\partial\Omega$ ausströmenden Leistung $P_{\partial\Omega}$.

Somit gilt in integraler Form

$$P_{\partial\Omega} + P_v = -\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m). \quad (1.15)$$

Hierbei kann die umgesetzte Leistung P_v sowohl positives als auch negatives Vorzeichen aufweisen, weil Energieumwandlungen sowohl vom Elektromagnetischen ins Nicht-Elektromagnetische als auch in umgekehrter Richtung möglich sind. Gleiches gilt für die Leistung $P_{\partial\Omega}$, weil Leistung durch die Berandung $\partial\Omega$ sowohl aus- als auch einströmen kann.

Um den Erhaltungssatz (1.15) durch differentielle Größen auszudrücken, benötigen wir außer den elektrischen und magnetischen Energiedichten w_e und w_m sowie der umgesetzten Leistungsdichte p_v den neuen Begriff der elektromagnetische *Leistungsflussdichte* \mathbf{S} , auch *Poyntingscher Vektor* genannt,

$$P_{\partial\Omega} =: \oint_{\partial\Omega} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.16)$$

Für die Energiebilanz gilt daher

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} + \int_{\Omega} p_v d\Omega = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (w_e + w_m) d\Omega \quad \dots \text{integrale Form,} \quad (1.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + p_v = -\frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_m) \quad \dots \text{differenzielle Form.} \quad (1.18)$$

Man beachte, dass die Energiebilanz zwar die Quellen, nicht aber die Wirbel des Poyntingschen Vektors bestimmt.

Um den Poyntingschen Vektor zu den elektromagnetischen Feldgrößen in Bezug zu setzen, treffen wir die folgenden Vereinfachungen:

- Alle Materialbeziehungen seien hysteresefrei.
- Alle Materialtensoren seien symmetrisch und zeitinvariant.

1.2.2 Wichtige Formeln

Durch elementare Umformungen erhalten wir die Identität

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &\equiv \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_c) + \nabla \cdot (\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}) \\ &\equiv \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Für die zeitliche Änderung der elektrischen Feldenergiedichte ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^T \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^{-1} \mathbf{D})^T \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \\ &\stackrel{\text{Zeitinvarianz}}{=} \frac{1}{2} (\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D})^T \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}^T \varepsilon^{-T} \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \\ &\stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}^T \varepsilon^{-1} \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}^T \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \\ &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Mit analogen Überlegungen für das Magnetfeld erhalten wir zusammenfassend

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}. \quad (1.22)$$

1.2.3 Herleitung des Poyntingschen Satzes

Aus dem Induktionsgesetz und dem Durchflutungssatz

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \quad |\mathbf{H} \cdot \quad (1.23)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = +\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{J}, \quad |\mathbf{E} \cdot \quad (1.24)$$

ergeben sich durch Vormultiplizieren von \mathbf{E} beziehungsweise \mathbf{H} die Beziehungen

$$\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = +\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (1.26)$$

Durch Subtraktion folgt unmittelbar

$$\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}, \quad (1.27)$$

und mit (1.19) erhalten wir hieraus

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (1.28)$$

Durch Integration über das Feldgebiet und Anwendung des Gaußschen Satzes erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) d\Omega, \\ \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) d\Omega. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Die physikalische Bedeutung der durch Feldgrößen dargestellten Integranden ist hierbei bereits bekannt:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = p_v \quad \dots \text{umgesetzte Leistungsdichte}, \quad (1.30)$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = w_e \quad \dots \text{elektrische Feldenergiedichte}, \quad (1.31)$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = w_m \quad \dots \text{magnetische Feldenergiedichte}. \quad (1.32)$$

Ein Vergleich mit der allgemeinen Form der Energiebilanz (1.17) (1.18) ergibt für den Poyntingschen Vektor \mathbf{S} die Beziehung

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A}, \quad (1.33)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (1.34)$$

Obwohl hierdurch nur die Quellen des Poyntingschen Vektors festgelegt sind, setzen wir direkt

$$\mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.35)$$

und erhalten somit für die als *Poyntingscher Satz* bezeichnete Energiebilanz

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) d\Omega, \quad (1.36)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right). \quad (1.37)$$

Weil das Hinzuzählen eines beliebigen Wirbelfeldes zum Poyntingschen Vektor die Energiebilanz unverändert lässt, erscheint die Wahl von (1.35) als willkürlich, und es bleibt unklar, ob der so festgelegte Vektor tatsächlich der Leistungsflussdichte entspricht. Dass dies der Fall ist, lässt sich mit den Mitteln der Relativitätstheorie durch Aufstellen einer Impulsbilanz nachweisen. Auf eine Herleitung wird im Rahmen dieser Lehrveranstaltung verzichtet.

1.2.4 Beispiel: Gekreuzte stationäre Felder

Abbildung 1.1 zeigt einen einfachen Magnetkreis, der durch einen stationären Strom angeregt wird. Unter Vernachlässigung von Randstörungen sind Flussdichte und Erregung im Luftspalt homogen. Daneben ist ein geladener Zylinderkondensator zu sehen, zwischen dessen Elektroden sich ein, von Randstörungen abgesehen, radial gerichtetes elektrisches Feld ausbildet.

Nun bringen wir, wie in Abb. 1.2 dargestellt, den Zylinderkondensator in den Luftspalt des Magnetkreises. Wegen (1.35) führen die parallel zur Achse des Zylinderkondensators gerichtete magnetische Erregung und die radial gerichtete elektrische Feldstärke zu einem tangential gerichteten Poyntingschen Vektor. Zwar erweist dieser sich als quellenfrei, $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$, sodass die Gesamtleistung durch jede beliebige Hüllfläche verschwindet, doch die Tatsache, dass der Poyntingsche Vektor von Null verschiedene Werte annimmt, scheint seine Auslegbarkeit als Leistungsflussdichte zunächst in Frage zu stellen. Wenn hier tatsächlich Energie im Kreis fließt, dann ist dieser nach der Relativitätstheorie ein Impuls zuzuordnen, der beim Zusammenbrechen des Feldes, etwa durch Kurzschließen

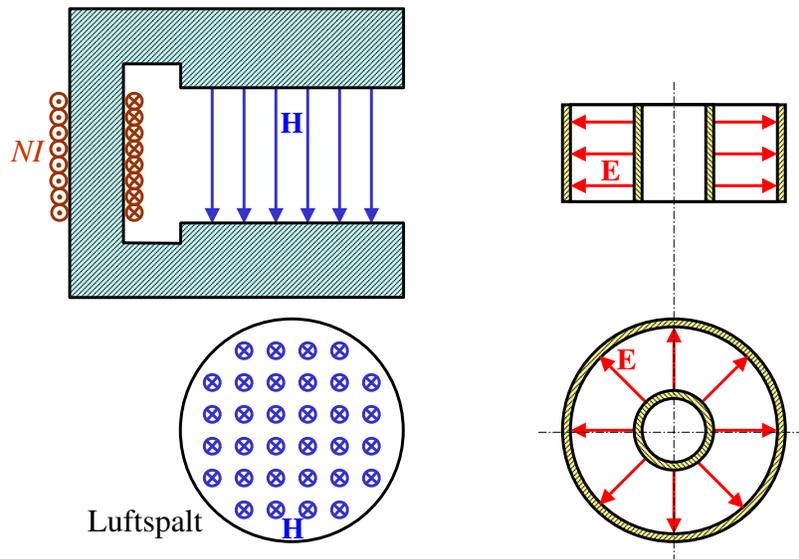


Abbildung 1.1: Magnetkreis und Zylinderkondensator.

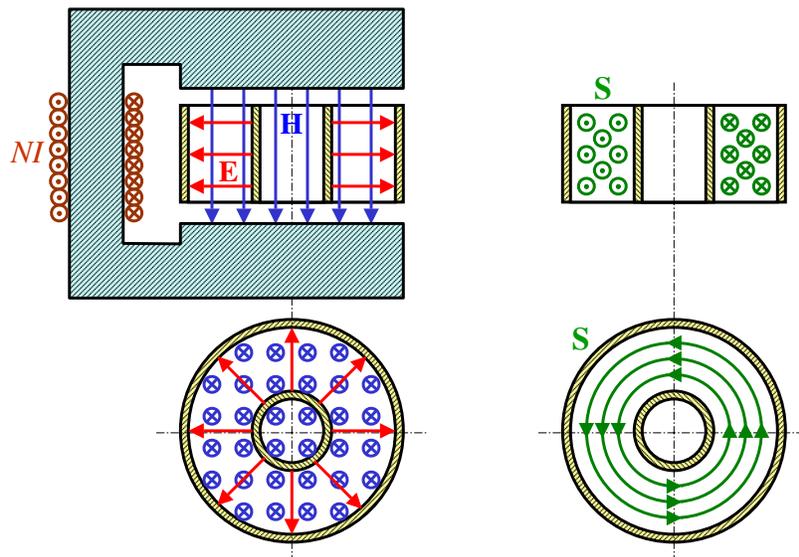


Abbildung 1.2: Verlauf des Poyntingschen Vektors für einen geladenen Zylinderkondensator im stationären Magnetfeld.

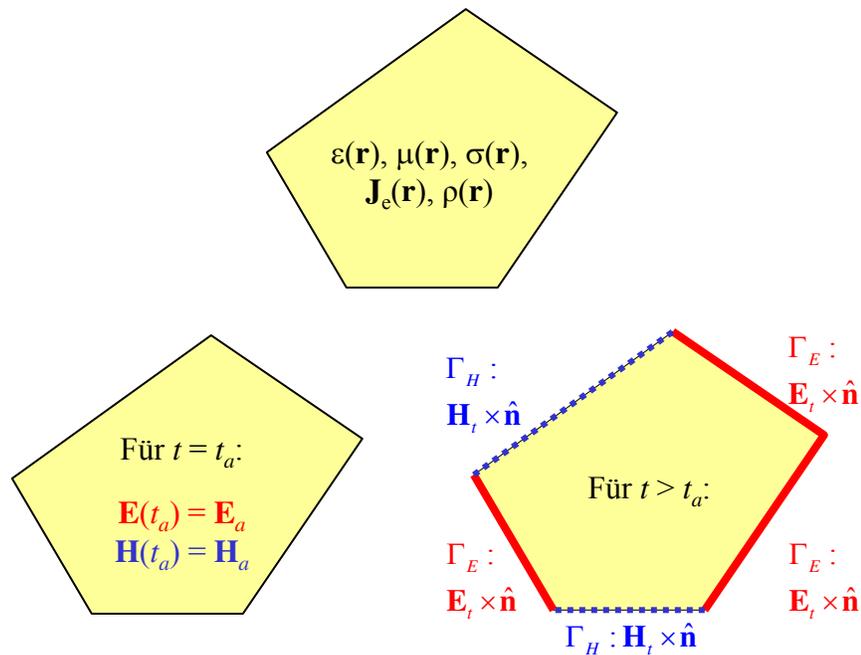


Abbildung 1.3: Zur Eindeutigkeit des elektromagnetischen Anfangs-Randwert-Problems.

des Kondensators, einen Kraftstoß hervorrufen sollte. - Ein solcher Kraftstoß ist tatsächlich beobachtbar.

Das zunächst paradox anmutende Ergebnis, dass der Poyntingsche Vektor im Fall gekreuzter elektrostatischer und stationärer magnetischer Felder auf ein Wirbelfeld elektromagnetischer Energie führt, widerlegt also nicht die Festlegung (1.35), sondern unterstreicht vielmehr auf Grund der experimentellen Messbarkeit des Kraftstoßes ihre Richtigkeit.

1.3 Eindeutigkeit des elektromagnetischen Anfangs-Randwert-Problems

Die Maxwell'schen Gleichungen stellen ein System partieller Differenzialgleichungen dar, dem eine mächtige Klasse von Lösungen genügt. Um die elektromagnetischen Felder in einem gegebenen Gebiet Ω vorherzusagen, müssen daher zusätzlich geeignete Nebenbedingungen vorgeschrieben werden, sodass die Lösung eindeutig wird. Weil diese sowohl Anfangsbedingungen als auch Randbedingungen umfassen, spricht man von einem Anfangs-Randwert-Problem.

Wir betrachten ein beschränktes Gebiet Ω , dessen Berandung $\partial\Omega$ sich aus zwei komplementären Teilrändern Γ_E und Γ_H zusammensetzt, die ihrerseits, wie in Abb. 1.3 dargestellt, aus nicht-zusammenhängenden Komponenten bestehen

dürfen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall linearer Materialbeziehungen und setzen die elektrische Permittivität und magnetische Permeabilität als symmetrisch positiv definit,

$$\mathbf{E} \cdot [\varepsilon] \mathbf{E} > 0 \quad \forall \mathbf{E} \neq 0, \quad (1.38a)$$

$$\mathbf{H} \cdot [\mu] \mathbf{H} > 0 \quad \forall \mathbf{H} \neq 0 \quad (1.38b)$$

und die elektrische Leitfähigkeit als symmetrisch positiv semi-definit voraus,

$$\mathbf{E} \cdot [\sigma] \mathbf{E} \geq 0 \quad \forall \mathbf{E} \neq 0. \quad (1.39)$$

Im Rahmen dieser Lehrveranstaltung verzichten wir darauf, näher auf die Existenz einer Lösung einzugehen. Wir wollen aber zeigen, dass unter den angeführten Voraussetzungen das nun folgende Anfangs-Randwert-Problem eine eindeutige Lösung besitzt:

Differenzialgleichungen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}) + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_e, \quad (1.40a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H}), \quad (1.40b)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \quad (1.40c)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho. \quad (1.40d)$$

Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = t_a$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t = t_a) = \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (1.41a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t = t_a) = \mathbf{H}_a(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (1.41b)$$

Randbedingungen für die Tangentialkomponenten \mathbf{E}_t und \mathbf{H}_t :

$$\text{auf } \Gamma_E : \quad \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_t^\Gamma(\mathbf{r}, t) \quad \forall t \geq t_a, \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_E, \quad (1.42a)$$

$$\text{auf } \Gamma_H : \quad \mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_t^\Gamma(\mathbf{r}, t) \quad \forall t \geq t_a, \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_H. \quad (1.42b)$$

Hierbei stellen die Größen \mathbf{J}_e , ρ , \mathbf{E}_a , \mathbf{H}_a , \mathbf{E}_t^Γ und \mathbf{H}_t^Γ vorgegebene Größen dar.

Beweis. Den Beweis führen wir indirekt, indem wir für das gegebene Anfangs-Randwert-Problem von zwei unterschiedlichen Lösungspaaren $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ sowie $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ ausgehen und diese Annahme zu einem Widerspruch führen. Dazu betrachten wir die Differenzfelder \mathbf{E}_0 und \mathbf{H}_0 ,

$$\mathbf{E}_0 := \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1, \quad (1.43)$$

$$\mathbf{H}_0 := \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1. \quad (1.44)$$

Einsetzen der Lösungen $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ sowie $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ und anschließende Subtraktion führt unter Ausnutzung der Linearität des betrachteten Systems auf die Differentialgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = +\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \mathbf{E}_0) + \sigma \mathbf{E}_0, \quad (1.45a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathbf{H}_0), \quad (1.45b)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}_0) = 0, \quad (1.45c)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}_0) = 0, \quad (1.45d)$$

sowie die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t = t_a) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (1.46a)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t = t_a) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega \quad (1.46b)$$

und die Randbedingungen

$$\text{auf } \Gamma_E : \quad \mathbf{E}_{0t}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \forall t > t_a, \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_E, \quad (1.47a)$$

$$\text{auf } \Gamma_H : \quad \mathbf{H}_{0t}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \forall t > t_a, \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_H. \quad (1.47b)$$

Auch die Beziehungen (1.45) - (1.47) beschreiben ein elektromagnetisches Anfangs-Randwert-Problem. Im Unterschied zur ursprünglichen Aufgabenstellung verschwinden jedoch die Quellgrößen \mathbf{J}_e und ρ , und es treten nur homogene Anfangs- und Randbedingungen auf. Die Energiebilanz für das Differenzfeld lautet daher

$$\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) \cdot d\mathbf{A} + \int_{\Omega} \mathbf{E}_0 \cdot \sigma \mathbf{E}_0 d\Omega = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \cdot \varepsilon \mathbf{E}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{H}_0 \cdot \mu \mathbf{H}_0 \right) d\Omega. \quad (1.48)$$

Da das Hüllintegral wegen (1.47a) und (1.47b) verschwindet,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) \cdot d\mathbf{A} &= \int_{\Gamma_E} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) dA + \int_{\Gamma_H} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) dA \\ &= \int_{\Gamma_E} \mathbf{H}_0 \cdot \underbrace{(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0)}_{\stackrel{(1.47a)_0}{=}} dA + \int_{\Gamma_H} \mathbf{E}_0 \cdot \underbrace{(\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}})}_{\stackrel{(1.47b)_0}{=}} dA = 0, \end{aligned} \quad (1.49)$$

erhalten wir hieraus

$$\int_{\Omega} \underbrace{\mathbf{E}_0 \cdot \sigma \mathbf{E}_0}_{\geq 0} d\Omega = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \cdot \varepsilon \mathbf{E}_0}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{H}_0 \cdot \mu \mathbf{H}_0}_{\geq 0} \right) d\Omega. \quad (1.50)$$

Auf der linken Seite findet sich die Verlustleistung und auf der rechten Seite die zeitliche Abnahme $(-\frac{d}{dt})$ der elektromagnetischen Energie. Bei näherer Betrachtung von (1.50) stellen wir fest:

- *Die elektromagnetische Energie ist zum Anfangszeitpunkt Null.* Die Anfangsbedingungen (1.46) sind homogen.
- *Die elektromagnetische Energie nimmt zeitlich nicht zu.* Ihre zeitliche Abnahme gleicht der Verlustleistung, die wegen (1.39) nicht-negativ ist.
- *Die elektromagnetische Energie ist niemals negativ.* Die elektrische und die magnetische Energiedichte sind wegen (1.38) niemals negativ.

Zusammen bedeuten diese drei Aussagen, dass die elektromagnetische Energie des Differenzfeldes zu jedem Zeitpunkt $t \geq t_a$ verschwindet,

$$\int_{\Omega} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \cdot \varepsilon \mathbf{E}_0}_{>0 \text{ für } \mathbf{E}_0 \neq 0} + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{H}_0 \cdot \mu \mathbf{H}_0}_{>0 \text{ für } \mathbf{H}_0 \neq 0} \right) d\Omega = 0. \quad (1.51)$$

Weil der Integrand wegen der positiv definiten Materialtensoren (1.38) für nicht-verschwindendes \mathbf{E}_0 oder \mathbf{H}_0 stets positiv ist, kann Gleichheit nur gelten, wenn die Feldgrößen im gesamten Feldgebiet verschwinden,

$$\mathbf{E}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 \quad \text{in } \Omega, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{H}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.53)$$

Somit führt die Annahme unterschiedlicher Lösungen auf einen Widerspruch.

(Streng genommen haben wir nur gezeigt, dass sich die beiden Lösungen fast überall – überall bis auf Mengen vom Maß Null – gleichen. Solche Unterschiede sind jedoch unmessbar, weil sie keinerlei Energie beinhalten.) \square