Prof. Dr. Jürgen Eschner
Gebäude E 2 6, Raum 3.02
☎ +49 (681) 302 58016
juergen.eschner@physik.uni-saarland.de
www.uni-saarland.de/lehrstuhl/eschner

Mathematisches Tutorium II
– Sommersemester 2020 –
Übungsblatt 1

Die wohl bekanntesten orthogonale Basissysteme krummliniger Koordinaten bilden **Zylinder- und Kugelkoordinaten**. Sie haben diese bereits in der Vorlesung klassische Mechanik (Experimentalphysik 1) kennengelernt. Mit Hilfe dieses Übungsblattes sollen Sie sich nochmals diese Basissysteme verständlich machen, da auch in der Quantenmechanik Gebrauch von ihnen gemacht wird.
Das Übungsblatt stellt eine Zusammenfassung des Kapitels 8 „Basissysteme krummliniger Koordinaten“ aus dem Lehrbuch „*Mathematische Methoden in der Physik*“ von C.B. Lang und N. Pucker dar. Über einen VPN-Zugang in das universitäre Netzwerk und den Opac-Katalog der SULB `http://swb2.bsz-bw.de/DB=2.340/` haben Sie Zugriff auf die digitale Version dieses Buches. Für ein tieferes Verständnis können Sie dort Details nachlesen.

Im Allgemeinen schreiben wir die **kartesischen Koordinaten** (x, y, z) mit ihren Basisvektoren

$$\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

als Funktionen anderer Koordinaten u_i und erhalten folgendes Gleichungssystem:

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3). \tag{2}$$

Dieses Gleichungssystem ist nach den u_i auflösbar, wenn die Jacobi-Determinante ungleich null ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Die neuen Basisvektoren sind gegeben durch die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien:

$$\vec{e_i} = \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \quad \text{mit } h_{u_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|. \tag{4}$$

Für orthogonale Koordinaten mit auf Länge 1 normierten Basisvektoren gilt:

$$\vec{e_{u_i}} \cdot \vec{e_{u_j}} = \delta_{ij}. \tag{5}$$

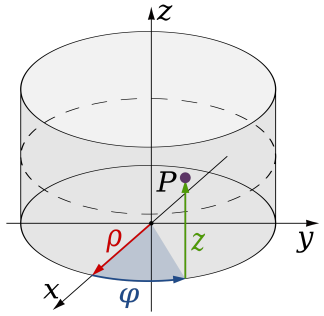
Das heißt, die Einheitsvektoren $\vec{e_{u_i}}$ bilden eine **orthonormale Basis** im $\mathbb{R}^3$. Für eine rechtshändige Basis gilt außerdem:

$$\vec{e_{u_1}} \times \vec{e_{u_2}} = \vec{e_{u_3}}, \quad \vec{e_{u_2}} \times \vec{e_{u_3}} = \vec{e_{u_1}}, \quad \vec{e_{u_3}} \times \vec{e_{u_1}} = \vec{e_{u_2}}. \tag{6}$$

Man nennt diese drei Basisvektoren auch lokales Dreibein, da es an unterschiedlichen Punkten einer Kurve unterschiedliche Orientierungen besitzen kann. Die kartesischen Koordinaten sind ein Sonderfall, in dem das lokale Dreibein in jedem Raumpunkt die gleiche Orientierung hat.

Auf diesem Übungsblatt möchten wir uns auf die beiden bekanntesten Beispiele orthogonaler Koordinaten beschränken:

a) **Zylinderkoordinaten** (ρ, φ, z):

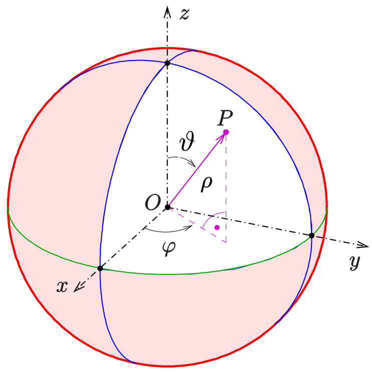


$$x = \rho\cos(\varphi), \quad y = \rho\sin(\varphi), \quad z = z \tag{7}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(\frac{y}{x}), \quad z = z \tag{8}$$

$$\vec{e_\rho} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

b) **Kugelkoordinaten** $(\rho, \varphi, \vartheta)$:



$$x = \rho\sin(\vartheta)\cos(\varphi), \quad y = \rho\sin(\vartheta)\sin(\varphi), \quad z = \rho\cos(\vartheta), \tag{10}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}, \quad \vartheta = \arccos(\frac{z}{\rho}) \tag{11}$$

Aufgabe 1:
Konstruieren Sie das lokale Dreibein $\vec{e_{u_i}}$ der Kugelkoordinaten und zeigen Sie explizit, dass Gleichung (5) und (6) erfüllt sind.

Nach der Definition eines neuen Basissystems, können wir Vektoren darin darstellen. Dazu wird der Vektor $\vec{V}$ als Summe von den neuen Basisvektoren mit Komponenten V_{u_i}dargestellt:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} V_{u_i} \cdot \vec{e}_{u_i}. \tag{12}$$

Die Komponenten V_{u_i} sind die **Projektionen** des Vektors auf die jeweilige Richtung $\vec{e}_{u_i}$:

$$V_{u_i} = \vec{V} \cdot \vec{e}_{u_i}. \tag{13}$$

Damit gilt:

$$\vec{V} = (\vec{V} \cdot \vec{e}_{u_1})\,\vec{e}_{u_1} + (\vec{V} \cdot \vec{e}_{u_2})\,\vec{e}_{u_2} + (\vec{V} \cdot \vec{e}_{u_3})\,\vec{e}_{u_3}. \tag{14}$$

Wie bereits erwähnt, besitzt das lokale Dreibein im allgemeinen Fall eine **ortsabhängige Richtung**, da die Koordinatenlinien keine festen Geraden sind. Das bedeutet, beim Differenzieren von Vektoren müssen die Basisvektoren ebenfalls differenziert werden.

Beispiel: Wir wollen nun aus dem Ortsvektor $\vec{r}(t)$ in Zylinderkoordinaten den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ bestimmen. Dabei gibt es zwei mögliche Vorgehensweisen:

a) Als Erstes drückt man $\vec{r}(t)$ im kartesischen System durch Zylinderkoordinaten aus:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Als Zweites berechnet man die zeitliche Ableitung:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\rho}\cos(\varphi) - \rho\sin(\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{\rho}\sin(\varphi) + \rho\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Im letzten Schritt projiziert man den Vektor $\vec{v}(t)$ gemäß Gleichung (14) in das Basissystem der Zylinderkoordinaten:

$$\vec{v}(t) = (\vec{v}(t)\cdot\vec{e_\rho})\vec{e_\rho} + (\vec{v}(t)\cdot\vec{e_\varphi})\vec{e_\varphi} + (\vec{v}(t)\cdot\vec{e_z})\vec{e_z} \tag{17}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} + \dot{z}\,\vec{e_z} \tag{18}$$

b) Als Erstes wird $\vec{r}(t)$ in das Basissystem der Zylinderkoordinaten projiziert:

$$\vec{r}(t) = (\vec{r}(t)\cdot\vec{e_\rho})\vec{e_\rho} + (\vec{r}(t)\cdot\vec{e_\varphi})\vec{e_\varphi} + (\vec{r}(t)\cdot\vec{e_z})\vec{e_z} \tag{19}$$

$$\vec{r}(t) = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{e_z}. \tag{20}$$

Anschließend wird die zeitliche Ableitung berechnet

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\,\dot{\vec{e_\rho}} + \dot{z}\,\vec{e_z} + z\,\dot{\vec{e_z}}, \tag{21}$$

wobei die Einheitsvektoren ebenfalls differenziert werden müssen. Die Ableitungen ergeben sich zu:

$$\dot{\vec{e_\rho}} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ \dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} \text{ und } \dot{\vec{e_z}} = 0. \tag{22}$$

Einsetzen in Gleichung (21) ergibt das selbe Ergebnis wie bei der ersten Variante.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}mv^2$ und der Drehimpulsvektor $\vec{L} = m(\vec{r}\times\vec{v})$ wie folgt lauten:

a) $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\vartheta}\vec{e_\vartheta} + r\dot{\varphi}\sin(\vartheta)\vec{e_\varphi}$
b) $T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\vartheta}^2 + \rho\dot{\varphi}^2\sin(\vartheta))$
c) $\vec{L} = m\rho(\dot{\vartheta}\vec{e_\varphi} - \dot{\varphi}\sin(\vartheta)\vec{e_\vartheta})$

Nun möchten wir den **Gradienten** $\vec{\nabla}\phi(x_1, x_2, x_3)$ eines skalaren Feldes ϕ in einem allgemeinen orthogonalen Basissystem krummliniger Koordinaten (u_1, u_2, u_3) bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst eine Komponente von $\vec{\nabla}\phi$ in $\vec{e_{u_i}}$-Richtung (s. Gl. (13)):

$$(\vec{\nabla}\phi)_{u_i} = \vec{\nabla}\phi(x_1(u_1,u_2,u_3), x_2(u_1,u_2,u_3), x_3(u_1,u_2,u_3)) \cdot \vec{e_{u_i}}. \tag{23}$$

Unter Verwendung von Gleichung (4) ergibt sich die Komponente zu:

$$(\vec{\nabla}\phi)_{u_i} = \vec{\nabla}\phi(x_1(u_1,u_2,u_3), x_2(u_1,u_2,u_3), x_3(u_1,u_2,u_3)) \cdot \frac{1}{h_{u_i}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = \frac{1}{h_{u_i}} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}. \tag{24}$$

Mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \phi(x_1(u_1,u_2,u_3), x_2(u_1,u_2,u_3), x_3(u_1,u_2,u_3)) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \tag{25}$$

kann Gleichung (24) zu

$$(\vec{\nabla}\phi)_{u_i} = \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \tag{26}$$

umgeformt werden, womit der Nabla-Operator in jedem Basissystem folgende Form annimmt:

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e_{u_i}} \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{27}$$

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung (27) den Gradienten $\vec{\nabla}\phi$ in

a) Zylinderkoordinaten
b) Kugelkoordinaten.

Als Nächstes bestimmen wir die allgemeine Formel für die **Divergenz**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(u_1,u_2,u_3) = \vec{\nabla} \cdot (A_{u_1}\vec{e_{u_1}} + A_{u_2}\vec{e_{u_2}} + A_{u_3}\vec{e_{u_3}}) \tag{28}$$

$$= \vec{\nabla} \cdot A_{u_1}\vec{e_{u_1}} + \vec{\nabla} \cdot A_{u_2}\vec{e_{u_2}} + \vec{\nabla} \cdot A_{u_3}\vec{e_{u_3}} \tag{29}$$

Zur Vereinfachung betrachten wir nur den ersten zur Divergenz beitragenden Term $\vec{\nabla} \cdot A_{u_1}\vec{e_{u_1}}$. Die beiden anderen Terme können analog dazu bestimmt werden.
Unter Vewendung eines Rechtssystem folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot A_{u_1}\vec{e_{u_1}} = \vec{\nabla} \cdot (A_{u_1}(\vec{e_{u_2}} \times \vec{e_{u_3}})). \tag{30}$$

Insbesondere gilt mit (27) $\vec{\nabla} u_k = \sum_{i=1}^{3} \vec{e_{u_i}} \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial u_k}{\partial u_i} = \frac{1}{h_{u_k}} \vec{e_{u_k}}$. Daraus folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot (A_{u_1}(\vec{e_{u_2}} \times \vec{e_{u_3}})) = \vec{\nabla} \cdot (A_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} (\vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3)). \tag{31}$$

Im nächsten Schritt verwenden wir die Produktregel $\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{F}) = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{F} + \phi\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$:

$$\vec{\nabla} \cdot (A_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} (\vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3)) = \vec{\nabla}(A_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}) \cdot (\vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3) + A_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3). \tag{32}$$

Mit Hilfe einer weiteren Formel $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$ verschwindet der zweite Term, da $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u_i = 0$ ist.
Jetzt setzen wir wieder $(\vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3) = \frac{1}{h_{u_2} h_{u_3}} \vec{e_{u_1}}$ gleich und erhalten schließlich

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{e_{u_1}} A_{u_1}(u_1,u_2,u_3)) = \frac{1}{h_{u_2} h_{u_3}} \vec{e_{u_1}} \cdot \vec{\nabla}(h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \frac{\partial (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1})}{\partial u_1}, \tag{33}$$

wobei wir beim Herausprojizieren der $\vec{e_{u_1}}$-Komponente Gleichung (26) verwendet haben. Die beiden anderen Terme können analog bestimmt werden. Damit erhalten wir als Endergebnis für die Divergenz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_{u_1} h_{u_3} A_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_{u_1} h_{u_2} A_{u_3}) \right] \tag{34}$$

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Gleichung (34) die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ in

a) Zylinderkoordinaten
b) Kugelkoordinaten.

Aufgabe 5:
Vergleichen Sie nun Ihre Rechnungen mit den Ergebnissen, die sie in Kapitel 8 des Buches „*Mathematische Methoden in der Physik*“ finden.