

Skript: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Vladimir Lazić

(nach dem Mitschrieb von Marian Dietz im Sommersemester 2018)

Inhaltsverzeichnis

1	Adjungierte Abbildungen und der Dualraum	1
	Adjungierte Abbildungen	1
	Projektionen	8
	Der Dualraum	10
	Darstellungssatz von Riesz	11
2	Bilineare und quadratische Formen	15
	Bilineare Formen	15
	Sesquilineare Formen	18
	Bilinearformen und der Dualraum	20
	Quadratische Formen	21
	Definitheit	23
	Index und Signatur	29
3	Polynome in linearen Abbildungen	34
	Polynome einer Unbestimmten	34

1 Adjungierte Abbildungen und der Dualraum

Adjungierte Abbildungen

Wir fangen an mit einem einfachen, aber sehr hilfreichen Lemma.

Lemma 1.1. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und seien $u, w \in V$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Dann gilt $u = w$.

Beweis. Aus der Voraussetzung des Lemmas folgt, dass

$$\langle u - w, v \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Dies bedeutet, dass $u - w \in V^\perp = \{0\}$, und damit folgt das Lemma. $\square$

Lemma 1.2. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann gibt es einen eindeutigen Endomorphismus $T^*: V \rightarrow V$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V. \quad (1)$$

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V und definiere

$$T^*(w) := \sum_{i=1}^n \overline{\langle T(v_i), w \rangle} v_i \quad \text{für jedes } w \in V.$$

Dann gilt, für $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \langle v_j, T^*(w) \rangle &= \left\langle v_j, \sum_{i=1}^n \overline{\langle T(v_i), w \rangle} v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v_j, \overline{\langle T(v_i), w \rangle} v_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle T(v_i), w \rangle \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{=\delta_{ij}} = \langle T(v_j), w \rangle. \end{aligned}$$

Es folgt, dass für jedes $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle v, T^*(w) \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, T^*(w) \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle v_j, T^*(w) \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle T(v_j), w \rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j T(v_j), w \right\rangle = \left\langle T\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right), w \right\rangle = \langle T(v), w \rangle. \end{aligned}$$

Dies zeigt (1).

Als Nächstes zeigen wir, dass die Abbildung T^* linear ist. Und zwar, fixiere $w_1, w_2 \in V$ und Skalare α_1 und α_2 . Für $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle v, T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \rangle &= \langle T(v), \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle T(v), w_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle T(v), w_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle v, T^*(w_1) \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v, T^*(w_2) \rangle \\ &= \langle v, \alpha_1 T^*(w_1) + \alpha_2 T^*(w_2) \rangle,\end{aligned}$$

und folglich

$$T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 T^*(w_1) + \alpha_2 T^*(w_2)$$

nach Lemma 1.1.

Letztlich zeigen wir die Eindeutigkeit. Angenommen, es gibt lineare Abbildungen $T_1^*, T_2^*: V \rightarrow V$ mit den Eigenschaften, dass

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T_1^*(w) \rangle \quad \text{und} \quad \langle T(v), w \rangle = \langle v, T_2^*(w) \rangle$$

für alle $v, w \in V$. Daraus folgt, dass

$$\langle v, T_1^*(w) \rangle = \langle v, T_2^*(w) \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

und damit $T_1^*(w) = T_2^*(w)$ für alle $w \in V$ nach Lemma 1.1. $\square$

Definition 1.3. Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Die in Lemma 1.2 konstruierte Abbildung $T^*: V \rightarrow V$ heißt die zu T adjungierte Abbildung.

Bemerkung 1.4. Es ist einfach zu sehen, dass auch

$$\langle v, T(w) \rangle = \langle T^*(v), w \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Proposition 1.5. Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V . Sei $T: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und sei A die Darstellungsmatrix von T bzgl. $\mathcal{B}$. Dann ist die Darstellungsmatrix der adjungierten Abbildung $T^*: V \rightarrow V$ bzgl. $\mathcal{B}$ die Matrix $\overline{A}^T$.

Beweis. Sei $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ und sei $A = (a_{ij})$. Sei $C = (c_{ij})$ die Darstellungsmatrix von T^* bzgl. $\mathcal{B}$. Für jeden Vektor $v \in V$ gilt nach LA1:

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Insbesondere gilt

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^n \langle T(u_j), u_i \rangle u_i \quad \text{and} \quad T^*(u_j) = \sum_{i=1}^n \langle T^*(u_j), u_i \rangle u_i.$$

Aus diesen zwei Gleichungen sehen wir sofort, dass

$$a_{ij} = \langle T(u_j), u_i \rangle \quad \text{und} \quad c_{ij} = \langle T^*(u_j), u_i \rangle.$$

Aber

$$c_{ij} = \langle T^*(u_j), u_i \rangle = \langle u_j, T(u_i) \rangle = \overline{\langle T(u_i), u_j \rangle} = \overline{a_{ji}},$$

und die Proposition ist bewiesen. $\square$

Die folgende Proposition ist einfach zu beweisen.

Proposition 1.6. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum, seien $S, T: V \rightarrow V$ lineare Abbildungen und sei λ ein Skalar. Dann gilt:*

$$(i) \quad (T^*)^* = T,$$

$$(ii) \quad (S + T)^* = S^* + T^*,$$

$$(iii) \quad (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*,$$

$$(iv) \quad (S \circ T)^* = T^* \circ S^*.$$

Beweis. Übungsblatt. $\square$

Proposition 1.7. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

$$(i) \quad (\text{Im } T)^\perp = \ker T^*,$$

$$(ii) \quad (\ker T)^\perp = \text{Im } T^*,$$

$$(iii) \quad (\text{Im } T^*)^\perp = \ker T,$$

$$(iv) \quad (\ker T^*)^\perp = \text{Im } T.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst (i). Sei $u \in V$. Nach Lemma 1.1 gilt

$$u \in \ker T^* \iff \langle v, T^*(u) \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V$$

und

$$u \in (\text{Im } T)^\perp \iff \langle T(v), u \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

Da $\langle v, T^*(u) \rangle = \langle T(v), u \rangle$ für alle $v \in V$, aus diesen Äquivalenzen folgt (i).

Aus (i) und Proposition 1.6 folgt $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \ker((T^*)^*) = \ker T$, und damit

$$\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp\perp} = (\ker T)^\perp.$$

Man beweist (iii) und (iv) ähnlich. $\square$

Nun werden wir wichtige Endomorphismen einführen.

Definition 1.8. Sei V ein n -dimensionaler Skalarproduktraum, sei $T: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und sei A die assoziierte Darstellungsmatrix von T bezüglich einer Orthonormalbasis von V . Dann:

- (i) T (bzw. A) heißt *normal*, falls $T \circ T^* = T^* \circ T$ (bzw. $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$),
- (ii) T (bzw. A) heißt *selbstadjungiert* (bzw. *hermitesch*), falls $T^* = T$ (bzw. $\bar{A}^T = A$),
- (iii) T (bzw. A) heißt *orthogonal*, falls $T \circ T^* = \operatorname{Id}_V$ und V reell ist (bzw. $AA^T = I_n$ und V ist reell),
- (iv) T (bzw. A) heißt *unitär*, falls $T \circ T^* = \operatorname{Id}_V$ und V komplex ist (bzw. $AA^T = I_n$ und V ist komplex).

Proposition 1.9. Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) T ist normal,
- (ii) $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle T^*(v), T^*(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$,
- (iii) $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ für alle $v \in V$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Und zwar, es gilt

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, T^*(T(w)) \rangle \quad \text{und} \quad \langle T^*(v), T^*(w) \rangle = \langle v, T(T^*(w)) \rangle$$

nach der Definition der adjungierten Abbildung. Deswegen ist die Gleichung

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle T^*(v), T^*(w) \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V$$

äquivalent zur Gleichung

$$\langle v, T^*(T(w)) \rangle = \langle v, T(T^*(w)) \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Diese Gleichung ist, nach Lemma 1.1, wiederum äquivalent zu

$$(T^* \circ T)(w) = (T \circ T^*)(w) \quad \text{für alle } w \in V,$$

und dies ist schließlich äquivalent zu $T^* \circ T = T \circ T^*$.

Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist offensichtlich. Für die umgekehrte Implikation nutzt man die Parallelogrammidentität aus LA1. $\square$

Korollar 1.10. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T: V \rightarrow V$ eine normale Abbildung. Dann gilt:*

- (1) $\ker T = \ker T^*$,
- (2) ein Skalar λ ist ein Eigenwert von T genau dann, wenn $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von T^* ist,
- (3) $v \in V$ ist genau dann ein Eigenvektor von T zu einem Eigenwert λ , wenn v ein Eigenvektor von T^* zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ ist.

Beweis. Nach dem vorigen Satz gilt $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ für alle $v \in V$, und deswegen ist die Bedingung $T(v) = 0$ für einen Vektor $v \in V$ äquivalent zu $T^*(v) = 0$. Dies zeigt (1).

Ferner, mit Hilfe der Proposition 1.6 gilt

$$(\lambda \text{Id}_V - T)^* = (\lambda \text{Id}_V)^* - T^* = \bar{\lambda} \text{Id}_V - T^*,$$

und aus (1) folgt

$$\ker(\lambda \text{Id}_V - T) = \ker(\bar{\lambda} \text{Id}_V - T^*).$$

Dies zeigt (2) und (3). $\square$

Proposition 1.11. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) T ist orthogonal bzw. unitär,
- (ii) T ist eine Isometrie, d.h. $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$,
- (iii) T ist ein Isomorphismus mit $T^{-1} = T^*$,
- (iv) $\|T(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Und zwar, nach der Definition der adjungierten Abbildung gilt

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle T^*(T(v)), w \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

und damit gilt $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ genau dann, wenn

$$\langle v, w \rangle = \langle T^*(T(v)), w \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Dies gilt genau dann, wenn $T^*(T(v)) = v$ für alle $v \in V$, und dies ist äquivalent zu

$$T^* \circ T = \text{Id}_V.$$

Dies zeigt (iii) $\Rightarrow$ (ii) sofort. Andererseits, diese letzte Gleichung zeigt insbesondere, dass T injektiv ist und deswegen ein Isomorphismus ist (nach LA1, da V endlich-dimensional ist). Es folgt, dass $T^{-1} = T^*$, und die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist bewiesen. Dieser Beweis zeigt auch, dass (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Man zeigt die Äquivalenz (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) wie im Beweis von Proposition 1.9. $\square$

Bemerkung 1.12. Die Proposition zeigt, dass orthogonale/unitäre Abbildungen normal sind, und dass die Definition von orthogonale/unitäre Abbildungen übereinstimmt mit der Definition aus LA1. Es ist auch offensichtlich, dass selbstadjungierte Abbildungen normal sind. Orthogonale, unitäre und hermitesche Matrizen haben wir bereits in LA1 kennengelernt. Eine Abbildung T ist normal bzw. selbstadjungiert bzw. orthogonal bzw. unitär genau dann, wenn ihre Darstellungsmatrix A bezüglich einer Orthonormalbasis für V normal bzw. hermitesch bzw. orthogonal bzw. unitär ist.

Korollar 1.13. Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T: V \rightarrow V$ ein orthogonaler/unitärer Endomorphismus. Dann gilt:

- (1) $T^{-1}: V \rightarrow V$ ist ebenfalls orthogonal/unitär,
- (2) ist λ ein Eigenwert von T , so gilt $|\lambda| = 1$.

Beweis. Da T orthogonal/unitär ist, so ist $T^{-1} = T^*$ nach der vorigen Proposition. Mit Hilfe der Proposition 1.6 gilt

$$T^{-1} \circ (T^{-1})^* = T^{-1} \circ (T^*)^* = T^{-1} \circ T = \text{Id}_V,$$

und damit folgt (1).

Nun, sei λ ein Eigenwert von T und sei v der zu λ zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt:

$$\|v\| = \|T(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|,$$

und (2) folgt, da $v \neq 0$. $\square$

Satz 1.14 (Spektralsatz für normale Abbildungen). *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T: V \rightarrow V$ eine normale Abbildung. Wir setzen voraus, dass das charakteristische Polynom von T in Linearfaktoren (über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) zerfällt (dies ist automatisch, wenn V unitär ist).*

Dann hat V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von T und insbesondere ist T diagonalisierbar.

Beweis. Der Beweis ist per Induktion nach der Dimension n von V . (Er ist ähnlich zum Beweis vom Spektralsatz für unitäre Abbildungen in LA1.)

Der Fall $n = 1$ ist trivial.

Sei nun die Aussage für $n - 1$ richtig. Da das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, so hat T einen Eigenwert λ . Sei v_1 ein zu λ zugehöriger Eigenvektor mit $\|v_1\| = 1$ und sei $U := \langle v_1 \rangle$. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$ mit $\dim U^\perp = n - 1$.

Wir zeigen nun, dass $U^\perp$ ein T -invarianter Unterraum von V ist. Und zwar, mit Hilfe vom Korollar 1.10, für $u \in U^\perp$ gilt:

$$\langle T(u), v_1 \rangle = \langle u, T^*(v_1) \rangle = \langle u, \bar{\lambda} v_1 \rangle = \lambda \langle u, v_1 \rangle = 0,$$

und damit gilt $T(u) \in U^\perp$.

Damit gilt $T|_{U^\perp} \in \text{End}(U^\perp)$, und man sieht sofort, dass $T|_{U^\perp}$ ein normaler Endomorphismus von $U^\perp$ ist und dass sein charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Per Induktionsvoraussetzung existiert eine Orthonormalbasis $\{v_2, \dots, v_n\}$ von $U^\perp$ aus Eigenvektoren von $T|_{U^\perp}$. Es folgt, dass die Menge $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von T ist. $\square$

Wir erinnern uns an die folgende Proposition aus LA1 (die dort als Teil von Hauptachsentransformation für hermitesche Matrizen bewiesen wurde; wenn V euklidisch ist reduziert sich der Beweis mit ein bisschen Arbeit auf den komplexen Fall).

Proposition 1.15. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T: V \rightarrow V$ eine selbstadjungierte Abbildung. Dann zerfällt das charakteristische Polynom χ_T von T in lineare Faktoren.*

Korollar 1.16. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T: V \rightarrow V$ eine selbstadjungierte Abbildung. Dann hat V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von T und insbesondere ist T diagonalisierbar.*

Beweis. Folgt aus Satz 1.14 und Proposition 1.15. $\square$

Proposition 1.17. Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum, sei $T: V \rightarrow V$ eine normale Abbildung und seien v_1 und v_2 Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 von T . Dann gilt $v_1 \perp v_2$.

Beweis. Mit Hilfe von Korollar 1.10 gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T^*(v_2) \rangle \\ &= \langle v_1, \bar{\lambda}_2 v_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle v_1, v_2 \rangle,\end{aligned}$$

und damit $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

Projektionen

Nun definieren wir eine wichtige Unterklasse der linearen Abbildungen.

Definition 1.18. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P: V \rightarrow V$ ist eine *Projektion*, falls $P \circ P = P$. (Kürzer geschrieben: $P^2 = P$.)

Lemma 1.19. Ist $P: V \rightarrow V$ eine Projektion, dann gilt $V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $V = \ker P + \operatorname{Im} P$. Und zwar, sei $v \in V$. Dann gilt $v = (v - P(v)) + P(v)$, und da

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = 0,$$

so folgt $v - P(v) \in \ker P$.

Es bleibt zu zeigen, dass die Summe $\ker P + \operatorname{Im} P$ direkt ist. Und zwar, sei $v \in \ker P \cap \operatorname{Im} P$. Dann gibt es ein $w \in V$ mit $v = P(w)$, und aus $P(v) = 0$ folgt $v = P(w) = P(P(w)) = P(v) = 0$. □

Beispiel 1.20. Sei V ein Skalarproduktraum und sei $U \subseteq V$ ein endlich-dimensionaler Unterraum. Eine Projektion $P: V \rightarrow V$ heißt *orthogonale Projektion auf U* , falls

$$\ker P = U^\perp \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} P = U.$$

Sei $\{u_1, \dots, u_m\}$ eine Orthonormalbasis von U ist. Wir behaupten, dass dann

$$P(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle u_i \quad \text{für alle } v \in V. \quad (2)$$

Insbesondere: Es gibt *genau eine* orthogonale Projektion auf U .

Wir zeigen nun die Behauptung. Wir wissen aus Lemma 1.19, dass

$$v = u + w, \quad \text{wobei } u \in \operatorname{Im} P = U \text{ und } w \in \ker P = U^\perp.$$

Dann gilt $P(w) = 0$ und es existiert $z \in V$ mit $u = P(z)$, und damit

$$P(v) = P(u) + P(w) = P(u) = P(P(z)) = P(z) = u. \quad (3)$$

Da $u \in U$, gibt es Skalare α_i , sodass

$$u = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i.$$

Dann gilt, für jedes $j = 1, \dots, m$:

$$\langle v, u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i, u_j \right\rangle + \underbrace{\langle w, u_j \rangle}_{=0} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \alpha_j,$$

und damit

$$u = \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Dies, zusammen mit (3), zeigt (2).

Proposition 1.21. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $P \in \operatorname{End}(V)$ eine Projektion. Dann ist P orthogonal genau dann, wenn $P^* = P$.*

Beweis.

$\Leftarrow$: Sei $P^* = P$. Da P eine Projektion ist, so gilt

$$V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$$

nach Lemma 1.19. Aber nach Proposition 1.7 gilt

$$\ker P = (\operatorname{Im} P^*)^\perp = (\operatorname{Im} P)^\perp,$$

und somit ist P die orthogonale Projektion auf den Unterraum $\operatorname{Im} P$.

$\Rightarrow$: Sei P eine orthogonale Projektion. Dann gilt

$$V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P \quad \text{und} \quad \ker P = (\operatorname{Im} P)^\perp.$$

Aus $P^2 = P$ folgt $(P^*)^2 = P^*$ (nach Proposition 1.6) und nach Proposition 1.7 gilt

$$\operatorname{Im} P^* = (\ker P)^\perp = (\operatorname{Im} P)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} P.$$

sowie

$$\ker P^* = (\operatorname{Im} P)^\perp = \ker P.$$

Dies zeigt, dass P^* auch eine orthogonale Projektion auf $\operatorname{Im} P$ ist. Somit ist $P^* = P$ (nach Beispiel 1.20). $\square$

Der Dualraum

Definition 1.22. Sei V ein K -Vektorraum. Der Vektorraum $\text{Hom}(V, K)$ aller linearen Abbildungen $V \rightarrow K$ heißt (*algebraischer*) *Dualraum* zu V und wird mit V^* bezeichnet. Die Elemente von V^* heißen *lineare Funktionale* auf V .

Bemerkung 1.23. Sei $T \in V^* \setminus \{0\}$. Dann gilt:

- (1) T ist surjektiv, denn aus

$$0 < \dim(\text{Im } T) \leq \dim K = 1$$

folgt $\dim(\text{Im } T) = \dim K$ und daher $\text{Im } T = K$,

- (2) ist V endlich-dimensional, so ist dem Dimensionssatz zufolge:

$$\dim(\ker T) = \dim V - \dim(\text{Im } T) = \dim V - 1.$$

Satz 1.24. Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und sei die Menge $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis für V . Für jedes $j = 1, \dots, n$ sei $f_j \in V^*$ das eindeutige lineare Funktional ist mit der Eigenschaft, dass $f_j(e_i) = \delta_{ij}$ für jedes i . Dann ist die Menge $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine Basis von V^* . Insbesondere gilt $\dim V^* = \dim V$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $f_1, \dots, f_n$ linear unabhängig sind. Angenommen, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ sind Skalare, sodass $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0$. Dann gilt

$$0 = (\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n)(e_i) = \alpha_1 f_1(e_i) + \dots + \alpha_n f_n(e_i) = \alpha_i$$

für $i = 1, \dots, n$.

Nun zeigen wir, dass $\langle f_1, \dots, f_n \rangle = V^*$. Und zwar, sei $f \in V^*$ und setze $\beta_i := f(e_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$(\beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n)(e_i) = \beta_i = f(e_i)$$

für $i = 1, \dots, n$. Es folgt, dass die linearen Abbildungen f und $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ auf einer Basis von V übereinstimmen und sind somit gleich. Also, $f \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. $\square$

Definition 1.25. In der Notation des Satzes 1.24 ist $\{f_1, \dots, f_n\}$ die *Dualbasis* zu $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Bemerkung 1.26. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei V ein n -dimensionaler Vektorraum. Die Darstellungsmatrizen der Abbildungen im Dualraum $V^* = \text{Hom}(V, K)$ sind $(1 \times n)$ -Matrizen, also Zeilenvektoren. D.h. wenn

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle},$$

so gilt

$$f_i = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) \quad (\text{wobei } 1 \text{ auf der } i\text{-ten Stelle steht}).$$

Darstellungssatz von Riesz

Sei V ein Skalarproduktraum. Es ist einfach zu sehen, dass die Formel

$$T_v(w) := \langle w, v \rangle \quad \text{für } w \in V$$

ein lineares Funktional definiert, d.h. $T_v \in V^*$. Der folgende wichtige Satz zeigt, dass in endlich-dimensionalen Räumen die Umkehrung auch gilt.

Satz 1.27 (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum. Zu jedem $T \in V^*$ gibt es einen eindeutigen Vektor $v_T \in V$ derart, dass*

$$T(v) = \langle v, v_T \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis für V und definiere

$$v_T := \sum_{i=1}^n \overline{T(v_i)} v_i.$$

Dann gilt, für $j = 1, \dots, n$:

$$\langle v_j, v_T \rangle = \left\langle v_j, \sum_{i=1}^n \overline{T(v_i)} v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n T(v_i) \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{=\delta_{ij}} = T(v_j),$$

und deswegen, für $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \in V$ gilt:

$$T(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle v_j, v_T \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, v_T \right\rangle = \langle v, v_T \rangle.$$

Dies zeigt die Existenz des Vektors v_T .

Zur Eindeutigkeit: Wir nehmen an, dass es zwei Vektoren $v_T^1, v_T^2 \in V$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$T(v) = \langle v, v_T^1 \rangle = \langle v, v_T^2 \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Aber dann $v_T^1 = v_T^2$ nach Lemma 1.1. □

Beispiel 1.28. Sei $V := \mathbb{R}[X]^{\leq n}$. Für $p, q \in V$ definiert die Formel

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

ein Skalarprodukt auf V (Übung). Sei nun $x_0 \in (-1, 1)$ fest. Definiere das lineare Funktional $T \in V^*$ durch die Formel

$$T(p) := p(x_0) \quad \text{für } p \in V.$$

Der Rieszsche Satz, angewendet auf T und das Skalarprodukt oben, besagt, dass es dann ein Polynom $q_{x_0} \in V$ gibt derart, dass

$$\int_{-1}^1 p(x)q_{x_0}(x)dx = p(x_0) \quad \text{für alle } p \in V.$$

Proposition 1.29. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum. Zu jedem $T \in V^*$ sei $v_T \in V$ der nach dem Rieszschen Darstellungssatz eindeutig bestimmter Vektor. Dann ist die Abbildung*

$$\psi: V^* \rightarrow V, \quad T \mapsto v_T$$

eine Bijektion mit den Eigenschaften:

$$\psi(T_1 + T_2) = \psi(T_1) + \psi(T_2) \quad \text{und} \quad \psi(\alpha T) = \overline{\alpha} \psi(T)$$

für alle $T, T_1, T_2 \in V^$ und alle Skalare α .*

Beweis. Die Abbildung $\psi: V^* \rightarrow V$ ist bijektiv nach Satz 1.27 und dem Paragraphen vor diesem Satz. Ferner, für alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle v, \psi(T_1 + T_2) \rangle &= \langle v, v_{T_1+T_2} \rangle = (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \\ &= \langle v, v_{T_1} \rangle + \langle v, v_{T_2} \rangle = \langle v, v_{T_1} + v_{T_2} \rangle = \langle v, \psi(T_1) + \psi(T_2) \rangle,\end{aligned}$$

und damit $\psi(T_1 + T_2) = \psi(T_1) + \psi(T_2)$ nach Lemma 1.1. Auf ähnliche Weise, für alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle v, \psi(\alpha T) \rangle &= \langle v, v_{\alpha T} \rangle = (\alpha T)(v) = \alpha T(v) \\ &= \alpha \langle v, v_T \rangle = \langle v, \bar{\alpha} v_T \rangle = \langle v, \bar{\alpha} \psi(T) \rangle,\end{aligned}$$

und damit $\psi(\alpha T) = \bar{\alpha} \psi(T)$ nach Lemma 1.1. $\square$

Bemerkung 1.30. Mit der Notation wie in der Proposition: Ist V ein euklidischer Raum, dann ist $\psi: V^* \rightarrow V$ ein Isomorphismus, ansonsten ein *Anti-Isomorphismus* (d.h. es gilt $\psi(\alpha T) = \bar{\alpha} \psi(T)$ für alle $T \in V^*$ und alle Skalare α). Wir nennen diese Abbildung den *Rieszschen (Anti-)Isomorphismus*.

Proposition/Definition 1.31. Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum, sei $T: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, und sei $T': V^* \rightarrow V^*$ die duale Abbildung zu T , d.h.

$$T'(f) := f \circ T \quad \text{für } f \in V^*. \quad (4)$$

Diagrammatisch:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V \\ & \searrow T'(f) & \downarrow f \\ & & K \end{array}$$

Dann gilt

$$T^* = \psi \circ T' \circ \psi^{-1},$$

wobei $\psi: V^* \rightarrow V$ der Rieszsche (Anti-)Isomorphismus ist. In anderen Worten, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{T'} & V^* \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ V & \xrightarrow{T^*} & V \end{array}$$

ist kommutativ.

Beweis. Für jeden Vektor $u \in V$ bezeichne mit $f_u := \psi^{-1}(u) \in V^*$ das nach dem Rieszschen Darstellungssatz assoziierte lineare Funktional. (In anderen Worten, $f_u(z) = \langle z, u \rangle$ für alle $z \in V$).

Nun, für alle $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned} T'(f_v)(w) &= (f_v \circ T)(w) = f_v(T(w)) \\ &= \langle T(w), v \rangle = \langle w, T^*(v) \rangle = f_{T^*(v)}(w), \end{aligned}$$

und deswegen $T'(f_v) = f_{T^*(v)}$ für alle $v \in V$. In anderen Worten,

$$T'(\psi^{-1}(v)) = \psi^{-1}(T^*(v)) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Folglich, $T' \circ \psi^{-1} = \psi^{-1} \circ T^*$, und die Aussage folgt. $\square$

2 Bilineare und quadratische Formen

Bilineare Formen

Definition 2.1. Sei V ein K -Vektorraum. Eine *Bilinearform* auf V ist eine Abbildung $b: V \times V \rightarrow K$, die in beiden Argumenten linear ist, d.h. für alle $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ gilt

$$b(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 b(x_1, y) + \alpha_2 b(x_2, y),$$

sowie

$$b(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 b(x, y_1) + \alpha_2 b(x, y_2).$$

Diese Bilinearform ist *symmetrisch*, falls

$$b(x, y) = b(y, x) \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Beispiel 2.2.

- (1) Sei V ein euklidischer Vektorraum. Das Skalarprodukt auf V definiert eine symmetrische Bilinearform:

$$b(x, y) := \langle x, y \rangle.$$

- (2) Nicht jede Bilinearform ist symmetrisch. Und zwar, definiere

$$b(x, y) := \det(x \mid y),$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}^2$. Dann ist b eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$, aber $b(x, y) = -b(y, x)$.

(Eine Bilinearform $b: V \times V \rightarrow K$ mit $b(x, y) = -b(y, x)$ für alle $x, y \in V$ nennen wir *schiefssymmetrisch*.)

Definition 2.3. Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, sei b eine Bilinearform auf V und sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V . Die Matrix

$$M_n(K) \ni M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & \cdots & b(e_1, e_n) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & \cdots & b(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e_n, e_1) & b(e_n, e_2) & \cdots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix} = (b(e_i, e_j))_{i,j}$$

heißt *Gram-Matrix* von b bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Beispiel 2.4. Die Gram-Matrix des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ bezüglich der kanonischen Basis auf $\mathbb{R}^n$ ist I_n (denn $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$).

Proposition 2.5. Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V .

- (i) Sei b eine Bilinearform auf V mit der Gram-Matrix $M_{\mathcal{B}}(b) = (m_{ij})_{i,j}$. Dann gilt

$$b(x, y) = \underbrace{(x_1 \ \cdots \ x_n)}_{=x^T} M_{\mathcal{B}}(b) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i y_j$$

für alle Vektoren $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ und $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ in V .

- (ii) Sei $M = (m_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$. Dann definiert die Formel

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i y_j$$

eine Bilinearform $b(x, y)$ auf V . Ferner ist $M_{\mathcal{B}}(b) = M$.

Beweis. Übungsblatt. □

Korollar 2.6. Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V . Dann ist die Abbildung

$$b \mapsto M_{\mathcal{B}}(b)$$

eine Bijektion von der Menge aller Bilinearformen auf V nach der Menge $M_n(K)$. Ferner ist b genau dann symmetrisch, wenn $M_{\mathcal{B}}(b)$ eine symmetrische Matrix ist.

Beweis. Die Injektivität und Surjektivität der Abbildung folgen aus (i) und (ii) der Proposition 2.5.

Zur Symmetrie: Für alle Vektoren $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ und $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ in V gilt

$$b(y, x) = \underbrace{y^T M_{\mathcal{B}}(b) x}_{\text{da } y^T M_{\mathcal{B}}(b) x \text{ ein Skalar ist}} = (y^T M_{\mathcal{B}}(b) x)^T = x^T M_{\mathcal{B}}(b)^T y$$

und

$$b(x, y) = x^T M_{\mathcal{B}}(b) y$$

sodass

$$b(x, y) = b(y, x) \iff M_{\mathcal{B}}(b) = M_{\mathcal{B}}(b)^T,$$

und das Korollar ist bewiesen. □

Bemerkung 2.7. Wir haben im Beweis des Korollars benutzt, dass (in der Notation wie im Beweis) für zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ gilt:

$$x^T A y = x^T B y \quad \text{für alle } x, y \in V \quad \Longleftrightarrow \quad A = B.$$

Man zeigt dies einfach, indem man x und y durch verschiedene Elemente der Basis $\mathcal{B}$ ersetzt.

Proposition 2.8. Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, sei b eine Bilinearform auf V und seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V . Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}'}(b) = (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^T M_{\mathcal{B}}(b) T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Hier ist $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}'$ zu $\mathcal{B}$, die in LA1 definiert wurde.

Beweis. Seien $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$. Zu jedem Vektor $x \in V$ schreiben wir $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ und $x = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n$, und definiere Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in M_{n,1}(K)$ als Koordinatenvektoren von x bezüglich dieser zwei Basen, also

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' := \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Ähnlich für den Vektor $y \in V$ und Koordinatenvektoren $\mathbf{y}$ und $\mathbf{y}'$. Nach der Definition der Basiswechselmatrix gilt

$$\mathbf{x} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathbf{x}' \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathbf{y}'. \quad (5)$$

Nun: Aus

$$b(x, y) = \mathbf{x}^T M_{\mathcal{B}}(b) \mathbf{y} \quad \text{und} \quad b(x, y) = (\mathbf{x}')^T M_{\mathcal{B}'}(b) \mathbf{y}'$$

und aus (5) folgt

$$(\mathbf{x}')^T (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^T M_{\mathcal{B}}(b) T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathbf{y}' = \mathbf{x}^T M_{\mathcal{B}}(b) \mathbf{y} = (\mathbf{x}')^T M_{\mathcal{B}'}(b) \mathbf{y}'$$

für alle $x, y \in V$. Bemerkung 2.7 impliziert dann

$$(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^T M_{\mathcal{B}}(b) T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}(b).$$

Der Beweis ist nun komplett. □

Aus der Proposition folgt sofort:

Korollar 2.9. Es sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum. Dann definieren zwei Matrizen $M_1, M_2 \in M_n(K)$ dieselbe Bilinearform auf V genau dann, wenn es eine Matrix $B \in \text{GL}(n, K)$ gibt, mit

$$M_1 = B^T M_2 B.$$

Ferner definiert die Formel

$$M_1 \sim M_2 \iff \exists B \in \text{GL}(n, K) : M_1 = B^T M_2 B$$

eine Äquivalenzrelation auf $M_n(K)$.

Sesquilineare Formen

Definition 2.10. Sei V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Eine *Sesquilinearform* auf V ist eine Abbildung $s: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, die im ersten Argument linear und im zweiten Argument anti-linear ist. D.h. für alle $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$s(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 s(x_1, y) + \alpha_2 s(x_2, y),$$

sowie

$$s(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} s(x, y_1) + \overline{\alpha_2} s(x, y_2).$$

Eine Sesquilinearform s heißt *hermitesch*, falls

$$s(x, y) = \overline{s(y, x)} \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Bemerkung 2.11. Für eine hermitesche Form s wie in der Definition gilt

$$s(x, x) \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } x \in V,$$

da $s(x, x) = \overline{s(x, x)}$.

Beispiel 2.12. Das Skalarprodukt auf einem unitären Raum V ist ein Beispiel einer hermiteschen Form.

Definition 2.13. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Sei s eine Sesquilinearform auf V und sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V . Die Matrix

$$M_{\mathcal{B}}(s) = (s(e_i, e_j))_{i,j=1,\dots,n}$$

heißt *Gram-Matrix von s bezüglich $\mathcal{B}$* .

Die Beweise der folgenden vier Resultate sind super-ähnlich zu den Beweisen der analogen Resultaten für Bilinearformen. Damit werden wir sie überspringen.

Proposition 2.14. *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum und $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V .*

(i) *Sei s eine Sesquilinearform auf V mit Gram-Matrix*

$$M_{\mathcal{B}}(s) = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Dann gilt

$$s(x, y) = x^T M_{\mathcal{B}}(s) \bar{y} = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i \bar{y}_j,$$

wobei $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ und $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$.

(ii) *Sei $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{C})$. Dann definiert die Formel*

$$s(x, y) = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i \bar{y}_j,$$

eine Sesquilinearform auf V . Ferner ist $M = M_{\mathcal{B}}(s)$.

Korollar 2.15. *Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum und sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V . Dann ist die Abbildung*

$$s \mapsto M_{\mathcal{B}}(s)$$

eine Bijektion von der Menge aller Sesquilinearformen auf V nach der Menge $M_n(\mathbb{C})$. Ferner ist s genau dann hermitesch, wenn $M_{\mathcal{B}}(s)$ eine hermitesche Matrix ist.

Proposition 2.16. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum, sei s eine Sesquilinearform auf V und seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V . Dann gilt:*

$$M_{\mathcal{B}'}(s) = (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^T M_{\mathcal{B}}(s) \overline{T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}.$$

Korollar 2.17. *Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Dann definieren $M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{C})$ dieselbe Sesquilinearform auf V genau dann, wenn es eine Matrix $B \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ gibt, sodass $M_1 = B^T M_2 \bar{B}$. Ferner definiert die Formel*

$$M_1 \sim M_2 \iff \exists B \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) : M_1 = B^T M_2 \bar{B}$$

eine Äquivalenzrelation auf $M_n(\mathbb{C})$.

Bilinearformen und der Dualraum

Sei V ein K -Vektorraum und sei b eine Bilinearform auf V .

- (a) Für jedes feste $v \in V$ ist die Abbildung

$$b(v, \cdot): V \rightarrow K, \quad w \mapsto b(v, w)$$

ein Element im Dualraum V^* . (Hier bedeutet $b(v, \cdot)$, dass v fest ist und das Argument $\cdot$ durch V läuft).

Folglich haben wir eine Abbildung

$$L_b: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto b(v, \cdot).$$

Diese Abbildung ist linear: Und zwar, für alle $v, w, z \in V$ und für alle $\alpha, \beta \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} L_b(\alpha v + \beta w)(z) &= b(\alpha v + \beta w, z) = \alpha b(v, z) + \beta b(w, z) \\ &= \alpha L_b(v)(z) + \beta L_b(w)(z) = (\alpha L_b(v) + \beta L_b(w))(z), \end{aligned}$$

und somit $L_b(\alpha v + \beta w) = \alpha L_b(v) + \beta L_b(w)$ für alle $v, w \in V$.

Umgekehrt, sei $T: V \rightarrow V^*$ eine lineare Abbildung. So definiert die Formel

$$b(v, w) := T(v)(w)$$

eine Bilinearform auf V , mit der Eigenschaft, dass $L_b = T$. Der Beweis ist eine Übung.

Fazit: Die Abbildung $b \mapsto L_b$ ist eine Bijektion zwischen der Menge aller Bilinearformen auf V und der Menge aller linearen Abbildungen $V \rightarrow V^*$.

- (b) Für jedes feste $v \in V$ ist die Abbildung

$$b(\cdot, v): V \rightarrow K, \quad w \mapsto b(w, v)$$

ein Element im Dualraum V^* . Ähnlich wie oben definiert man eine Abbildung

$$R_b: V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto b(\cdot, v).$$

Die Abbildung $b \mapsto R_b$ ist eine Bijektion zwischen der Menge aller Bilinearformen auf V und der Menge aller linearen Abbildungen $V \rightarrow V^*$.

Definition 2.18. Eine Bilinearform b auf einem K -Vektorraum V heißt *nicht ausgeartet*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Wenn $b(v, w) = 0$ für alle $v \in V$, so ist $w = 0$.
- (ii) Wenn $b(v, w) = 0$ für alle $w \in V$, so ist $v = 0$.

Beispiel 2.19. Ein Skalarprodukt ist eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform.

Proposition 2.20. Sei V ein K -Vektorraum und sei b eine Bilinearform auf V . Dann ist b nicht ausgeartet genau dann, wenn die Abbildungen L_b und R_b injektiv sind. Insbesondere, wenn V endlich-dimensional ist, dann sind L_b und R_b bijektiv.

Beweis. Übung. □

Lemma 2.21. Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und sei b eine Bilinearform auf V . Sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ die Dualbasis zu $\mathcal{B}$ von V^* . Sei M die Darstellungsmatrix der Abbildung R_b bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}}(b) = M.$$

Beweis. Übung. □

Korollar 2.22. Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und sei b eine Bilinearform auf V . Dann ist b genau dann nicht ausgeartet, wenn $M_{\mathcal{B}}(b)$ invertierbar ist.

Beweis. Übung. □

Quadratische Formen

Definition 2.23. Sei V ein K -Vektorraum und sei b eine symmetrische Bilinearform auf V . Die Abbildung

$$q: V \rightarrow K, \quad v \mapsto b(v, v)$$

ist die zu b zugehörige *quadratische Form*.

Proposition 2.24. Sei V ein K -Vektorraum, wobei $\text{char}(K) \neq 2$. Eine Abbildung $q: V \rightarrow K$ ist genau dann eine quadratische Form, wenn

- (i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ für alle $\lambda \in K$, $v \in V$; und wenn

(ii) die Formel

$$b(v, w) := \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$$

eine symmetrische Bilinearform auf V definiert. In diesem Fall ist q die zu b zugehörige quadratische Form.

Beweis.

$\Rightarrow$: Sei q eine zu einer symmetrischen Bilinearform $\tilde{b}$ zugehörige quadratische Form. Aus $q(v) = \tilde{b}(v, v)$ folgt (i) sofort. Ferner:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)) &= \frac{1}{2}(\tilde{b}(v + w, v + w) - \tilde{b}(v, v) - \tilde{b}(w, w)) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{b}(v, v) + \tilde{b}(v, w) + \tilde{b}(w, v) + \tilde{b}(w, w) - \tilde{b}(v, v) - \tilde{b}(w, w)) \\ &= \frac{1}{2}(2\tilde{b}(v, w)) = \tilde{b}(v, w), \end{aligned}$$

und (ii) folgt.

$\Leftarrow$: Angenommen, (i) und (ii) gelten. Dann gilt:

$$b(v, v) \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{2}(q(2v) - q(v) - q(v)) \stackrel{(i)}{=} \frac{1}{2}(4q(v) - 2q(v)) = q(v).$$

Dies zeigt auch die letzte Aussage. $\square$

Bemerkung 2.25. Mit der Notation aus Proposition 2.24 heißt die Identität

$$b(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$$

Polarisierungsidentität. Sie definiert eine Bijektion zwischen der Menge der symmetrischen Bilinearformen und der Menge der Funktionen $q: V \rightarrow K$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) der Proposition 2.24.

Definition 2.26. Sei K ein Körper. Ein *homogene quadratische Polynomfunktion* auf K^n ist die Abbildung

$$K^n \rightarrow K, \quad x \mapsto x^T M x,$$

wobei M eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix auf K ist.

Bemerkung 2.27. Wir benutzen die Notation aus der vorigen Definition.

- (i) Es folgt nach Korollar 2.6, dass die Abbildung $b(x, y) := x^T M y$ eine symmetrische Bilinearform ist. Damit ist die homogene quadratische Polynomfunktion aus der vorigen Definition die zu b zugehörige quadratische Form. Wir sagen, dass sie *zu M zugehörige quadratische Form* ist.

(ii) Sei $M = (m_{ij})_{i,j}$ und sei $x = (x_1 \ \cdots \ x_n)^T$. Dann gilt

$$x^T M x = \sum_{i=1}^n m_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2m_{ij} x_i x_j.$$

Die reelle quadratische Polynomfunktion

$$3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$$

lässt sich beispielsweise schreiben als

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Die Abbildung $M \mapsto x^T M x$ ist eine Bijektion von der Menge der symmetrischen Matrizen in $M_n(K)$ nach der Menge der homogenen quadratischen Polynomfunktionen auf K^n .

Die folgende Proposition, die sofort aus Proposition 2.5 folgt, ist eine Umkehrung von (i) der vorigen Bemerkung.

Proposition 2.28. *Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V und sei b eine symmetrische Bilinearform auf V . Dann ist die zu b zugehörige quadratische Form definiert durch die Formel*

$$q(x) = x^T M_{\mathcal{B}}(b)x$$

für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Definitheit

Nun kommen wir zu den wichtigen Begriffen der Definitheit.

Definition 2.29. Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine quadratische Form q auf V heißt

- (i) *positiv definit*, falls $q(v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$,
- (ii) *positiv semidefinit*, falls $q(v) \geq 0$ für alle $v \in V$,
- (iii) *negativ definit*, falls $q(v) < 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$,
- (iv) *negativ semidefinit*, falls $q(v) \leq 0$ für alle $v \in V$.

Sonst heißt q *indefinit*.

Bemerkung 2.30.

- (i) In der Notation aus der vorigen Definition sagen wir auch, dass die zu q zugehörige Bilinearform jeweils positiv/negativ (semi)definit ist.
- (ii) Das Skalarprodukt ist eine positiv definite Bilinearform.

Man kann in natürlicher Weise auch Definitheit von Matrizen definieren:

Definition 2.31. Sei $M \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Betrachte die quadratische Form $q(x) := x^T M x$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist M *positiv/negativ (semi)definit* genau dann, wenn q positiv/negativ (semi)definit ist.

Dann folgt sofort aus Korollar 2.9:

Korollar 2.32. Seien $M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{R})$ zwei symmetrische Matrizen. Sei $B \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, sodass $M_2 = B^T M_1 B$. Dann ist M_2 *positiv/negativ (semi)definit* genau dann, wenn M_1 *positiv/negativ (semi)definit* ist.

Wir machen nun eine Verbindung zwischen Definitheit einer quadratischen Form und deren Eigenwerten.

Satz 2.33. Sei $M \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und sei q die zu M zugehörige quadratische Form. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ und Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ von M , sodass

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

für alle $x = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt:

- (a) M ist genau dann *positiv (semi)definit*, wenn alle Eigenwerte von M *positiv (nicht negativ)* sind.
- (b) M ist genau dann *negativ (semi)definit*, wenn alle Eigenwerte von M *negativ (nicht positiv)* sind.

Beweis. Nach der Hauptachsentransformation (LA1) gibt es eine Matrix $B \in O(n)$, sodass

$$B^T M B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

für Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, die natürlich alle Eigenwerte von M sind. Wir machen einen Basiswechsel mithilfe der Matrix B^{-1} von der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$ zu einer neuen Basis $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$. Wenn die Koordinaten eines Vektors x in der kanonischen Basis $(x'_1 \cdots x'_n)$ sind, so sind die Koordinaten von x in der neuen Basis $\mathcal{B}$ durch die Formel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

gegeben.

Nun, q ist durch die Formel

$$q(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

gegeben. Mit Hilfe von (6) und (7) gilt:

$$\begin{aligned} q(x) &= \left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^T M B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T B^T M B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt die erste Behauptung, und (a) und (b) folgen sofort. $\square$

Beispiel 2.34. Betrachte die reelle quadratische Form

$$q(x) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Aus der Hauptachsentransformation bekommt man $B^T M B = D$, wobei

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Somit ist q in den neuen Koordinaten $(x'_1 \ x'_2 \ x'_3)$:

$$q(x') = -x_1'^2 - x_2'^2 + 8x_3'^2.$$

Diese quadratische Form ist also indefinit.

Wir werden nun ein Kriterium lernen, das uns hilft relativ einfach zu checken, ob eine Matrix positiv definit ist. Zuerst brauchen wir die folgende Definition.

Notation/Definition 2.35. Sei K ein Körper und sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Für jedes $k = 1, \dots, n$, bezeichne

$$A_k := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & \ddots & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \in M_k(K).$$

Die Skalare $\det A_k \in K$ heißen *Hauptminoren* von A .

Satz 2.36 (Hurwitz-Kriterium). *Eine symmetrische Matrix $M \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren von M positiv sind.*

Beweis.

$\implies$: Der Beweis ist per Induktion nach n . Die Aussage ist offensichtlich für $n = 1$. Sei nun $n \geq 2$ und wir nehmen an, dass die Aussage für $n - 1$ gilt.

Nach der Hauptachsentransformation gibt es eine Matrix $B \in O(n)$, sodass

$$B^T M B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

für Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, die natürlich alle Eigenwerte von M sind. Nach Satz 2.33 gilt $\lambda_i > 0$ für alle i . Aus (8) folgt:

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 \cdots \lambda_n &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \det(B^T M B) \\ &= \det B^T \cdot \det M \cdot \det B = \det M, \end{aligned}$$

wobei wir die Identität $B^{-1} = B^T$ benutzt haben. Es folgt $\det M > 0$, d.h. $\det M_n > 0$ in der Notation der vorigen Definition.

Es bleibt zu zeigen, dass alle Hauptminoren $\det M_i$ positiv sind für $1 \leq i \leq n-1$. Betrachte einen beliebigen Vektor der Form $z = (z_1, \dots, z_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$ und setze $z' = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$z'^T M_{n-1} z' = z^T M z,$$

und es gilt $z^T M z > 0$, da M positiv definit ist. Dies impliziert, dass

$$z'^T M_{n-1} z' > 0 \quad \text{für jeden Vektor } z' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

und deswegen ist die Matrix M_{n-1} positiv definit (per Definition). Per Induktion sind alle Hauptminoren von M_{n-1} positiv. Aber diese Hauptminoren sind genau die Zahlen $\det M_1, \dots, \det M_{n-1}$.

$\Leftarrow$: Der Beweis ist per Induktion nach n . Die Aussage ist offensichtlich für $n = 1$. Sei nun $n \geq 2$ und wir nehmen an, dass die Aussage für $n-1$ gilt.

Alle Hauptminoren der Matrix $M \in M_n(\mathbb{R})$ sind positiv. Insbesondere sind alle Hauptminoren der Matrix $M_{n-1} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ positiv, und somit ist M_{n-1} positiv definit per Induktion.

Nach der Hauptachsentransformation gibt es eine Matrix $C \in O(n-1)$, sodass

$$C^T M_{n-1} C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

für Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, die natürlich alle Eigenwerte von M_{n-1} sind. Nach Satz 2.33 gilt

$$\alpha_i > 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n-1. \quad (9)$$

Definiere

$$C' := \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Es ist einfach zu sehen, dass $C' \in O(n)$. Betrachte die Matrix

$$N := C'^T M C'.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass es Skalare $a_{nn}, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ gibt, sodass

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Andererseits gilt:

$$\det N = \det(C'^T M C') = \det M > 0, \quad (10)$$

wobei wir die Identität $(C')^{-1} = C'^T$ benutzt haben. Nun, setze:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -\frac{\beta_1}{\alpha_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass es einen Skalar α_n gibt, sodass

$$S^T N S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix},$$

und somit gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdots \alpha_n &= \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \det(S^T N S) \\ &= \det N \cdot (\det S)^2 = \det N > 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus (10) folgt und wir benutzt haben, dass $\det S^T = \det S = 1$. Zusammen mit (9) ergibt dies:

$$\alpha_n > 0.$$

Sei nun z ein beliebiger Vektor aus $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, und setze

$$(x_1, \dots, x_n) = x := S^{-1} C'^{-1} z.$$

Dann gilt $z = C' S x$, und folglich:

$$\begin{aligned} z^T M z &= (C' S x)^T M (C' S x) = x^T (S^T C'^T M C' S) x \\ &= x^T (S^T N S) x = x^T \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 > 0, \end{aligned}$$

da alle Skalare α_i positiv sind. Somit ist M positiv definit, per Definition. $\square$

Bemerkung 2.37. Wenn M eine negativ definite Matrix ist, dann ist $-M$ positiv definit. Dann gilt nach Satz 2.36, dass alle Hauptminoren von $-M$ positiv sind (dies sind Hauptminoren von M mit alternierend positiven und negativen Vorzeichen).

Beispiel 2.38. Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ ist positiv definit, da

$$\det(2) = 2 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0.$$

Index und Signatur

Definition 2.39. Sei M eine symmetrische Matrix in $M_n(\mathbb{R})$. Bezeichne mit k_M^+ bzw. k_M^- bzw. k_M^0 die Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte von M bzw. die Anzahl der Eigenwerte von M , die gleich Null sind (alle drei Zahlen mit algebraischer Vielfachheit). Man nennt k_M^+ den *Index* von M , und $k_M^+ - k_M^-$ die *Signatur* von M . Die Matrix

$$\begin{pmatrix} I_{k_M^+} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{k_M^-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdot I_{k_M^0} \end{pmatrix}$$

heißt die *sylvestersche Normalform* von M .

Bemerkung 2.40.

- (a) In der obigen Notation gilt $k_M^+ + k_M^- + k_M^0 = n$ und $k_M^0 = \text{def}(M)$.
- (b) Die einfachste Methode, die sylvestersche Normalform einer symmetrischen Matrix zu berechnen, ist, das charakteristische Polynom von M zu berechnen. Zum Beispiel ist die Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Korollars 2.32 und motiviert Definition 2.43.

Satz 2.41 (Trägheitssatz von Sylvester). *Seien A und B zwei äquivalente symmetrische Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$ (siehe Korollar 2.9). Dann haben A und B dieselbe sylvestersche Normalform.*

Bevor wir den Satz beweisen können, brauchen wir die folgende Bemerkung.

Bemerkung 2.42. Sei

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

und sei $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \text{Eig}(M, \lambda_i)$. Dann ist es einfach zu sehen, dass $v_k = 0$ wenn $\lambda_i \neq \lambda_k$. Daraus folgt nach einfacher Rechnung, dass für zwei Eigenvektoren $w \in \text{Eig}(M, \lambda_i)$ und $w' \in \text{Eig}(M, \lambda_j)$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$, gilt:

$$w^T M w' = 0 \quad \text{und} \quad w^T M w = \lambda_i \|w\|^2,$$

wobei $\|\cdot\|$ die kanonische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis vom Satz 2.41.

Schritt 1. Nach der Hauptachsentransformation gibt es Matrizen $S, Q \in O(n)$, sodass

$$S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: A', \quad Q^T B Q = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} =: B'$$

für Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ von A und Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ von B . Per Definition (aus dem Korollar 2.9) existiert eine Matrix $T \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ mit

$$B = T^T A T.$$

Setze $P := S^{-1} T Q \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Einfache Rechnung ergibt:

$$B' = P^T A' P.$$

Da A und A' ähnlich sind (da $S^{-1} = S^T$), so gilt $\chi_A = \chi_{A'}$; und auf ählicher Weise auch $\chi_B = \chi_{B'}$. Damit haben A und A' , bzw. B und B' , dieselbe

sylvestersche Normalform. Somit reicht es zu zeigen, dass die Matrizen A' und B' dieselbe sylvestersche Normalform haben.

Schritt 2. Seien $\Phi_{A'}$ bzw. $\Phi_{B'}$ bzw. Φ_P bzw. Φ_{P^T} die zu A' bzw. B' bzw. P bzw. P^T assoziierten linearen Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n$. Dann sind Φ_P und Φ_{P^T} Isomorphismen und somit gilt:

$$\begin{aligned}\text{rang } B' &= \dim(\Phi_{B'}(\mathbb{R}^n)) = \dim(\Phi_{P^T}(\Phi_{A'}(\Phi_P(\mathbb{R}^n)))) \\ &= \dim(\Phi_{P^T}(\Phi_{A'}(\mathbb{R}^n))) = \dim(\Phi_{A'}(\mathbb{R}^n)) = \text{rang } A'.\end{aligned}$$

Also, nach dem Dimensionssatz gilt:

$$k_{A'}^0 = n - \text{rang } A' = n - \text{rang } B' = k_{B'}^0. \quad (11)$$

Schritt 3. Bezeichne:

$$V_{A'}^+ := \bigoplus_{\lambda_i > 0} \text{Eig}(A', \lambda_i), \quad V_{A'}^- := \bigoplus_{\lambda_i < 0} \text{Eig}(A', \lambda_i), \quad V_{A'}^0 := \ker A' = \text{Eig}(A', 0),$$

und ähnlich für $V_{B'}^+$, $V_{B'}^-$ und $V_{B'}^0$. Damit gilt:

$$\mathbb{R}^n = V_{A'}^+ \oplus V_{A'}^- \oplus V_{A'}^0 \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^n = V_{B'}^+ \oplus V_{B'}^- \oplus V_{B'}^0,$$

sowie

$$k_{A'}^+ = \dim V_{A'}^+, \quad k_{A'}^- = \dim V_{A'}^-, \quad k_{A'}^0 = \dim V_{A'}^0,$$

und ähnlich für $k_{B'}^+$, $k_{B'}^-$ und $k_{B'}^0$. Wir behaupten, dass

$$\text{die Summe } \Phi_P^{-1}(V_{A'}^+) + (V_{B'}^- \oplus V_{B'}^0) \text{ direkt ist.} \quad (12)$$

Wir zeigen zuerst, dass der Satz aus (12) folgt, und danach zeigen wir (12) im Schritt 4.

Also, falls (12) gilt, so gilt

$$\Phi_P^{-1}(V_{A'}^+) \oplus V_{B'}^- \oplus V_{B'}^0 \subseteq \mathbb{R}^n,$$

und damit

$$\begin{aligned}k_{B'}^+ + k_{B'}^- + k_{B'}^0 &= n = \dim \mathbb{R}^n \geq \dim(\Phi_P^{-1}(V_{A'}^+) \oplus V_{B'}^- \oplus V_{B'}^0) \\ &= \dim(\Phi_P^{-1}(V_{A'}^+)) + \dim V_{B'}^- + \dim V_{B'}^0 = k_{A'}^+ + k_{B'}^- + k_{B'}^0.\end{aligned}$$

Es folgt $k_{B'}^+ \geq k_{A'}^+$. Wenn man die Rollen von A' und B' vertauscht, so bekommt man analog $k_{A'}^+ \geq k_{B'}^+$, und deswegen $k_{A'}^+ = k_{B'}^+$. Daraus und aus (11) folgt letztlich, dass

$$k_{A'}^- = n - k_{A'}^+ - k_{A'}^0 = n - k_{B'}^+ - k_{B'}^0 = k_{B'}^-.$$

Schritt 4. Es bleibt nun (12) zu beweisen. Wir müssen also zeigen, dass

$$\Phi_P^{-1}(V_{A'}^+) \cap (V_{B'}^- \oplus V_{B'}^0) = \{0\}. \quad (13)$$

Sei

$$x \in \Phi_P^{-1}(V_{A'}^+) \cap (V_{B'}^- \oplus V_{B'}^0).$$

Einerseits, da $x \in V_{B'}^- \oplus V_{B'}^0$, so gibt es nicht-positive Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_k$ von B' und Vektoren $x_i \in \text{Eig}(B', \mu_i)$ mit

$$x = \sum_{i=1}^k x_i.$$

Somit gilt, mit Hilfe der Bemerkung 2.42:

$$x^T B' x = \left(\sum_{i=1}^k x_i^T \right) B' \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) = \sum_{i=1}^k \mu_i \|x_i\|^2 \leq 0, \quad (14)$$

wobei $\|\cdot\|$ die kanonische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Andererseits, da $x \in \Phi_P^{-1}(V_{A'}^+)$, so gibt es ein $y \in V_{A'}^+$ mit

$$x = \Phi_P^{-1}(y) = P^{-1}y.$$

Somit existieren positive Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ von A' und Vektoren $y_i \in \text{Eig}(A', \lambda_i)$ mit

$$y = \sum_{i=1}^{\ell} y_i.$$

Dann gilt, mit Hilfe der Bemerkung 2.42:

$$\begin{aligned} x^T B' x &= (P^{-1}y)^T B' (P^{-1}y) = y^T (P^{-1})^T B' P^{-1} y \\ &= y^T A' y = \left(\sum_{i=1}^{\ell} y_i^T \right) A' \left(\sum_{i=1}^{\ell} y_i \right) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \|y_i\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit (14) zeigt dies, dass $x^T B' x = 0$, und damit

$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \|y_i\|^2 = 0.$$

Dies ist möglich nur, wenn $\|y_i\| = 0$ für alle i , und damit $y_i = 0$ für alle i . Daraus folgt, dass $y = 0$, und somit $x = 0$. Dies zeigt (13), und der Beweis ist nun komplett. $\square$

Nun können wir die folgende Definition geben.

Definition 2.43. Man definiert den *Index* und die *Signatur* einer quadratischen Form als Index bzw. Signatur einer beliebigen Gram-Matrix ihrer assoziierten Bilinearform. Dies ist nach Satz 2.41 wohl-definiert.

3 Polynome in linearen Abbildungen

Polynome einer Unbestimmten

In diesem Abschnitt ist K immer ein Körper. Wir erinnern uns zuerst an das Divisionslemma aus LA1:

Lemma 3.1. *Seien $f, g \in K[T]$, wobei $g \neq 0$. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[x]$, sodass*

$$f = gq + r, \quad \text{wobei } \deg r < \deg g \text{ oder } r = 0.$$

In der obigen Notation, wenn $f = gq$, dann sagen wir, dass f durch g teilbar ist und schreiben wir $g \mid f$.

Definition 3.2. Ein nicht-konstantes Polynom $f \in K[x]$ heißt *irreduzibel*, falls aus der Tatsache, dass ein Polynom $g \in K[x]$ das Polynom f teilt folgt, dass $g = \lambda f$ für $\lambda \in K$, oder $g \in K$. Ein nicht-konstantes Polynom $f \in K[x]$ heißt *reduzibel*, falls es nicht irreduzibel ist.

Bemerkung 3.3. Der Begriff „irreduzibel“ ist abhängig von K . Und zwar, das Polynom $x^2 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$, aber nicht in $\mathbb{C}[x]$, da $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$.

Den folgenden Satz werden wir erst in der Vorlesung „Algebra“ beweisen können.

Satz 3.4. *Sei f ein monisches Polynom in $K[x]$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung $f = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ von f in ein Produkt von Potenzen verschiedener irreduzibler monischer Polynome $p_i \in K[x]$.*

Bemerkung 3.5. Die Zerlegung im Satz 3.4 ist abhängig von K . Und zwar, betrachte das Polynom $x^4 - x^2 - 2$ als Polynom in $\mathbb{Q}[x]$ bzw. $\mathbb{R}[x]$ bzw. $\mathbb{C}[x]$. Dann hat dieses Polynom die folgenden Zerlegungen in irreduzible Faktoren über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \text{über } \mathbb{Q}: \quad & x^4 - x^2 - 2 = (x^2 - 2)(x^2 + 1), \\ \text{über } \mathbb{R}: \quad & x^4 - x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1), \\ \text{über } \mathbb{C}: \quad & x^4 - x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i)(x + i). \end{aligned}$$