Lösungsvorschlag Klausur Elektronik II SS2009

Aufgabe 1 (12 Punkte): Netzwerkberechnung

1. $\underline{Z}_1$ in Reihe zur Stromquelle $\underline{I}_1$ $\rightarrow$unwirksam für $\underline{U}_\mathrm{x}$
   Überlagerungssatz:

$$\underline{I}_\mathrm{x} = \underline{H}_{\mathrm{x}1}\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_{\mathrm{x}1}\,\underline{U}_1 + \underline{Z}_{\mathrm{x}2}\,\underline{U}_2$$

$$\underline{H}_{\mathrm{x}1} = \left.\frac{\underline{I}_\mathrm{x}}{\underline{I}_1}\right|_{U_1,U_2=0} \qquad \underline{U}_\mathrm{x}^{(1)} = -\underline{I}_1\frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{x}}+\frac{1}{\underline{Z}_3}} \qquad \underline{I}_\mathrm{x}^{(1)} = \frac{\underline{U}_\mathrm{x}}{\underline{Z}_\mathrm{x}}$$

$$\underline{Z}_{\mathrm{x}1} = \left.\frac{\underline{I}_\mathrm{x}}{\underline{U}_1}\right|_{I_1,U_2=0} \qquad \underline{U}_\mathrm{x}^{(2)} = \underline{U}_1\frac{\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_3} \qquad \underline{I}_\mathrm{x}^{(2)} = \frac{\underline{U}_\mathrm{x}}{\underline{Z}_\mathrm{x}}$$

$$\underline{Z}_{\mathrm{x}2} = \left.\frac{\underline{I}_\mathrm{x}}{\underline{U}_2}\right|_{I_1,U_1=0} \qquad \underline{U}_\mathrm{x}^{(3)} = \underline{U}_2\frac{\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_2} \qquad \underline{I}_\mathrm{x}^{(3)} = \frac{\underline{U}_\mathrm{x}}{\underline{Z}_\mathrm{x}}$$

   einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}\underline{I}_\mathrm{x} &= \sum_i \underline{I}_\mathrm{x}^{(i)}\\ &= \frac{-1}{1+\frac{\underline{Z}_\mathrm{x}}{\underline{Z}_2}+\frac{\underline{Z}_\mathrm{x}}{\underline{Z}_3}}\,\underline{I}_1 + \frac{\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_3}{\underline{Z}_\mathrm{x}\,(\underline{Z}_2+\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_3)}\,\underline{U}_1 + \frac{\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_2}{\underline{Z}_\mathrm{x}(\underline{Z}_3+\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_2)}\,\underline{U}_2\end{aligned}$$

2. $\underline{Z}_\mathrm{x} \rightarrow \infty$

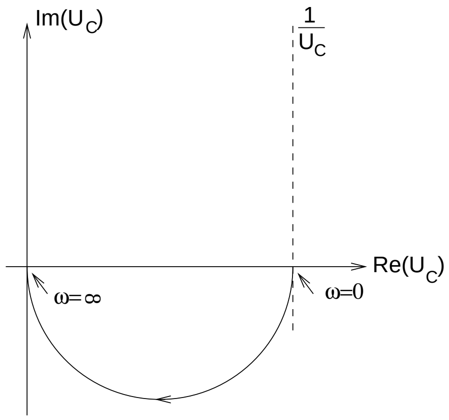
$$\begin{aligned}\underline{U}_\mathrm{x} &= \underline{Z}_\mathrm{x}\cdot\underline{I}_\mathrm{x}\\ &= -\frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{x}}+\frac{1}{\underline{Z}_3}}\,\underline{I}_1 + \frac{\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_3}\,\underline{U}_1 + \frac{\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_\mathrm{x}\|\underline{Z}_2}\,\underline{U}_2\\ &\overset{\underline{Z}_\mathrm{x}\rightarrow\infty}{=} -\frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3}}\,\underline{I}_1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}\,\underline{U}_1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_2}\,\underline{U}_2\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (13 Punkte): Komplexe Rechnung, Ortskurve

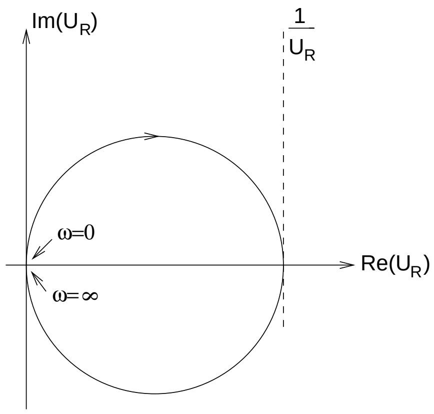
1. a)

$$U_C = U_1 \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{U_1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

$$max|U_C| = U_1|_{\omega=0}$$

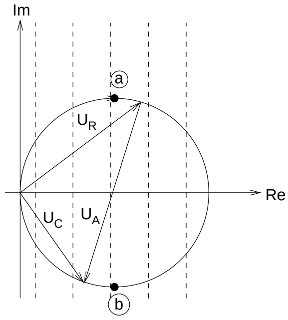


$$\begin{aligned} U_R &= U_2 \cdot \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \\ &= U_2 \cdot \frac{R_2}{R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{j\omega C_2}\right)} \\ &= U_2 \cdot \frac{1}{1 + j\left(\omega \frac{L_2}{R_2} - \frac{1}{\omega R_2 C_2}\right)} \\ max|U_R| &= U_2 \text{ für } \omega \frac{L_2}{R_2} = \frac{1}{\omega R_2 C_2} \end{aligned}$$



b) $\max|U_C| = 2 \cdot \max|U_R| \Rightarrow U_1 = 2 \cdot U_2$

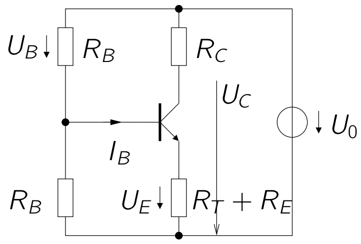
2. $U_1 = U_2$: Ortskurve für U_C und unterer Halbkreis der Ortskurve für U_R haben identischen Verlauf (aber nicht identische Frequenzskalierung)



$U_x = U_C - U_R$
Forderung: $\Re\{U_x(\omega_x)\} = 0 \Leftrightarrow U_x$ muss senkrecht stehen
$\Rightarrow$ Schnittpunkte jeder senkrechten Linie (gestrichelt) mit den Ortskurven U_R, U_C markieren Vektoren die die Forderung erfüllen.
Maximale Distanz zwischen den Schnittpunkten bei Kreisdurchmesser, d.h. U_R liegt im Punkt a, U_C im Punkt b.
Hierbei gilt:
a: $\Re(U_R) = \Im(U_R) > 0 \Rightarrow \omega_x \frac{L_2}{R} - \frac{1}{\omega_x RC} = 1$
b: $\omega_x = \frac{1}{RC}$
$\Rightarrow$ Dimensionierungsvorschrift: $\frac{L_2}{R^2C} - 1 = 1 \Rightarrow \frac{L_2}{R^2C} = 2$

Aufgabe 3 (13 Punkte): Schaltungsdimensionierung und -berechnung

1. Für Arbeitspunktbetrachtung:



$$I_B = 0 \Rightarrow U_B = \frac{U_0}{2}$$
$$\Rightarrow U_E = U_B - U_{BE,0}$$
$$\Rightarrow I_E = I_C = \frac{U_E}{R_T + R_E} = \frac{U_B - U_{BE0}}{R_T + R_E}$$
$$= \frac{U_0/2 - U_{BE0}}{R_T + R_E}$$

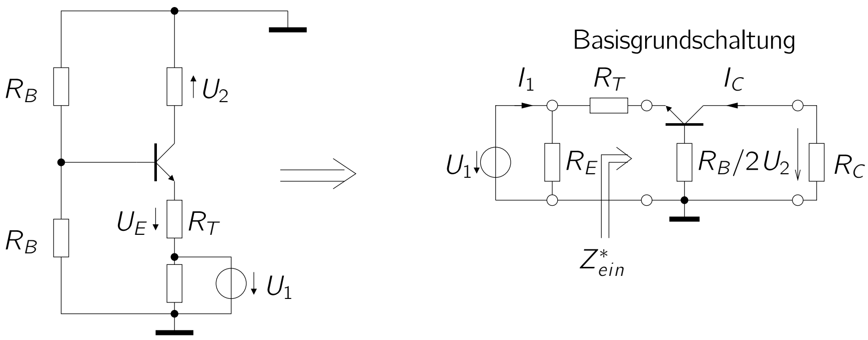
Steilheit des Transistors:

$$g_m = \frac{I_C}{U_T} = \frac{U_0 - 2U_{BE0}}{2U_T(R_T + R_E)}$$

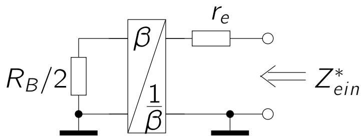
2. Bestimmung des normalaktiven Bereichs:

$$\max(U_C) = U_0 \quad \text{wenn } I_C = 0,$$
$$\min(U_C) = U_B = U_0/2 \quad \text{da an Grenze des normalaktiven Bereichs } U_{CB} = 0$$

3. Bestimmung der Grundschaltung



4. Bestimmung der Eingangsimpedanz



$$\begin{aligned}\frac{U_1}{I_1} &= R_E||(R_T + Z^*_{ein}) \\ &= R_E||(R_T + r_e + R_B/2\beta)\end{aligned}$$

5. Empfindlichkeit der Eingangsimpedanz

$$\begin{aligned}\text{Aus} \quad Z_{ein}|_{\beta\to\infty} &= R_E||(R_T + r_e) \\ \text{und} \quad Z_{ein}|_{\beta=1} &= R_E||(R_T + r_e + R_B/2) \\ \text{folgt} \quad 1.1 \cdot (R_E||R_T + r_e) &= R_E||(R_T + r_e + R_B/2)\end{aligned}$$

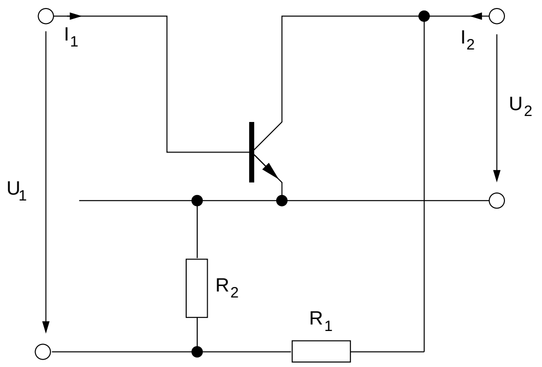
6. Wechselspannungsverstärkung
   Es gilt für $\beta \to \infty$

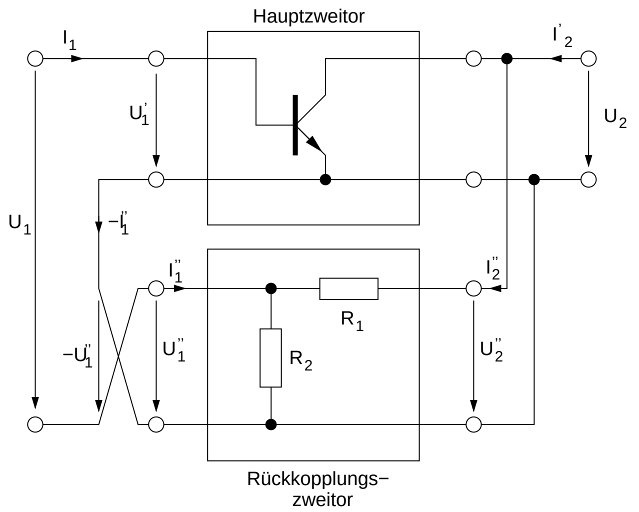
$$\begin{aligned} i_E = i_C &= \frac{u_1}{R_T + r_e}, \\ \text{und} \quad u_2 &= -\,i_c \cdot R_C, \\ \text{womit} \quad v_u &= \frac{u_2}{u_1} = \frac{-R_C}{R_T + r_e}.\end{aligned}$$

Die Verstärkung wird maximal wenn $r_e \downarrow$, also wenn $I_C|_{AP} \uparrow$.

Aufgabe 4 (15 Punkte): Rückkopplung, Zweitor

1. Aufstellen der Zweitore:





2. SPK: $U_1 = U_1' + (-U_1''), I_2 = I_2' + I_2''$
   Ges. Schaltung:

$$U_1 = H_{11} I_1 + H_{12} U_2$$
$$I_2 = H_{21} I_1 + H_{22} U_2$$

3. Matrix HZT und RZT:

$$\text{HZT: } H_{11}^{'} = \frac{1}{g_{be}}; \qquad H_{12}^{'} = 0; \qquad H_{21}^{'} = \beta; \qquad H_{22}^{'} = 0$$

$$\text{RZT: } H_{11}^{''} = R_1 \| R_2; \quad H_{12}^{''} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad H_{21}^{''} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad H_{22}^{''} = \frac{1}{R_1 + R_2}$$

Gesamtschaltung:

$$[H] = [H^{'}] + [H^{''}]^{*}; [H^{''}]^{*} = \begin{bmatrix} H_{11}^{''} & -H_{12}^{''} \\ -H_{21}^{''} & H_{22}^{''} \end{bmatrix}$$

4. Optimale Wirkung (hier): Rückgekoppelte Größe ($I_2^{'}$) bewirkt über Rückkopplungs-zweitor eine Reduktion der Eingangsspannung des Hauptzweitors.
$\Rightarrow$ Lastwiderstand an Tor 2 $\rightarrow \infty$ (damit der Strom in RK-Zweitor fließt, d.h. rückgekoppelt werden kann)
$\Rightarrow$ Ansteuerung durch Spannungsquelle am Tor 1 und $g_{be} \rightarrow 0$, damit Ausgangs-spannung des RK-Zweitors in vollem Umfang von der Eingangsgröße (Spannung der Eingangsspannungsquelle) subtrahiert wird.

5. Eingangsimpedanz:

$$I_2 = 0 \Rightarrow U_2 = -I_1 \cdot \frac{H_{21}}{H_{22}} \Rightarrow U_1 = H_{11} I_2 + H_{12} U_2 = H_{11} I_1 - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{22}} I_1$$

$$\begin{aligned} Z_{ein} &= \frac{U_1}{I_1} \\ &= H_{11} - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{22}} \\ &= \frac{1}{g_{be}} + R_1 \| R_2 - \left(\frac{-R_2}{R_1 + R_2} \beta \frac{-R_2}{R_1 + R_2} \right) R_1 + R_2 \\ &= \frac{1}{g_{be}} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_2 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \beta \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für Rückkopplung ($R_2 \neq 0$) wird Z_{ein} größer.

Aufgabe 5 (11 Punkte): Stabilität, Netzwerk

1. Eingangsimpedanz der Nachbildung

$$\begin{aligned} Z_{ein} &= \frac{U}{I} = \frac{U \cdot j\omega C}{g_{m1} g_{m2} U} \\ &= j\omega \frac{C}{g_{m1} g_{m2}} = j\omega L \\ \text{mit} \quad L &= \frac{C}{g_{m1} g_{m2}}. \end{aligned}$$

2. Stabilität der Gesamtschaltung
   Betrachte beliebige Wirkungsfunktion des Netzwerks

$$\begin{aligned} I &= \frac{U_0}{R + Z_{ein}} \\ \text{mit} \quad Z_{ein} &= \frac{j\omega C \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)}{g_{m01} g_{m02}}, \\ \text{wodurch} \quad I &= \frac{U_0 g_{m01} g_{m02}}{R g_{m01} g_{m02} + j\omega C \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)}. \end{aligned}$$

   Zur Bestimmung der Nullstellen des Nenners betrachte $j\omega \to s$ und kürze ab $\gamma = R g_{m01} g_{m02}$:

$$\begin{aligned} \gamma + sC \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right) &= \gamma + sC + \frac{s^2 C}{\omega_2} = 0 \\ s_{1,2} &= -\frac{\omega_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_2}{2}\right)^2 - \frac{\omega_2 \gamma}{C}}. \end{aligned}$$

   Damit Wirkungsfunktion instabil ist, muss gelten

$$\Re e \left\{ -\frac{\omega_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_2}{2}\right)^2 - \frac{\omega_2 \gamma}{C}} \right\} \geq 0,$$

   wodurch die Realteilbildung wegfällt. Es folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\omega_2}{2}\right)^2 - \frac{\omega_2 \gamma}{C}} &\geq -\frac{\omega_2}{2} \\ \frac{\omega_2 \gamma}{C} &\leq 0 \end{aligned}$$

   Da $\omega_2 > 0$ und $C > 0$ ist Schaltung instabil wenn $\gamma < 0$, also wenn $g_{m01} g_{m02} < 0$.

3. Bestimmung der Übertragungsfunktion im Zeitbereich
   Mit $U_0(s) = \mathcal{L}\{u_0(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ und dem Heavisid'schem Entwicklungssatz:

$$
\begin{aligned}
i(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{g_{m01}g_{m02}U_0(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\frac{C}{\omega_2}}\right\} \\
&= \frac{g_{m01}g_{m02}\omega_2}{C}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\right\} \\
&= \frac{g_{m01}g_{m02}\omega_2}{C}\left(\frac{1}{s_1-s_2}e^{s_1 t} + \frac{1}{s_2-s_1}e^{s_2 t}\right).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 (16 Punkte): Gleichtakt- Gegentaktzerlegung

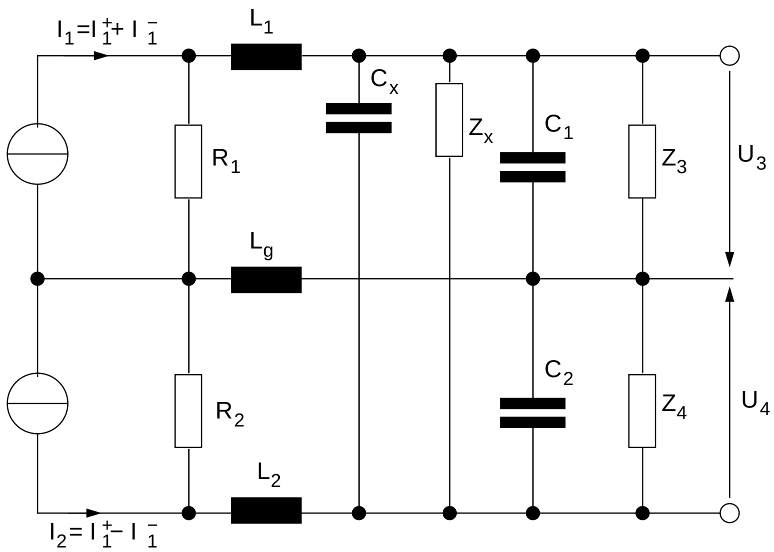
1. Symmetrie: gleiche Impedanzverhältnisse an allen korrespondierenden Knoten der beiden Symmetriehälften

$$\rightarrow R_1 = R_2;\ L_1 = L_2;\ \frac{1}{j\omega C_1} \| Z_3 = \frac{1}{j\omega C_2} \| Z_4$$

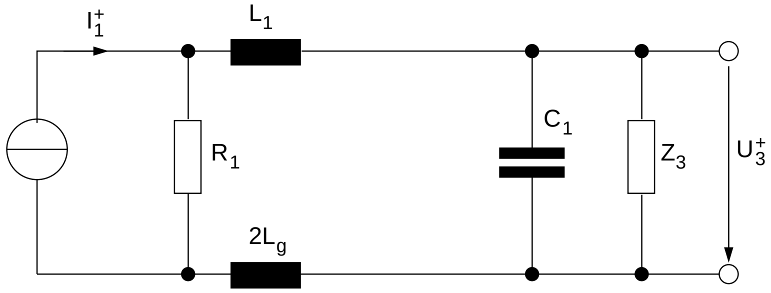
2.

$$I^+ = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) = \frac{I_1}{2}(1 - (1 - \alpha)) = \frac{\alpha}{2} I_1$$
$$I^- = \frac{1}{2}(I_1 - I_2) = \frac{I_1}{2}(1 + (1 - \alpha)) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) I_1$$

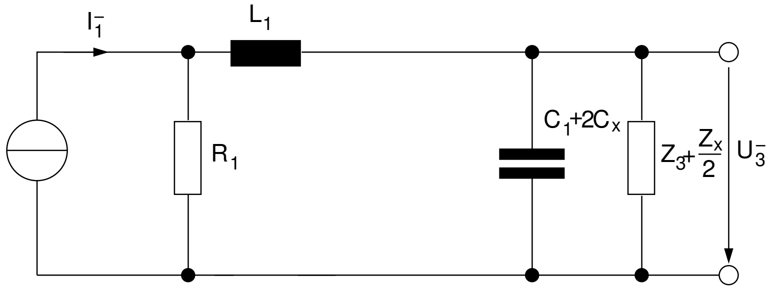
3.



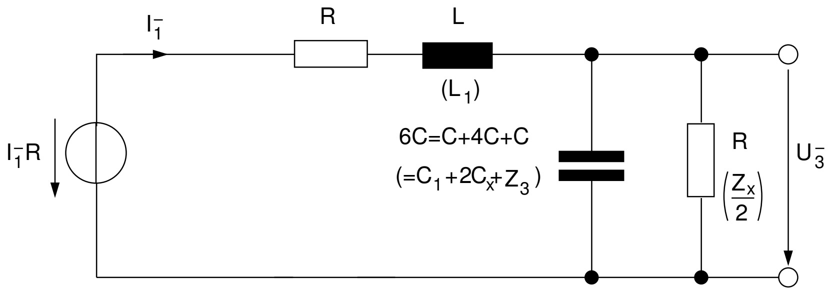
4.



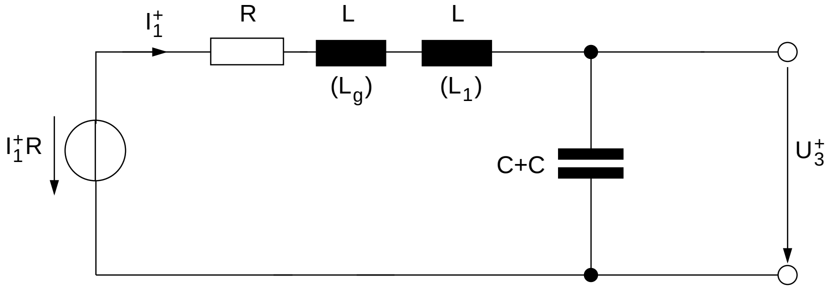
I_1^+
L_1
R_1
C_1
Z_3
U_3^+
$2L_g$



I_1^-
L_1
R_1
C_1+2C_x
$Z_3+\frac{Z_x}{2}$
U_3^-



I_1^-
R
L
(L_1)
I_1^-R
6C=C+4C+C
$(=C_1+2C_x+Z_3)$
R
$\left(\frac{Z_x}{2}\right)$
U_3^-



I_1^+
R
L
L
(L_g)
(L_1)
I_1^+R
C+C
U_3^+

$$
\begin{aligned}
U_3 &= U_3^+ + U_3^- \\
U_3^+ &= \underbrace{\frac{\frac{1}{j\omega 2C}}{\frac{1}{j\omega 2C} + R + j\omega 2L}}_{F^+} I_1^+ R \\
U_3^- &= \underbrace{\frac{\frac{R}{1+j\omega RC}}{\frac{R}{1+j\omega RC} + R + j\omega L}}_{F^-} I_1^- R
\end{aligned}
$$

$$U_3 = U_3^+ + U_3^- = F^+ I_1^+ R + F^- I_1^- R = I_1 R \left(F^+ \frac{\alpha}{2} + F^- \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

analog U_4:

$$U_4 = U_4^+ + U_4^- = F^+ I_1^+ R - F^- I_1^- R = I_1 R \left(F^+ \frac{\alpha}{2} - F^- \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

5.

$$U_x = U_3 - U_4 = I_1 R F^- (2 - \alpha)$$

da F^- kein L_g beinhaltet ist U_x unabhängig von L_g

Aufgabe 7 (15 Punkte): Operationsverstärker, Bode-Diagramm

1. a)

$$\frac{U_1+U_d}{R_1}=I_1;\ \frac{U_2+U_d}{R_2}=I_2;\ \frac{I_1+I_2}{j\omega C}=-U_d$$
$$\frac{U_1+U_d}{R_1}+\frac{U_2+U_d}{R_2}=-j\omega C U_d$$
$$U_d\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+j\omega C\right)+\frac{U_1}{R_1}+\frac{U_2}{R_2}=0$$
$$\text{mit: } U_d=\frac{U_2}{v_u}\text{folgt:}$$
$$U_2\left(\frac{1}{v_u}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+j\omega C\right)+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{-U_1}{R_1}$$
$$\Rightarrow \frac{U_2}{U_1}=\frac{-1}{\frac{R_1}{R_2}+\frac{1}{v_u}\left(1+\frac{R_1}{r_2}+j\omega R_1 C\right)}$$

b) $|v_u|\to\infty\ \Rightarrow\ F\to\frac{-R_2}{R_1}\left(=\frac{1}{F_2}\right)$

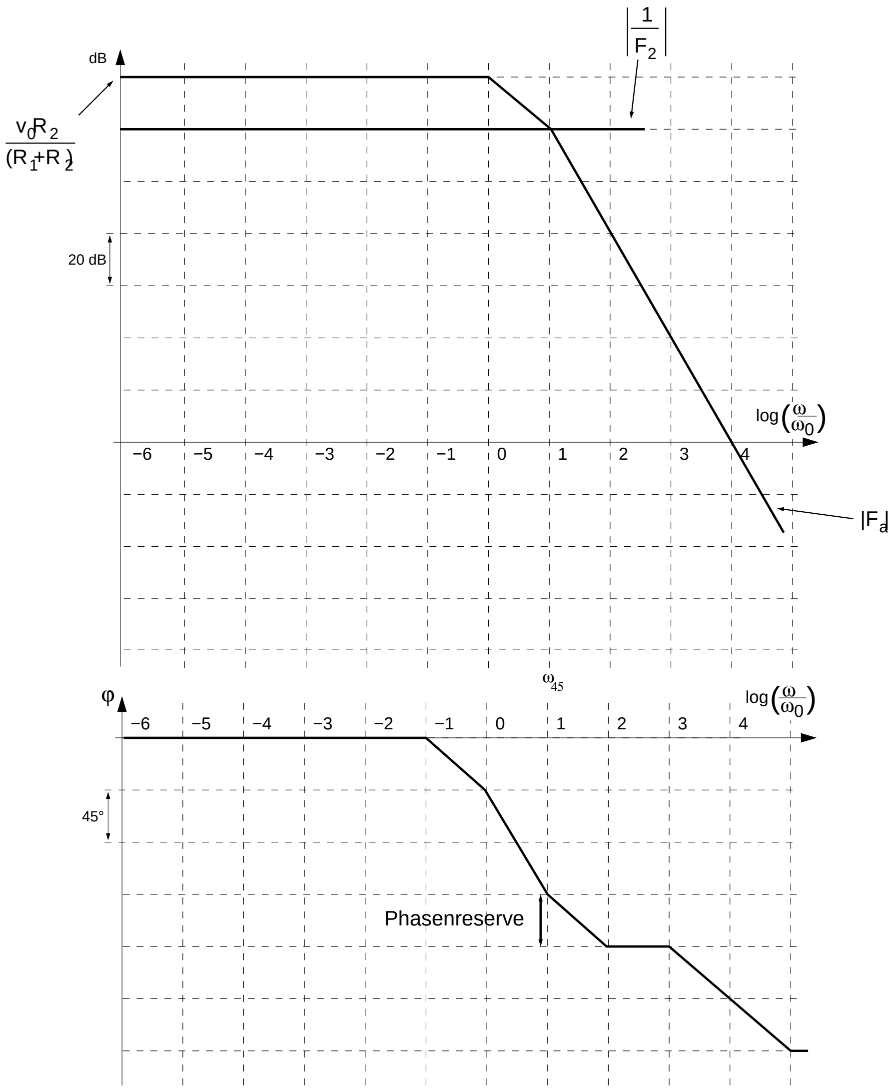
c) Aus b) ist $F_2=\frac{-R_1}{R_2}$ bekannt. Forme F entsprechend um:

$$F=\frac{\frac{-v_u}{1+\frac{R_1}{R_2}+j\omega R_1 C}}{1+\underbrace{\underbrace{\frac{-R_1}{R_2}}_{F_2}\underbrace{\frac{-v_u}{1+\frac{R_1}{R_2}+j\omega R_1 C}}_{F_a}}_{F_o \text{ Schleifenverst.}}}$$

$$F_2=\frac{-R_1}{R_2}$$

$$F_a=\frac{-v_u}{1+\frac{R_1}{R_2}+j\omega R_1 C}$$

$$F_a=\frac{-v_u}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\left(1+j\omega\underbrace{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C}_{\frac{1}{\omega x}}\right)}$$



a)

b) Bei $\phi(\omega_{45})$ =45° ist $F_0(\omega_{45}) = 0\text{dB}$ und es gilt $|F_a(\omega_{45})| = \left|\frac{1}{F_2}\right|$.
Da $|F_a(\omega_{45})| = \frac{F_a(\omega \to 0)}{10} \Rightarrow \left|\frac{1}{F_2}\right| \geq \frac{v_0 R_2}{10(R_1+R_2)}$

2. Wird die Kompensationsfrequenz ω_x so festgelegt, dass daraus 90°Phasendrehung resultieren, dann können noch weitere 45°durch den ω_0-Term in v_u toleriert werden. D.h. $|F_0|_{dB} = 0$ muss bei $\omega_x = \omega_0$ erfüllt sein. Da bei ω_0 noch kein Amplitudenabfall durch $v_U(\omega)$ erfolgt (Bode-Näherung), wird der gesamte Abfall von F_0 durch den ω_x erfolgen:

$$|F_0(\omega_{45})| = 1 = |\underbrace{F_2}_{=-1} \cdot F_2| = \left| \frac{\frac{v_{u0}}{2}}{\left(1 + \frac{j\omega_{45}}{\omega_x}\right) \underbrace{(1 + ..)(1 + ..)}_{=1}} \right| \approx \frac{v_{u0}\omega_x}{2\omega_{45}} = \frac{v_{u0}\omega_x}{2\omega_0}$$

$$\Rightarrow \omega_x = \frac{2\omega_0}{v_{u0}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$$

$$\Rightarrow C = \frac{(R_1 + R_2)v_0}{2R_1 R_2 \omega_0} \overset{R_1 = R_2}{=} \frac{v_0}{R_1 \omega_0}$$