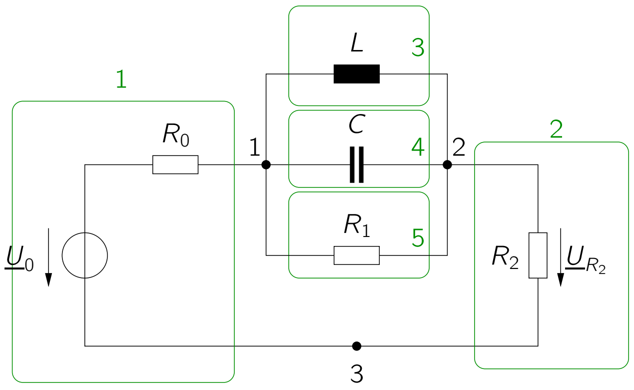
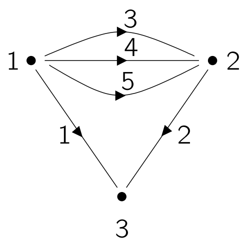
Aufgabe 1

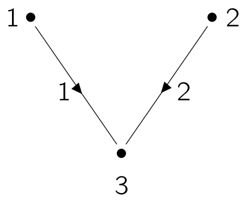
a) Graph, Baum und Co-Baum.



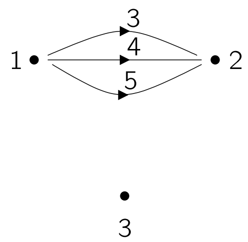
Netzwerk mit nummerierten Knoten und Zweigen.



Graph.



Baum.



Co-Baum.

Hinweis: Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten dieser Aufgabe.

b) Allgemeine Knoteninzidenzmatrix.

$$\mathbf{A_a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Wähle Knoten 3 als Bezugsknoten.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Zweigadmittanzen $\mathbf{Y}$, Stromquellen $\mathbf{I}_\mathrm{g}$, Spannungsquellen $\mathbf{U}_\mathrm{g}$.

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{j}\,\omega C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_\mathrm{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{U}}_\mathrm{g} = \begin{pmatrix} -\underline{U}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Berechnung von $\underline{\mathbf{Y}}_\mathrm{n}$ und $\underline{\mathbf{I}}_\mathrm{qn}$.

$$\underline{\mathbf{Y}}_\mathrm{n} = \mathbf{A}\,\underline{\mathbf{Y}}\,\mathbf{A}^\mathrm{T} = \ldots = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} - \mathrm{j}\,\omega C - \frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} - \mathrm{j}\,\omega C - \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C + \frac{1}{R_1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_\mathrm{qn} = \mathbf{A}(\underline{\mathbf{I}}_\mathrm{g} - \underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{U}}_\mathrm{g}) = \ldots = \begin{pmatrix} \frac{\underline{U}_0}{R_0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{U}}_\mathrm{n} = \begin{pmatrix} \underline{U}_\mathrm{n1} \\ \underline{U}_\mathrm{n2} \end{pmatrix}$$

f) Cramersche Regel

$$\underline{U}_{R_2} = \underline{U}_\mathrm{n2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C + \frac{1}{R_1} & \frac{\underline{U}_0}{R_0} \\ -\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} - \mathrm{j}\,\omega C - \frac{1}{R_1} & 0 \end{vmatrix}}{\det \underline{\mathbf{Y}}_\mathrm{n}}$$

$$= \frac{\frac{\underline{U}_0}{R_0}\left(\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C + \frac{1}{R_1}\right)}{\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C + \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C + \frac{1}{R_1}\right) - \left(\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C + \frac{1}{R_1}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{\underline{U}_0}{R_0}\left(\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C + \frac{1}{R_1}\right)}{\frac{1}{R_0}\,\frac{1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C + \frac{1}{R_1}\right)}$$

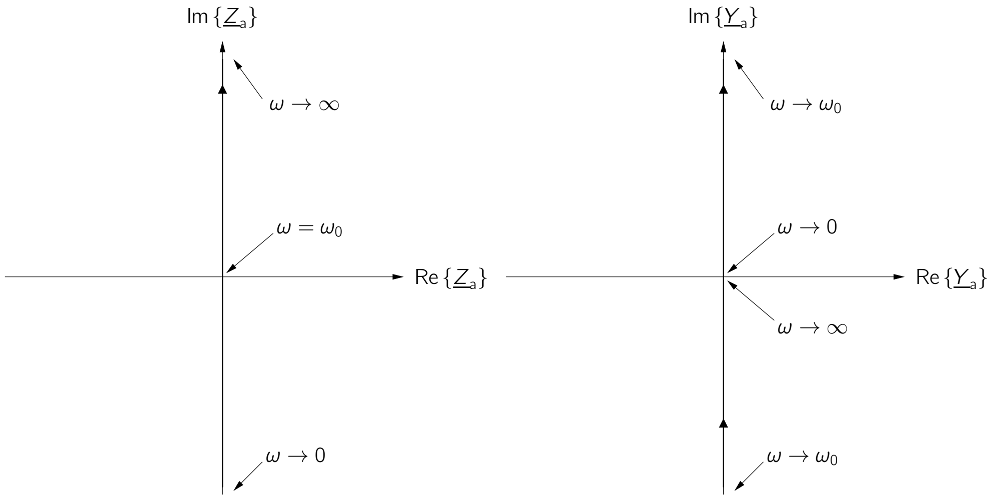
Aufgabe 2

a) Impedanz

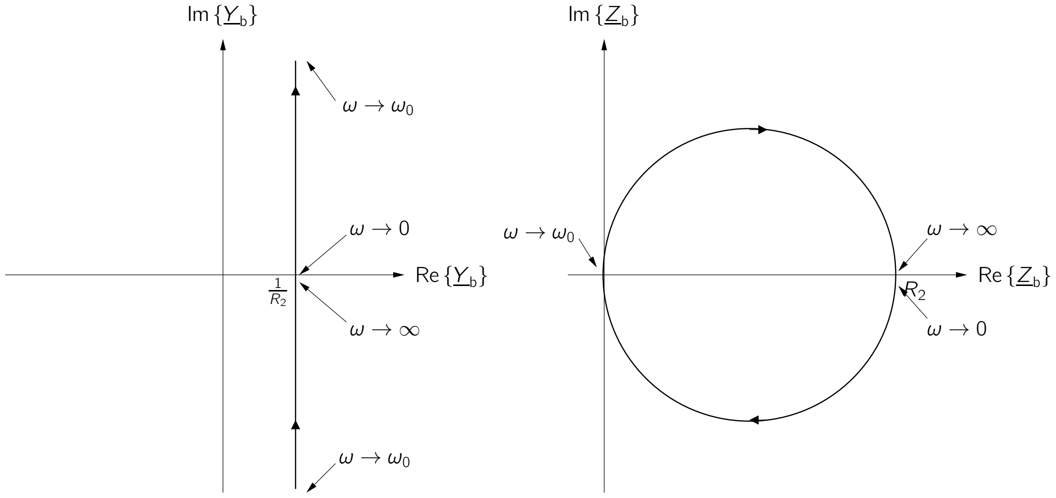
$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}}}$$

b) Konstruktion der Ortskurve

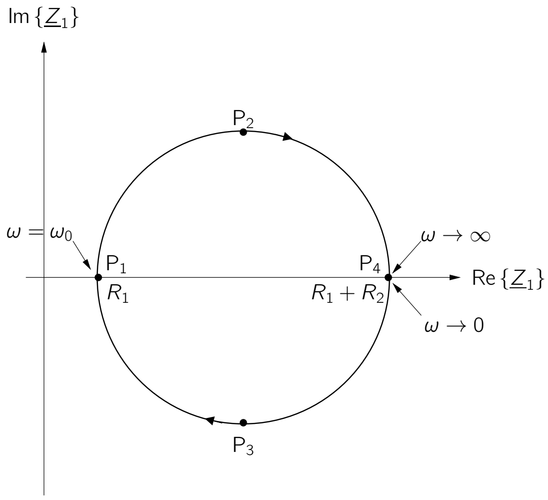
$$\begin{aligned}
\underline{Z}_\mathrm{a} &= \mathrm{j}\,\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C} = \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\\
\underline{Y}_\mathrm{a} &= \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{a}}\\
\underline{Y}_\mathrm{b} &= \frac{1}{R_2} + \underline{Y}_\mathrm{a}\\
\underline{Z}_\mathrm{b} &= \frac{1}{\underline{Y}_\mathrm{b}}\\
\underline{Z}_1 &= R_1 + \underline{Z}_\mathrm{b}
\end{aligned}$$



Ortskurven für $\underline{Z}_\mathrm{a}$ und $\underline{Y}_\mathrm{a}$.



Ortskurven für $\underline{Y}_\mathrm{b}$ und $\underline{Z}_\mathrm{b}$.



Ortskurve für $\underline{Z}_1$.

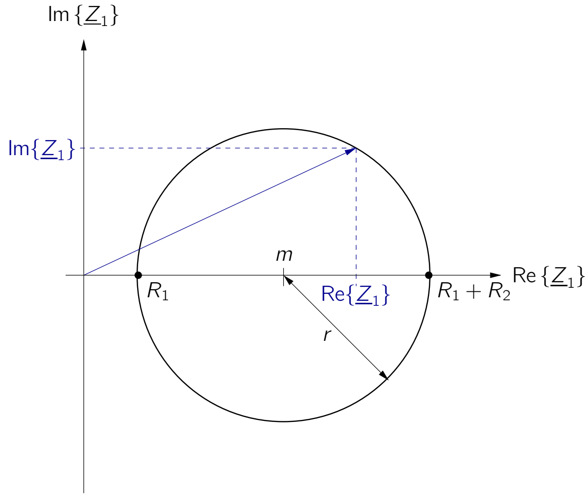
c) Charakteristische Punkte:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_1\text{: Minimum Realteil} && \Rightarrow \quad \underline{Z}_1 = R_1, \\
&\mathrm{P}_2\text{: Maximum Imaginärteil} && \Rightarrow \quad \underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{2}R_2 + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}R_2, \\
&\mathrm{P}_3\text{: Minimum Imaginärteil} && \Rightarrow \quad \underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{2}R_2 - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}R_2, \\
&\mathrm{P}_4\text{: Maximum Realteil} && \Rightarrow \quad \underline{Z}_1 = R_1 + R_2
\end{aligned}
$$

mit Minimum des Realteils (P_1) bei

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

d) Funktion aufstellen



Eine Admittanz $\underline{Z}_1$, welche auf der Ortskurve liegt, erfüllt die Kreisgleichung

$$(\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\} - m)^2 + (\mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\})^2 = r^2$$

$$\left(\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\} - \left(R_1 + \frac{R_2}{2}\right)\right)^2 + (\mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\})^2 = \left(\frac{R_2}{2}\right)^2$$

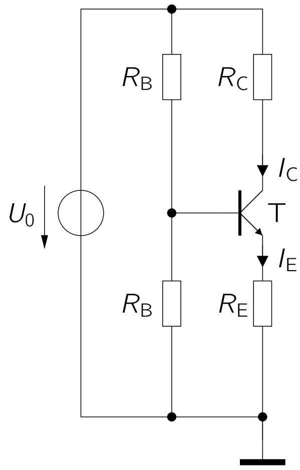
$$\underbrace{(\mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\})^2 + (\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\})^2}_{|\underline{Z}_1|^2} - 2\left(R_1 + \frac{R_2}{2}\right)\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\} + \left(R_1 + \frac{R_2}{2}\right)^2 = \frac{R_2^2}{4}$$

$$\Rightarrow |\underline{Z}_1| = \sqrt{2\left(R_1 + \frac{R_2}{2}\right)\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\} + \frac{R_2^2}{4} - \left(R_1 + \frac{R_2}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(2R_1 + R_2)\,\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\} - R_1^2 - R_1\,R_2}$$

Aufgabe 3

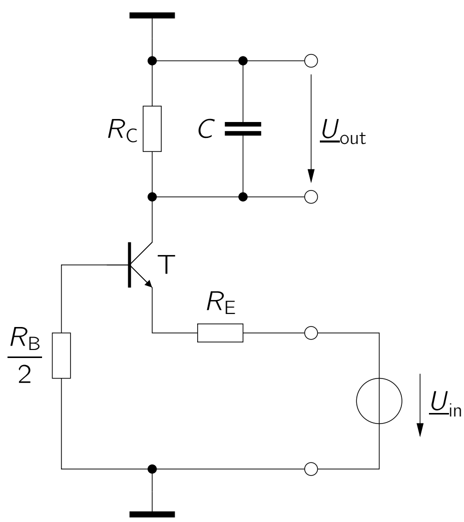
a) Gleichstrom-Ersatzschaltbild.



b) Auslegung von R_B:

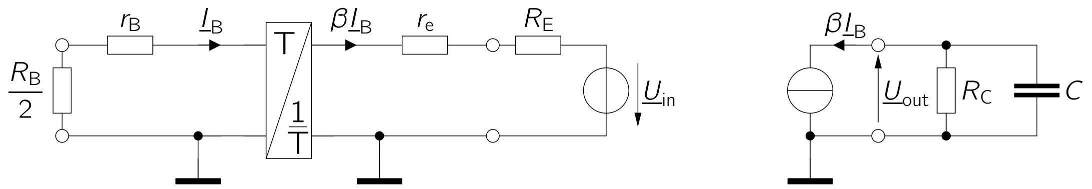
$$
\begin{aligned}
I_C &= \frac{U_0}{4\,R_C} \\
I_E &\approx I_C,\ \text{da } I_B \ll I_C \\
U_{R_E} &= R_E\,I_E \approx \frac{U_0}{4}\,\frac{R_E}{R_C} \\
U_0 &\approx \frac{1}{2}U_0 + U_{BE,0} + \frac{U_0}{4}\,\frac{R_E}{R_C} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{R_E}{R_C} &= 2 - 4\frac{U_{BE,0}}{U_0}
\end{aligned}
$$

c) Wechselstrom-Ersatzschaltbild.

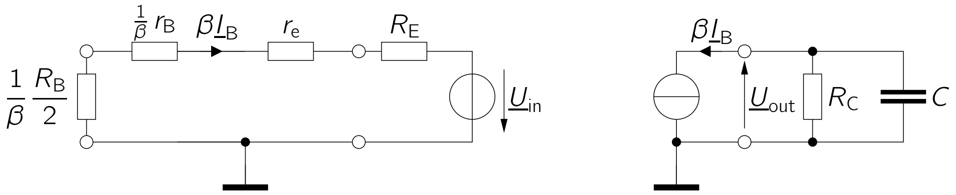


d) Berechnung der Spannungsübertragungsfunktion $\underline{V}_\mathrm{u}$.

Durch Verwendung des T-Operator-Ersatzschaltbildes lässt sich das Wechselstrom-Ersatzschaltbild wie folgt darstellen.



Nach der Transformation mithilfe des T-Operators ergibt sich:



$$\beta \underline{I}_\mathrm{B} = -\frac{\underline{U}_\mathrm{in}}{\frac{1}{\beta}\,\left(r_\mathrm{B} + \frac{1}{2}R_\mathrm{B}\right) + r_\mathrm{e} + R_\mathrm{E}}$$

$$\underline{U}_2 = \left(R_\mathrm{C} \parallel \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}\right)\beta \underline{I}_\mathrm{B} = \frac{R_\mathrm{C}}{1 + \mathrm{j}\,\omega R_\mathrm{C}\,C}\,\beta \underline{I}_\mathrm{B}$$

$$\underline{V}_\mathrm{u} = \frac{\underline{U}_\mathrm{out}}{\underline{U}_\mathrm{in}} = -\frac{R_\mathrm{C}}{1 + \mathrm{j}\,\omega R_\mathrm{C}\,C}\,\frac{1}{\frac{1}{\beta}\,\left(r_\mathrm{B} + \frac{1}{2}R_\mathrm{B}\right) + r_\mathrm{e} + R_\mathrm{E}}$$

e) Grenzfrequenz $f_{3\,\mathrm{dB}}$

$$\underline{V}_\mathrm{u}(f_{3\,\mathrm{dB}}) = -\frac{R_\mathrm{C}}{(1 + \mathrm{j}\;2\pi\,f_{3\,\mathrm{dB}}\,R_\mathrm{C}\,C)\left(\frac{1}{\beta}\,\left(r_\mathrm{B} + \frac{1}{2}R_\mathrm{B}\right) + r_\mathrm{e} + R_\mathrm{E}\right)}$$

$$\underline{V}_\mathrm{u}(f = 0) = -\frac{R_\mathrm{C}}{\frac{1}{\beta}\,\left(r_\mathrm{B} + \frac{1}{2}R_\mathrm{B}\right) + r_\mathrm{e} + R_\mathrm{E}}$$

Bei der Grenzfrequenz gilt

$$\left|\frac{\underline{V}_\mathrm{u}(f_{3\,\mathrm{dB}})}{\underline{V}_\mathrm{u}(f = 0)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\frac{1}{1 + \mathrm{j}\;2\pi\,f_{3\,\mathrm{dB}}\,R_\mathrm{C}\,C}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + (2\pi\,f_{3\,\mathrm{dB}}\,R_\mathrm{C}\,C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2\pi\,f_{3\,\mathrm{dB}}\,R_\mathrm{C}\,C = 1$$

$$f_{3\,\mathrm{dB}} = \frac{1}{2\pi\,R_\mathrm{C}\,C}$$

f) normal-aktiv

Zu jedem Zeitpunkt t muss gelten:

$$\begin{aligned} & u_{\mathrm{bc}}(t) = u_{\mathrm{b}}(t) - u_{\mathrm{c}}(t) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & u_{\mathrm{b}}(t) \leq u_{\mathrm{c}}(t) \end{aligned}$$

Es gilt (Spannungsteiler):

$$u_{\mathrm{b}}(t) = \frac{1}{2} U_0$$

Sowie (Phasorrechnung):

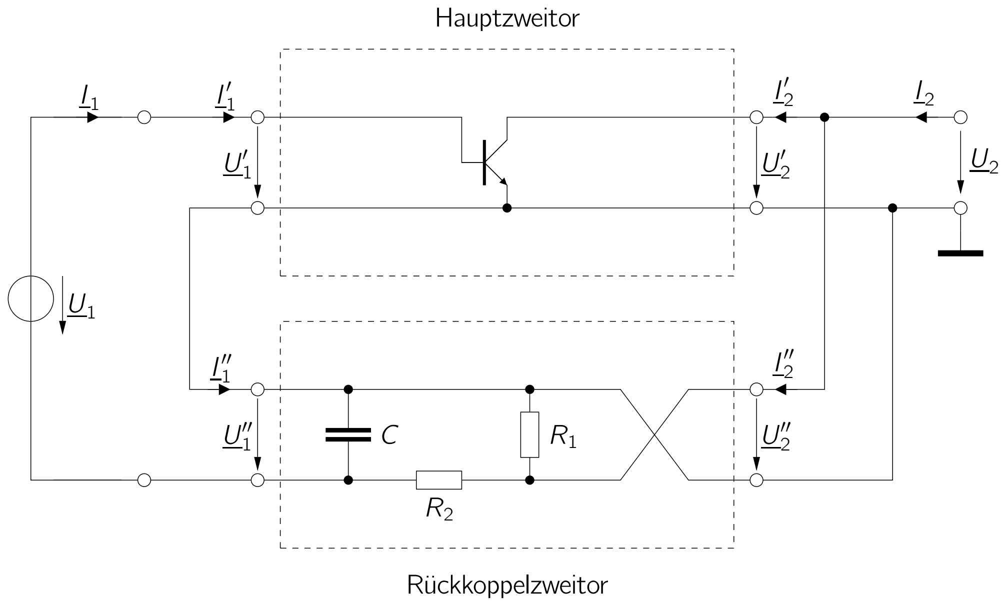
$$\begin{aligned} u_{\mathrm{c}}(t) = U_0 - u_{\mathrm{R}_C}(t) &= U_0 - \left(U_{\mathrm{R}_C} + \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{R}_C}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\}\right) \\ &= U_0 - \left(\frac{1}{4} U_0 + \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{out}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\}\right) \\ &= \frac{3}{4} U_0 - \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{out}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} \end{aligned}$$

Mit $u_{\mathrm{b}}(t) \leq u_{\mathrm{c}}(t)$ folgt:

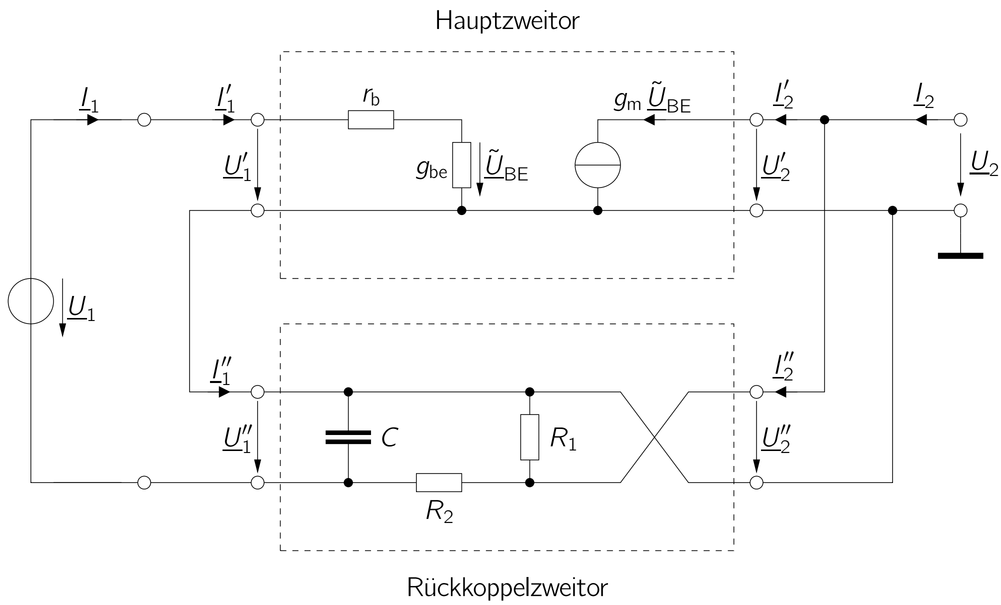
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} U_0 \leq \frac{3}{4} U_0 - \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{out}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{out}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} \leq \frac{1}{4} U_0 \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{Re}\left\{|\underline{U}_{\mathrm{out}}|\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi_{\mathrm{out}}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} \leq \frac{1}{4} U_0 \\ \Leftrightarrow \quad & |\underline{U}_{\mathrm{out}}| \leq \frac{1}{4} U_0 \\ \Leftrightarrow \quad & |\underline{U}_{\mathrm{in}}| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{|\underline{V}_{\mathrm{u}}|} U_0 = \frac{\frac{1}{\beta}\left(r_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2} R_{\mathrm{B}}\right) + r_{\mathrm{e}} + R_{\mathrm{E}}}{4\, R_{\mathrm{C}}} U_0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Darstellung als Haupt- und Rückkoppelzweitor.



b) Kleinsignalersatzschaltbild.



c) i) Serien-Parallel-Kopplung.

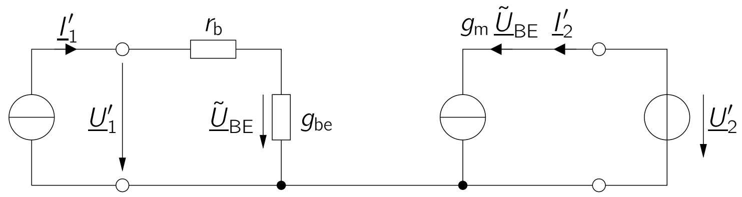
ii) Verwende $\underline{\mathbf{H}}$-Matrizen, da

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_2'' \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{H}}' \begin{pmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{U}_2' \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{H}}'' \begin{pmatrix} \underline{I}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{pmatrix} = (\underline{\mathbf{H}}' + \underline{\mathbf{H}}'') \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{H}} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ $\underline{\mathbf{H}}$-Matrizen von Haupt- und Rückkoppelzweitor können addiert werden.

d) Zweitorparameter.

Für Hauptzweitor:



$$\underline{H}'_{11} = \left.\frac{\underline{U}'_1}{\underline{I}'_1}\right|_{\underline{U}'_2=0} = r_\mathrm{b} + \frac{1}{g_\mathrm{be}}$$

$$\underline{H}'_{12} = \left.\frac{\underline{U}'_1}{\underline{U}'_2}\right|_{\underline{I}'_1=0} = 0$$

$$\underline{H}'_{21} = \left.\frac{\underline{I}'_2}{\underline{I}'_1}\right|_{\underline{U}'_2=0} = \frac{g_\mathrm{m}}{g_\mathrm{be}}$$

$$\underline{H}'_{22} = \left.\frac{\underline{I}'_2}{\underline{U}'_2}\right|_{\underline{I}'_1=0} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{H}}' = \begin{pmatrix} r_\mathrm{b} + \frac{1}{g_\mathrm{be}} & 0 \\ \frac{g_\mathrm{m}}{g_\mathrm{be}} & 0 \end{pmatrix}$$

Für Rückkoppelzweitor:

$$\underline{H}''_{11} = \left.\frac{\underline{U}''_1}{\underline{I}''_1}\right|_{\underline{U}''_2=0} = \frac{R_2}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C}$$

$$\underline{H}''_{12} = \left.\frac{\underline{U}''_1}{\underline{U}''_2}\right|_{\underline{I}''_1=0} = -\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C}$$

$$\underline{H}''_{21} = \left.\frac{\underline{I}''_2}{\underline{I}''_1}\right|_{\underline{U}''_2=0} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C}$$

$$\underline{H}''_{22} = \left.\frac{\underline{I}''_2}{\underline{U}''_2}\right|_{\underline{I}''_1=0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{H}}'' = \begin{pmatrix} \frac{R_2}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C} & -\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C} \\ \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}} \end{pmatrix}$$

Gesamtmatrix:

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} r_\mathrm{b} + \frac{1}{g_\mathrm{be}} + \frac{R_2}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C} & -\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C} \\ \frac{g_\mathrm{m}}{g_\mathrm{be}} + \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}} \end{pmatrix}$$

e) Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}. \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} &= \underline{\mathbf{H}}^{\mathbf{-1}} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Spannungsverstärkung

$$\begin{aligned} \underline{V}_{\mathrm{u}} &= \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \underline{H}_{21}^{-1} = \frac{-\underline{H}_{21}}{\det(\underline{\mathbf{H}})} \\ &= -\frac{\frac{g_{\mathrm{m}}}{g_{\mathrm{be}}} + \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C}}{\left(r_{\mathrm{b}} + \frac{1}{g_{\mathrm{be}}} + \frac{R_2}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}}\right) + \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C}\left(\frac{g_{\mathrm{m}}}{g_{\mathrm{be}}} + \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega R_2 C}\right)} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Berechnung der Wirkungsfunktion.

$$
\begin{aligned}
&\underline{U}_1 = (\underline{I}_1 + g_\mathrm{m}\,\underline{U}_2)\,\frac{1}{\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{s(L_1+L_2)}}\\
&\underline{U}_2 = \frac{sL_2}{s(L_1+L_2)}\underline{U}_1 = \frac{L_2}{L_1+L_2}\underline{U}_1\\
\Rightarrow\quad &\underline{U}_1\left(\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{s(L_1+L_2)}\right) = \underline{I}_1 + g_\mathrm{m}\frac{L_2}{L_1+L_2}\underline{U}_1\\
\Rightarrow\quad &\underline{Z}_1(s) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{s}{s^2C + s\left(\frac{1}{R} - g_\mathrm{m}\frac{L_2}{L_1+L_2}\right) + \frac{1}{L_1+L_2}}
\end{aligned}
$$

b) Die Funktion $\underline{Z}_2(s)$ würde sich ebenfalls zur Analyse der Stabilität der Gesamtschaltung eignen, da es sich um eine Wirkungsfunktion mit gleicher Ursache wie $\underline{Z}_1$ handelt und sie damit über dieselben Polstellen verfügt.

c) Polstellen

$$
\begin{aligned}
&0 = s^2C + s\left(\frac{1}{R} - g_\mathrm{m}\frac{L_2}{L_1+L_2}\right) + \frac{1}{L_1+L_2}\\
\Leftrightarrow\ &s_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{RC} - \frac{g_\mathrm{m}L_2}{C(L_1+L_2)}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{RC} - \frac{g_\mathrm{m}L_2}{C(L_1+L_2)}\right)^2 - \frac{1}{C(L_1+L_2)}}
\end{aligned}
$$

Bedingungen für harmonische Oszillation

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\{s_{1,2}\} > 0\\
\wedge\quad &\mathrm{Im}\{s_{1,2}\} \neq 0\\
\Leftrightarrow\quad &-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{RC} - \frac{g_\mathrm{m}L_2}{C(L_1+L_2)}\right) > 0\\
\wedge\quad &\frac{1}{4}\left(\frac{1}{RC} - \frac{g_\mathrm{m}L_2}{C(L_1+L_2)}\right)^2 - \frac{1}{C(L_1+L_2)} < 0\\
\Leftrightarrow\quad &R\,g_\mathrm{m} > 1 + \frac{L_1}{L_2}\\
\wedge\quad &\frac{1}{4}\left(\frac{1}{RC} - \frac{g_\mathrm{m}L_2}{C(L_1+L_2)}\right)^2 < \frac{1}{C(L_1+L_2)}
\end{aligned}
$$

d) Schwingfrequenz

$$
f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{C(L_1+L_2)} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{RC} - \frac{g_\mathrm{m}L_2}{C(L_1+L_2)}\right)^2}
$$

e) Heavisidescher Entwicklungssatz

$$
\begin{aligned}
u_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\underline{U}_1(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\underline{Z}_1(s)\,\underline{I}_1(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\underline{Z}_1(s)\,\mathcal{L}\left\{i_1(t)\right\}\right\} \overset{\mathcal{L}\{i_1(t)\}=1}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{\underline{F}(s)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{1} \frac{\underline{Z}_(s)}{\underline{N}'(s)}\, \mathrm{e}^{st}\bigg|_{s=s_i}
\end{aligned}
$$

mit

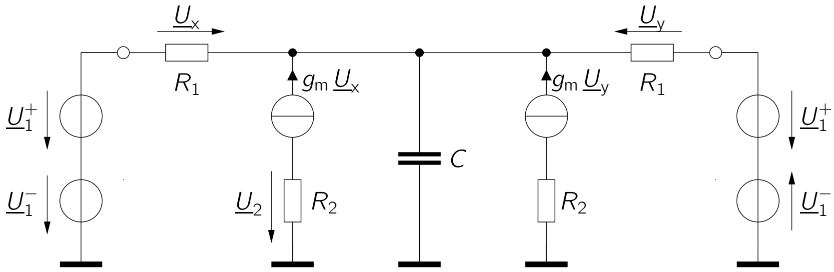
$$
\begin{aligned}
\underline{Z}(s) &= s \\
\underline{N}(s) &= s^2 C + s\left(\frac{1}{R} - g_\mathrm{m}\frac{L_2}{L_1+L_2}\right) + \frac{1}{L_1+L_2} \\
\Rightarrow \underline{N}'(s) &= s\,2C + \frac{1}{R} - g_\mathrm{m}\frac{L_2}{L_1+L_2}
\end{aligned}
$$

Also:

$$
u_1(t) = \frac{s_1}{s_1\,2C + \frac{1}{R} - g_\mathrm{m}\frac{L_2}{L_1+L_2}}\,\mathrm{e}^{s_1 t} + \frac{s_2}{s_2\,2C + \frac{1}{R} - g_\mathrm{m}\frac{L_2}{L_1+L_2}}\,\mathrm{e}^{s_2 t}
$$

Aufgabe 6

a) Ansteuerung als Überlagerung von Gleich- und Gegentaktquellen:

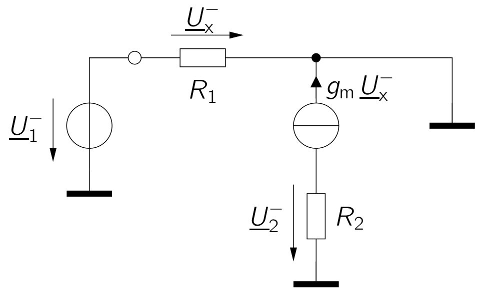


Es gilt

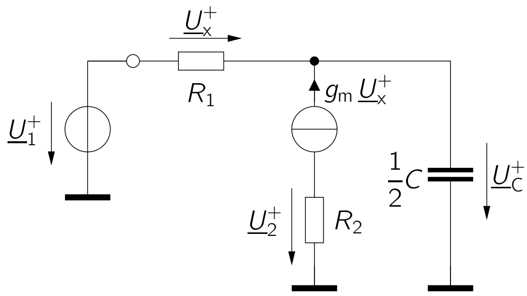
$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_1^+ + \underline{U}_1^- \\ \wedge \quad 0 &= \underline{U}_1^+ - \underline{U}_1^- \\ \Rightarrow \quad \underline{U}_1^+ = \underline{U}_1^- &= \frac{1}{2}\underline{U}_1 \end{aligned}$$

b) Einphasige Ersatzschaltbilder

Gegentakt:



Gleichtakt:



c) Berechnung von $\underline{U}_2$.

Gegentakt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_\mathrm{x}^- &= \underline{U}_1^- \\ \underline{U}_2^- &= -R_2\, g_\mathrm{m}\, \underline{U}_\mathrm{x}^- = -R_2\, g_\mathrm{m}\, \underline{U}_1^-\end{aligned}$$

Gleichtakt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_\mathrm{C}^+ &= \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega \frac{1}{2} C}\left(g_\mathrm{m}\, \underline{U}_\mathrm{x}^+ + \frac{\underline{U}_\mathrm{x}^+}{R_1}\right) = \frac{2}{\mathrm{j}\,\omega C}\left(g_\mathrm{m} + \frac{1}{R_1}\right)\underline{U}_\mathrm{x}^+ \\ \underline{U}_\mathrm{C}^+ &= \underline{U}_1^+ - \underline{U}_\mathrm{x}^+ \\ \Rightarrow \quad \frac{\underline{U}_1^+}{\underline{U}_\mathrm{x}^+} &= \frac{2}{\mathrm{j}\,\omega C}\left(g_\mathrm{m} + \frac{1}{R_1}\right) + 1 \\ \underline{U}_2^+ &= -R_2\, g_\mathrm{m}\, \underline{U}_\mathrm{x}^+ = -\frac{R_2\, g_\mathrm{m}}{\frac{2}{\mathrm{j}\,\omega C}\left(g_\mathrm{m} + \frac{1}{R_1}\right) + 1}\underline{U}_1^+\end{aligned}$$

Gesamtergebnis:

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 = \underline{U}_2^+ + \underline{U}_2^- &= -\frac{R_2\, g_\mathrm{m}}{\frac{2}{\mathrm{j}\,\omega C}\left(g_\mathrm{m} + \frac{1}{R_1}\right) + 1}\underline{U}_1^+ - R_2\, g_\mathrm{m}\, \underline{U}_1^- \\ &= -\frac{1}{2} R_2\, g_\mathrm{m}\, \underline{U}_1 \left(\frac{1}{\frac{2}{\mathrm{j}\,\omega C}\left(g_\mathrm{m} + \frac{1}{R_1}\right) + 1} + 1\right)\end{aligned}$$

d) Gleichtaktunterdrückung

Gegentaktübertragungsfunktion

$$\underline{V}_u^- = \frac{\underline{U}_2^-}{\underline{U}_1} = -\frac{1}{2} R_2\, g_\mathrm{m}$$

enthält R_2 und g_m als Bauteilparameter. → Bauteilparameter R_1 und C sind noch frei wählbar.

Gleichtaktübertragungsfunktion

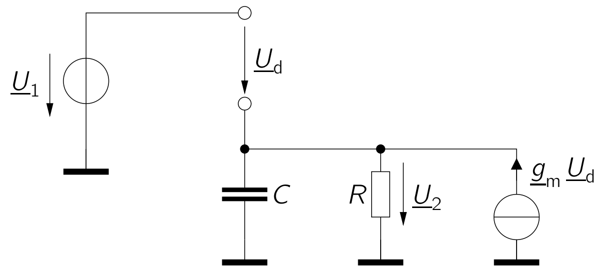
$$\underline{V}_u^+ = \frac{\underline{U}_2^+}{\underline{U}_1} = \frac{1}{2}\frac{R_2\, g_\mathrm{m}}{\frac{2}{\mathrm{j}\,\omega C}\left(g_\mathrm{m} + \frac{1}{R_1}\right) + 1}$$

wird minimiert für

$$\begin{aligned} & C \to 0 \\ \vee \quad & R_1 \to 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

a) Bestimmung des Frequenzgangs.



$$\begin{aligned}
&\underline{U}_d = \underline{U}_1 - \underline{U}_2\\
\Rightarrow\quad &\underline{U}_2 = \left(R \parallel \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}\right)\underline{g}_m\,\underline{U}_d = \frac{R}{1+\mathrm{j}\,\omega RC}\,\underline{g}_m(\underline{U}_1 - \underline{U}_2)\\
\Rightarrow\quad &\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1+\frac{1+\mathrm{j}\,\omega RC}{R\,\underline{g}_m}}
\end{aligned}$$

b) Grenzwert

$$\underline{F} \xrightarrow{|\underline{g}_m|\to\infty} 1$$

c) Identifikation mit Regelschleifendarstellung.

$$\begin{aligned}
&\underline{F} = \frac{\underline{F}_a}{1+\underline{F}_a\,\underline{F}_2} \xrightarrow{|\underline{F}_a|\to\infty} \frac{1}{\underline{F}_2} \stackrel{!}{=} 1\\
\Leftrightarrow\quad &\underline{F}_2 = 1.\\
&\frac{1}{\underline{F}} = \frac{1}{\underline{F}_a} + \underline{F}_2\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{\underline{F}_a} = \frac{1}{\underline{F}} - \underline{F}_2 = 1 + \frac{1+\mathrm{j}\,\omega RC}{R\,\underline{g}_m} - 1\\
\Leftrightarrow\quad &\underline{F}_a = \frac{R\,\underline{g}_m}{1+\mathrm{j}\,\omega RC}\\
&\underline{F}_0 = \underline{F}_a\,\underline{F}_2 = \frac{R\,\underline{g}_m}{1+\mathrm{j}\,\omega RC}.
\end{aligned}$$

d) Zur Info: Lösung zur Kontrolle entspricht berechneter Lösung mit

$$a = R.$$

Fahre fort mit Lösung zur Kontrolle.

Für $C = 0$ gilt

$$\underline{F}_0(C=0) = \frac{a\,g_0}{\left(1+\frac{\mathrm{j}\,\omega}{\omega_0}\right)\left(1+\frac{\mathrm{j}\,\omega}{100\omega_0}\right)}.$$

Lösung Bode-Diagramm (siehe nächste Seite).

e) Bedingung für Bauteilparameter

$$\begin{aligned} 20\,\mathrm{dB}\,\log\left(|a\,g_0|\right) &= 80\,\mathrm{dB} \\ \Leftrightarrow \qquad a\,g_0 &= 10\,000. \end{aligned}$$

f) Die Schaltung ist grenzstabil (bzw. instabil), da die Phasenreserve $0°$ beträgt.

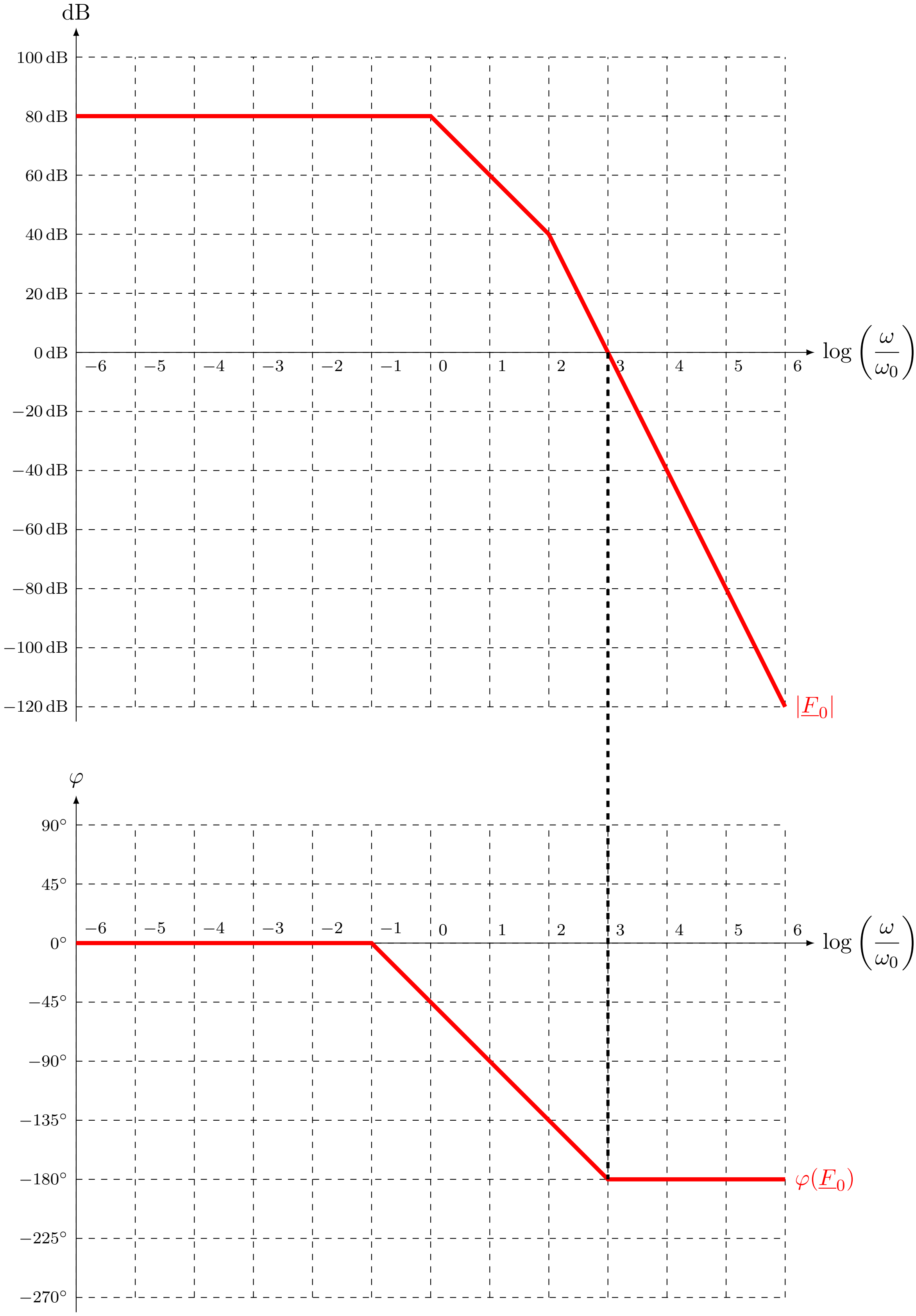


Abbildung 1: Lösung Bode-Diagramm für $C = 0$.

g) Bestimmung von C

Es gilt:

$$\underline{F}_0 = \frac{a\,\underline{g}_\mathrm{m}}{1 + \mathrm{j}\,\omega RC} = \frac{a\,g_0}{\left(1 + \frac{\mathrm{j}\,\omega}{\omega_\mathrm{x}}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{j}\,\omega}{\omega_0}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{j}\,\omega}{100\omega_0}\right)} = \frac{v_0}{a}\,\frac{1}{\left(1 + \frac{\mathrm{j}\,\omega}{\omega_0}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{j}\,\omega}{\omega_\mathrm{x}}\right)} \quad \text{mit}$$

$$\omega_\mathrm{x} = \frac{1}{R\,C}.$$

Anhand des Bode-Diagramms (siehe nächste Seite) lässt sich erkennen, dass die Phasenreserve gerade 45° ist, wenn

$$\omega_\mathrm{x} = 10^{-4}\omega_0.$$

Es gilt daher

$$C = \frac{1}{R\,\omega_\mathrm{x}} = \frac{10\,000}{R\,\omega_0}.$$

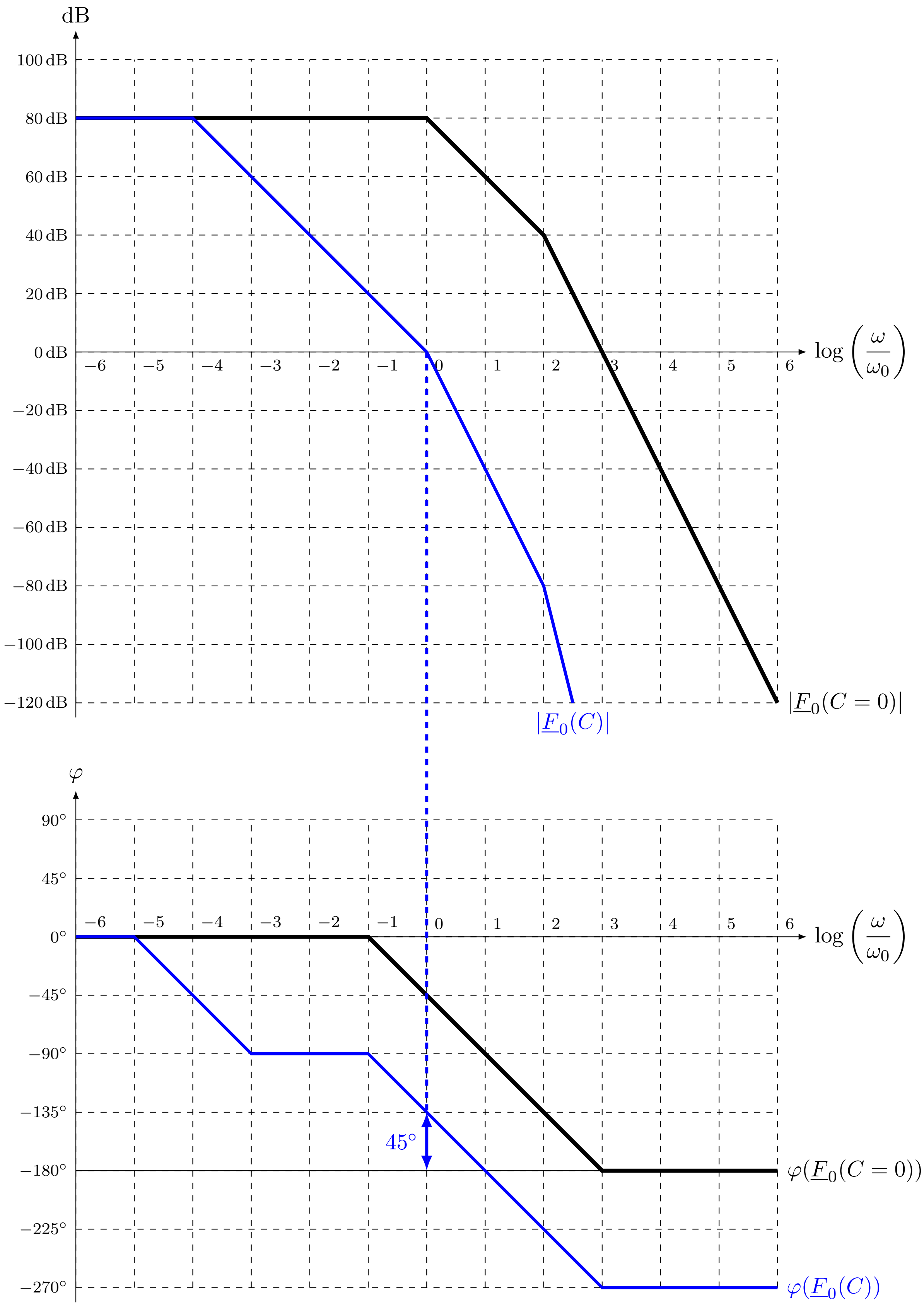


Abbildung 2: Lösung Bode-Diagramm zur Bestimmung von C.