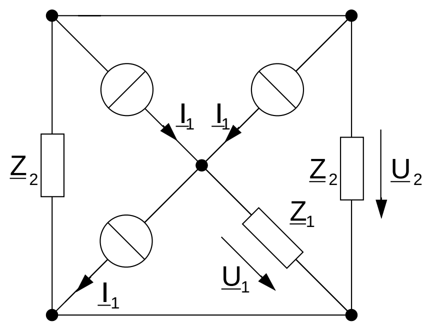
Klausur Elektronik II, SS 2007
Lösungsvorschlag

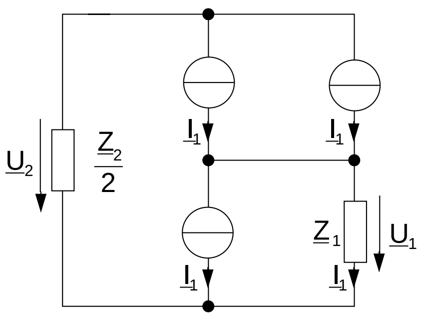
Aufgabe 1 (6 Punkte): Netzwerkberechnung



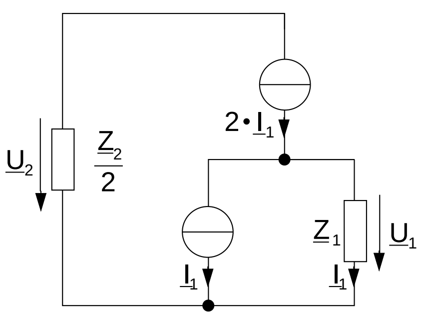
Überknoten:

Strom $\underline{I}_1$ fließt durch $\underline{Z}_1$.
$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1$

Die Widerstände $\underline{Z}_2$ sind parallel und lassen sich zusammenfassen.



Stromquellen lassen sich zusammenfassen.

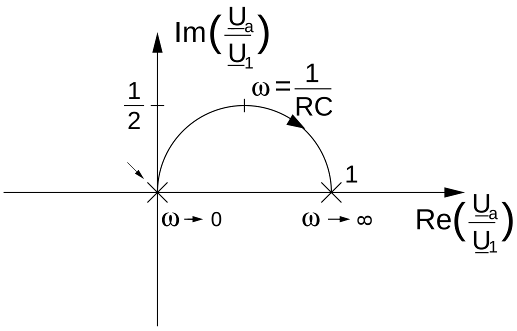


$\underline{U}_2 = -2 \cdot \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_2}{2} = -\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_2$

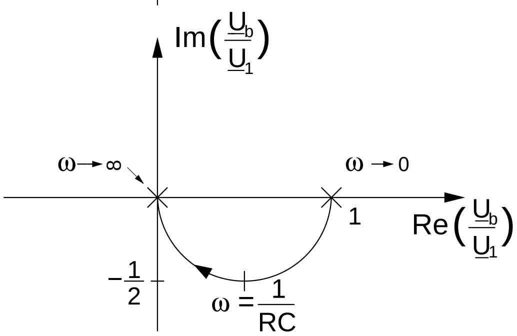
$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte): Ortskurve

1) Spannungsteiler in beiden parallelen Zweigen:



$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+\frac{1}{j\omega RC}}$$



$$\frac{\underline{U}_b}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

mögliche Lösungswege:

- anschaulich über Spannungsteiler
- mathematisch durch Einsetzen von $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{RC}$ und $\omega = \infty$ in die jeweilige Wirkungsfunktion. Anschließend Betrag und Argument berechnen. Punkte lassen sich zu einem Halbkreis verbinden.

2) $\underline{U}_2 = \underline{U}_a - \underline{U}_b = \left(\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}} - \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\right) \cdot \underline{U}_1$

$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \left(\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}} - \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\right) = \frac{R-\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}$$

$$= -\frac{1-j\omega RC}{1+j\omega RC}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right| = \left|-\frac{1-j\omega RC}{1+j\omega RC}\right| = 1$$

Somit kann es sich nur um einen Kreis oder um einen Halbkreis um den Ursprung mit dem Radius 1 handeln.

3) rechnerische Lösung:

$\underline{\omega = 0:}$ $\quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = -1, \qquad \varphi = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = \pi$

$\underline{\omega = \frac{1}{RC}:}$ $\quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R+R\cdot j}{r-r\cdot j} = \frac{R^2-R^2+2R^2\cdot j}{2R^2} = j, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\underline{\omega \to \infty:}$ $\quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R} = 1, \qquad \varphi = 0$

Folglich kommt für den Verlauf der Ortskurve nur ein Halbkreis in Frage, der bei -1 startet und bei $+1$ endet.

Alternative Lösung: (Intuition)

Mittels der in 1) skizzierten Ortskurven ist es möglich, die Wirkungsfunktion $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ zu konstruieren (ohne Rechnung). Betrachtet werden die markierten Punkte ($\omega = 0, \omega = \frac{1}{RC}$ und $\omega = \infty$) auf den bereits skizzierten Ortskurven und subtrahiert sie voneinander (Achtung: komplexe Zahlen!!!). Dadurch wird ein neuer Punkt konstruiert, welcher für das betrachtete ω ($\omega = 0, \omega = \frac{1}{RC}$ und $\omega = \infty$) auf der gesuchten Ortskurve zu finden ist. Zuletzt verbindet man diese Punkte (Richtung!) miteinander und erhält einen Halbkreis.

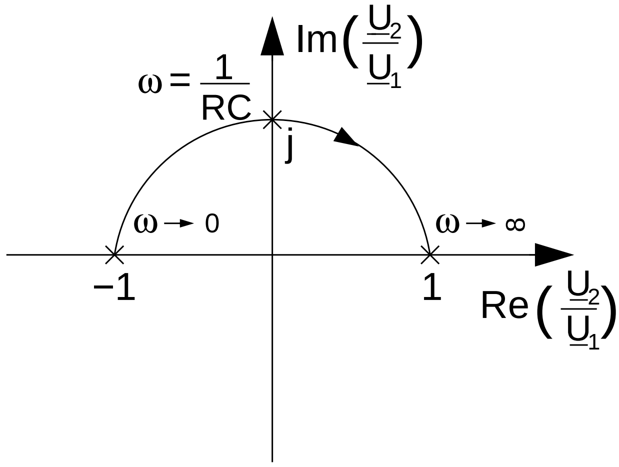


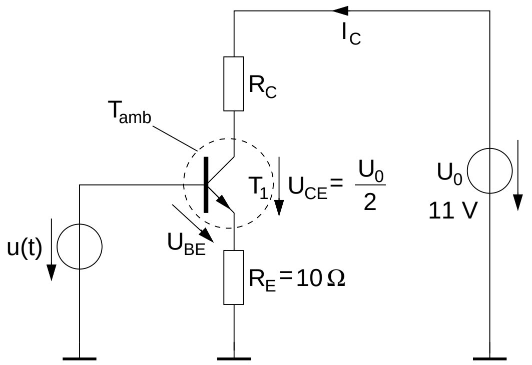
Abb.: Ortskurve der Wirkungsfunktion $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Arbeitspunkt, Wärmewiderstand

1) $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}I_C} \stackrel{!}{=} 0$ Dimensionierung s. Skript zur Elektronik II (SS 2009) (Herleitung S. 33-35)

Prinzip der halben Versorgungsspannung:

$$U_{CE} = \frac{U_0}{2} = I_C \cdot (R_C + R_E)$$



2) I:

$$-u(t) + U_{BE} + I_E \cdot R_E = 0$$

mit $I_B + I_C = I_E \approx I_C$ (da $\beta \to \infty$) folgt:

$$I_C = \frac{U(t) - U_{BE}}{R_E} = \frac{1{,}9\,\mathrm{V} - 0{,}9\,\mathrm{V}}{10\,\Omega} = 0,1\,\mathrm{A}$$

II:

$$U_0 - R_E \cdot I_C - \underbrace{U_{CE}}_{=\frac{U_0}{2}} - R_c \cdot I_C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_C = \frac{\frac{U_0}{2} - I_C \cdot R_E}{I_C} \frac{U_0}{2 \cdot I_C} - R_E = \frac{5{,}5\,\mathrm{V}}{0{,}1\,\mathrm{A}} - 10\,\Omega = 45\,\Omega}$$

3) $p_V = i_C(t) \cdot u_{CE}(t)$

Die Verlustleistung P_V wird für den Fall $u_{max} = 1,9\,\mathrm{V}$ maximal. Minimal wird P_V hingegen für den Fall von $u(t) = 0$.

$P_{V,max} = I_{C,max} \cdot U_{CE} = 0,1\,\mathrm{A} \cdot 5,5\,\mathrm{V} = 0,55\,\mathrm{W}$

$$\bar{P}_m = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} p(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{T}\left[\int\limits_t^{t+aT} I_{C,max}\cdot U_{CE}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_{aT}^{t+T} 0\cdot\,\mathrm{d}\,t\right]$$
$$= \frac{aT\cdot I_{C,max}\cdot U_{CE}}{T} = a\cdot I_{C,max}\cdot U_{CE}$$

4) $P_V = I_C\cdot U_{CE} = I_C\cdot\frac{U_0}{2} = 0,55\,\mathrm{W}$

$P_V\cdot R_{th} = \Delta T_{max} = T_{j,max} - T_{amb}|_{\text{worst case}}$

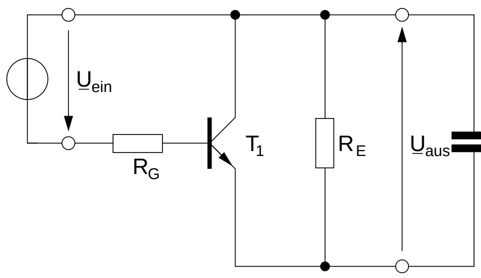
$$\Rightarrow\quad \bar{P}_V = \frac{T_{j,max}-T_{amb}}{R_{th}} = \frac{(110-55)\,°\mathrm{C}}{50\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{W}}} = 1,1\,\mathrm{W}$$
$$\bar{P}_m \overset{!}{=} \bar{P}_V \quad \big(\text{aus Aufgabenteil 3}\big)$$

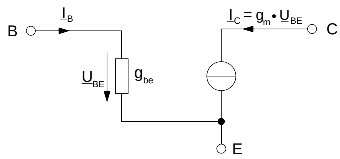
$$a_{max}\cdot 0,55\,\mathrm{W} = 1,1\,\mathrm{W}$$

$$\Rightarrow\quad a_{max} = 2$$

Aufgabe 4 (12 Punkte): Schaltungsberechnung, Dimensionierung

1) WS-ESB: Kollektorgrundschaltung





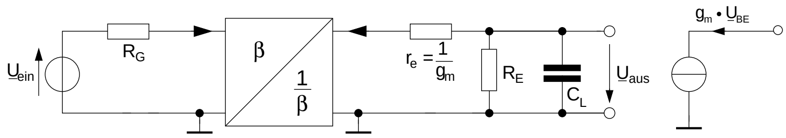
$g_m = \beta\cdot g_{be}$
$\underline{I}_C = g_m\cdot\underline{U}_{BE}$

ges.: Frequenzgang $\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{aus}}{\underline{U}_{ein}}$

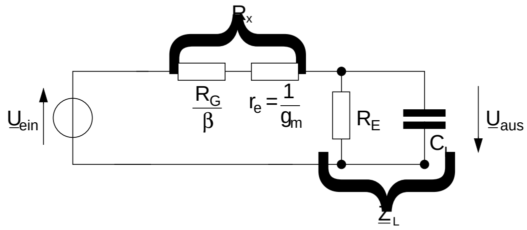
Näherung: $\beta \quad\rightarrow\quad \infty$

Die Quelle $\underline{U}_{ein}$ ist eine reine Wechselspannungsquelle ohne Gleichanteil.

Wirkungsersatzschaltbild des Bipolartransistor ($r_b = 0$):



Transformation zur Ausgangsseite (Ersatzspannungsquelle mit Innenwiderstand und Leerlaufspannung $\underline{U}_{aus}$).



$$\left(\text{mit} \quad \underline{Z}_L = (R_E || \tfrac{1}{j\omega C_L}) = \frac{R_E \cdot \frac{1}{j\omega C_L}}{R_E + \frac{1}{j\omega C_L}} = \frac{R_E}{1 + j\omega \underbrace{C_L \cdot R_E}_{=\tau}} \right.$$

$$\left. \wedge \quad R_X = \tfrac{R_G}{\beta} + r_e \quad (r_e = \tfrac{1}{g_m}) \right).$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \underline{F}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_{aus}}{\underline{U}_{ein}} \\
&= \frac{-\underline{Z}_L}{R_X + \underline{Z}_L} \\
&= \frac{-R_E}{(1 + j\omega\tau) \cdot (R_X + \frac{R_E}{1+j\omega\tau})} \\
&= \frac{-R_E}{R_X \cdot (1 + j\omega\tau) + R_E} \\
&= \frac{-R_E}{R_X + R_E + R_X \cdot j\omega\tau} \\
&= \frac{-\frac{R_E}{R_E + R_X}}{1 + \frac{R_X}{R_X + R_E} \cdot j\omega\tau} \\
&= \frac{-\frac{R_E}{R_E + R_X}}{1 + j\omega\tau^*} \qquad \left(\text{mit} \quad \tau^* = \frac{R_X \cdot \tau}{R_X + R_E}\right).
\end{aligned}$$

2) $\omega_g = \frac{1}{\tau^*} = \frac{1}{(R_E||R_X)\cdot C_L} = 2\pi \cdot f_g$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_g = \frac{1}{(R_E||R_X)\cdot C_L \cdot 2\pi} = \frac{R_E+R_X}{R_E\cdot R_X \cdot C_L \cdot 2\pi}}$$

$$\underline{F}(\omega = 0) = -\frac{R_E}{R_E+R_X} = -\frac{R_E}{R_E+\frac{R_G}{\beta}+r_e} = \frac{R_E}{R_E+\frac{R_G}{\beta}+\underbrace{\frac{1}{g_m}}_{\frac{U_T}{I_C}}}$$

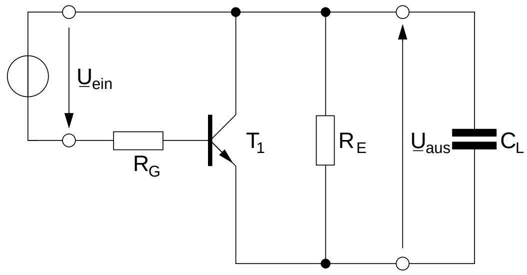
3) Möglichkeiten zur Erhöhung von f_g:

R_E klein $\Rightarrow$ P_V $\uparrow$
R_X klein $\Rightarrow$ R_G klein $\Rightarrow$ $P_V = const.$

Oder:

r_e $\downarrow$ $\Rightarrow$ P_V $\uparrow$
C_L klein $\Rightarrow$ $P_V = const.$

4) g_m in Abhängigkeit anderer Bauelemente:



- $\underline{U}_{ein}$ ist eine reine Wechselquelle, also keinen Einfluss auf AP.
- $\beta \Rightarrow \infty \quad \Rightarrow U_{RG} = 0$

$U_0 = U_{RE} + U_{CE} = I_0 \cdot R_E + U_{BE}$

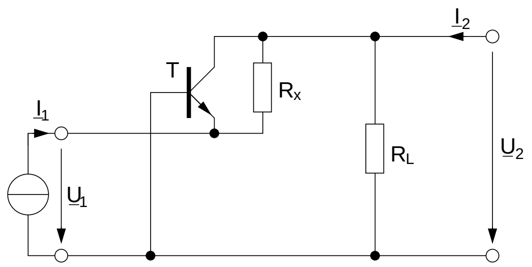
$\Rightarrow \quad I_C = \frac{U_0 - U_{BE}}{R_E} \qquad \left(\text{mit } g_m = \frac{I_C}{U_T}\right)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g_m = \frac{(U_0 - U_{BE})\cdot U_T}{R_E}}$$

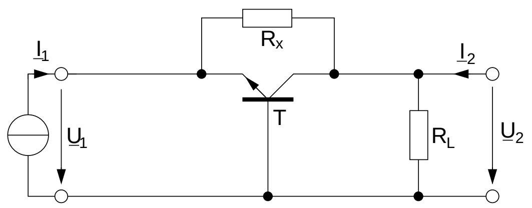
(wobei U_{BE} und U_T Konstanten sind (siehe Aufgabe)).

Aufgabe 5 (16 Punkte): Rückkopplung, Zweitor

1) Wechselstrom-ESB:

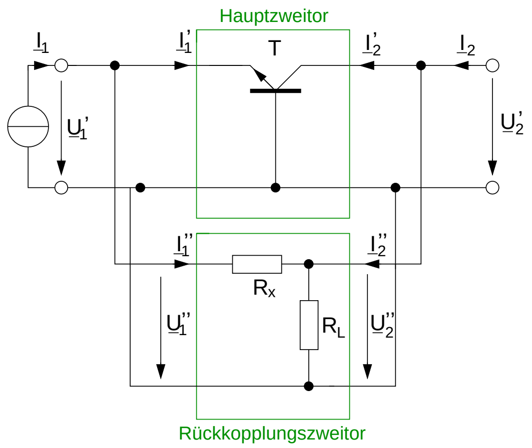


Hierbei handelt es sich um eine Basisgrundschaltung.
Der Basisanschluss befindet sich sowohl am Ein-, als auch am Ausgang.



2) WS-ESB für Berechnung mit einem Haupt- und einen Rückkopplungszweitor

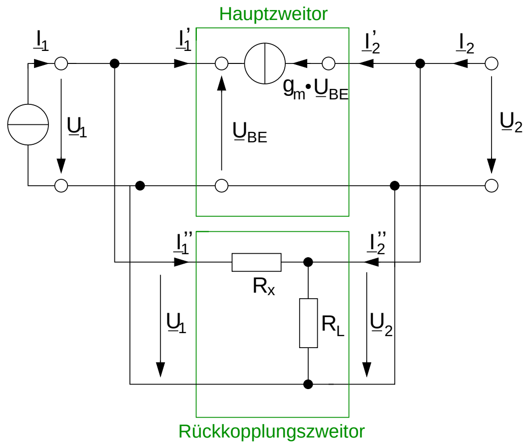
Spannungen der beiden Tore sind gleich, Ströme hingegen addieren sich:



$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' = \underline{U}_1''$$
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_2' = \underline{U}_2''$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1''$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2' + \underline{I}_2''$$

3) Kleinsignalersatzschaltbild (KS-ESB):



KS-ESB des Transistors eingesetzt.

4) PPK-Rückkopplung: $[\underline{Y}] = [\underline{Y}^{(1)}] + [\underline{Y}^{(2)}]$ (Admittanz-Matrix)
Begründung:

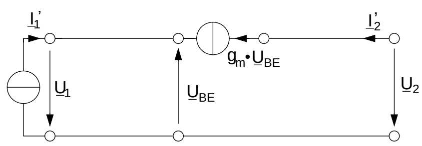
$$\underline{I}_1' = \underline{Y}_{11}' \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}' \cdot \underline{U}_2$$
$$\underline{I}_1'' = \underline{Y}_{11}'' \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}'' \cdot \underline{U}_2$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1'' &= \underline{Y}_{11}' \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{11}'' \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}' \cdot \underline{U}_2 + \underline{Y}_{12}'' \cdot \underline{U}_2 \\ &= (\underline{Y}_{11}' + \underline{Y}_{11}'') \cdot \underline{U}_1 + (\underline{Y}_{12}' + \underline{Y}_{12}'') \cdot \underline{U}_2\end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2$$

5) Hauptzweitor:

$$\underline{Y}_{11}' = \left.\frac{\underline{I}_1'}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = +g_m$$
$$\underline{Y}_{12}' = \left.\frac{\underline{I}_1'}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = 0$$
$$\underline{Y}_{21}' = \left.\frac{\underline{I}_2'}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -g_m$$
$$\underline{Y}_{22}' = \left.\frac{\underline{I}_2'}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = 0$$



$$\Rightarrow \left[\underline{Y}^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} g_m & 0 \\ -g_m & 0 \end{bmatrix}$$

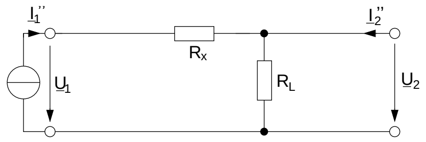
Rückkopplungszweitor:

$$\underline{Y}''_{11} = \left.\frac{\underline{I}''_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{1}{R_x} = +\underline{Y}_x$$

$$\underline{Y}''_{12} = \left.\frac{\underline{I}''_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = -\frac{1}{R_x} = -\underline{Y}_x$$

$$\underline{Y}''_{21} = \left.\frac{\underline{I}''_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -\frac{1}{R_x} = -\underline{Y}_x$$

$$\underline{Y}''_{22} = \left.\frac{\underline{I}''_2}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = \frac{R_x + R_L}{R_x \cdot R_L} = \underline{Y}_x + \underline{Y}_L \Rightarrow \left[\underline{Y}^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_x & -\underline{Y}_x \\ -\underline{Y}_x & \underline{Y}_x + \underline{Y}_L \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \quad \left[\underline{Y}\right] = \left[\underline{Y}^{(1)}\right] + \left[\underline{Y}^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} g_m + \underline{Y}_x & -\underline{Y}_x \\ -g_m - \underline{Y}_x & \underline{Y}_x + \underline{Y}_L \end{bmatrix}$$

6) $\underline{Z}_T = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = ?$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2$$
$$0 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U}_1 = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \cdot \underline{U}_2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_1 = \underline{U}_2 \cdot \left(\underline{Y}_{12} - \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \cdot \underline{Y}_{11}\right)$$

Somit ergibt sich:

$$\underline{Z}_T = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{\underline{Y}_{12} - \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \cdot \underline{Y}_{11}}$$

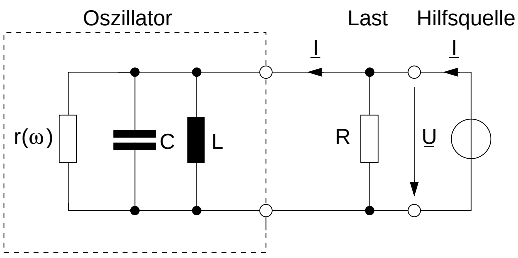
Einsetzen der Elemente liefert:

$$\boxed{\underline{Z}_T = \frac{(-g_m - \underline{Y}_x)}{(-g_m - \underline{Y}_x)\cdot(-\underline{Y}_x) - (\underline{Y}_x + \underline{Y}_L)\cdot(\underline{Y}_x + g_m)} = \frac{1}{-\underline{Y}_x + \underline{Y}_x + \underline{Y}_L} = \frac{1}{\underline{Y}_L} = R_L}$$

7) $\underline{Z}_T$ ist NUR abhängig von R_L, d.h. die anderen Bauelemente haben keinen Einfluss auf die Transimpedanz.

Aufgabe 6 (12 Punkte): Stabilität, Netzwerk

1) Die Hilfsquelle ist zunächst eingeschaltet:



ges.: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ (Gesamtimpedanz)

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g(\omega) + G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} = \frac{1}{g(\omega) + G + sC + \frac{1}{sL}}}$$

$$\left(\text{Wirkungsfunktion} = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ursache}}\right)$$

2) Der Ausgangsstrom $\underline{I}$ der Hilfsquelle hat einen Spannungsabfall $\underline{U}$ zur Folge.

3) Wenn die Wirkungsfunktion WF des Netzwerks stabil ist, so wird $\underline{U}$ zu Null, wenn $\underline{I}$ zu Null wird. (Ursache $\rightarrow$ 0, Wirkung $\rightarrow$ 0)

4) Pole von $\underline{Z}$ sind Nullstellen von $\underline{Y}$.

$$\underline{Y} = g(\omega) + G + sC + \frac{1}{sL} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Big| \cdot s$$

$$\Leftrightarrow \quad \big(g(\omega) + G\big) \cdot s + C \cdot s^2 + \frac{1}{L} = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-\big(g(\omega)+G\big)) \pm \sqrt{\big(g(\omega)+G\big))^2 - \frac{4C}{L}}}{2C}$$
$$= \underbrace{-\frac{g(\omega)+G}{2C}}_{=\sigma} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{\big(g(\omega)+G\big))^2}{4C^2}}}_{=\omega}$$

5) Fallunterscheidung:

1. Fall: $\sigma < 0$ stabil (Pol in LHE),

$$\Rightarrow \quad g(\omega) > -G = -\tfrac{1}{R}$$

2. Fall: $\sigma = 0$ grenzstabil (Pol auf imaginärer Achse),

$$\Rightarrow \quad g(\omega) = -G = -\tfrac{1}{R}$$

Hier:

3. Fall: $\sigma > 0$ instabil (Pol in RHE).

$$\Rightarrow \quad g(\omega) < -G = -\tfrac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{r}(\omega) < -R}$$

6) Oszillator führt Schwingungen aus.

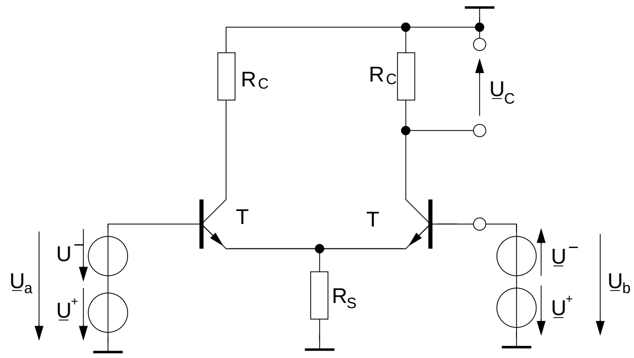
Beweis:

Heavyside'scher Entwicklungssatz: e^{st}, $\sigma < 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{Amplitude} \quad \rightarrow \quad \infty} \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Aufgabe 7 (16 Punkte): Gleichtakt-, Gegentaktzerlegung

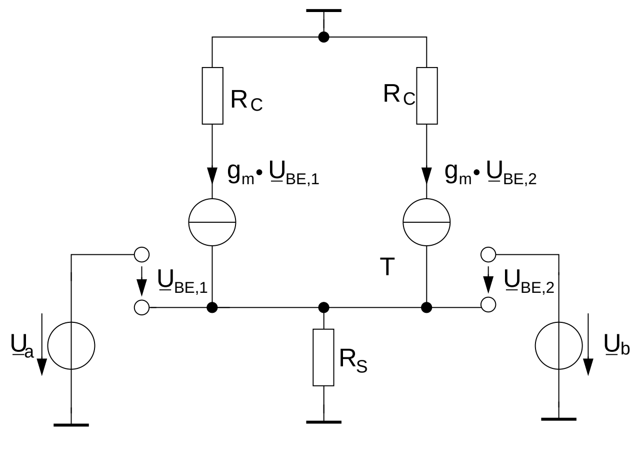
1) Ansteuerung durch Überlagerung von Gleich- und Gegentaktquellen:



$\underline{U}_a = \underline{U}^+ + \underline{U}^-$ $\underline{U}_b = \underline{U}^+ - \underline{U}^-$

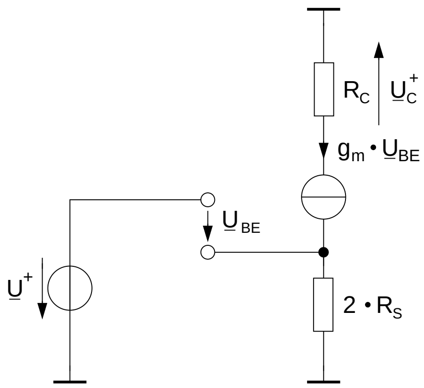
$\boxed{\underline{U}^+ = \frac{\underline{U}_a + \underline{U}_b}{2}}$ $\boxed{\underline{U}^- = \frac{\underline{U}_a - \underline{U}_b}{2}}$

2) Kleinsignal-ESB des Differenzverstärkers:

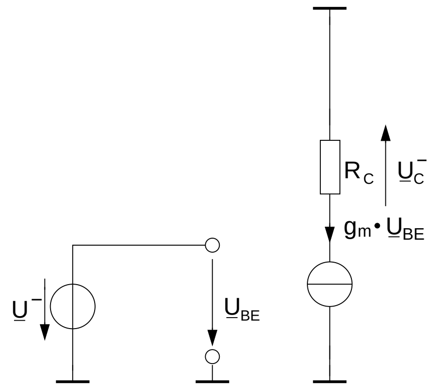


3) Einphasiges Gleich- und Gegentaktersatzschaltbild:

Gleichtakt:



Gegentakt:



5) $\underline{U}_C^+ = -R_C \cdot g_m \cdot \underline{U}_{BE}$

mit:

$$\underline{U}_{BE} = \underline{U}^+ - 2 \cdot R_S \cdot g_m \cdot \underline{U}_{BE}$$
$$\underline{U}_{BE} = \frac{\underline{U}^+}{1+2R_S \cdot g_m}$$

$$\underline{U}_C^+ = -R_C \cdot g_m \cdot \frac{\underline{U}^+}{1+2R_S \cdot g_m}$$

4) $\underline{U}_C^- = -R_C \cdot g_m \cdot \underline{U}^-$

6) Spannung $\underline{U}_C$ am Ausgang bei beliebiger Ansteuerung:

$$\underline{U}_C = \underline{U}_C^- + \underline{U}_C^+$$

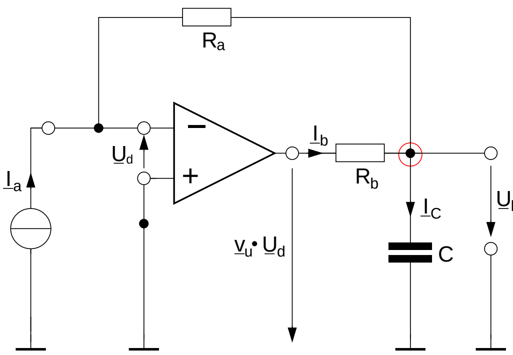
$$= -R_C \cdot g_m \cdot \underline{U}^- - R_C \cdot g_m \cdot \frac{\underline{U}^+}{1+2R_S \cdot g_m}$$

Einsetzen der Phasoren $\underline{U}_a$ und $\underline{U}_b$:

$$= -R_C \cdot g_m \cdot \left(\frac{\underline{U}_a - \underline{U}_b}{2} + \frac{\underline{U}_a + \underline{U}_b}{2} \cdot \frac{1}{1+2R_S \cdot g_m} \right)$$

$$= -\frac{R_C \cdot g_m}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+2R_S \cdot g_m} \right) \cdot \underline{U}_a - \frac{R_C \cdot g_m}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+2R_S \cdot g_m} - 1 \right) \cdot \underline{U}_b$$

Aufgabe 8 (16 Punkte): Operationsverstärker, Bode-Diagramm



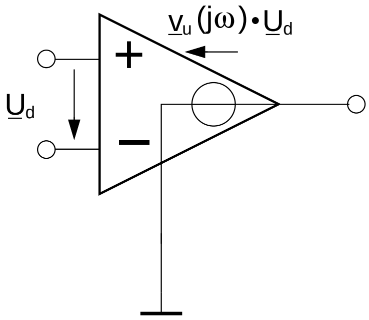


Abb. links: Operationsverstärkerschaltung eines kapazitiv belasteten invertierenden Verstärkers mit endlichem Ausgangswiderstand. rechts: Modell des Opersationsverstärkers

1) $\underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{U}_b(j\omega)}{\underline{I}_a(j\omega)} = ?$

Maschengleichungen:

I: $\underline{U}_d + \underline{U}_b + \underline{I}_a \cdot R_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_d = -\underline{U}_b - \underline{I}_a \cdot R_a \quad (\star)$

II: $\underline{U}_b - \underline{U}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_b = \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}_C$

III: $\underline{v}_u \cdot \underline{U}_d - \underline{U}_b - \underline{I}_b \cdot R_b = 0$

Knotengleichung:

IV: $\underline{I}_b + \underline{I}_a = \underline{I}_C$

$\Rightarrow \quad \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}_C = \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot (\underline{I}_b + \underline{I}_a)$

$\Rightarrow \quad \underline{I}_b = \underline{U}_b \cdot j\omega C - \underline{I}_a \quad (\star\star)$

$(\star)$ und $(\star\star)$ in (III):

$\Rightarrow \quad \underline{v}_u \cdot (-\underline{U}_b - \underline{I}_a \cdot R_a) - \underline{U}_b - \underline{U}_b \cdot j\omega R_b C + \underline{I}_a \cdot R_b = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{U}_b \cdot (-\underline{v}_u - 1 - j\omega R_b C) = \underline{I}_a \cdot (R_a \cdot \underline{v}_u - R_b)$

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{U}_b(j\omega)}{\underline{I}_a(j\omega)}$$

$$= -\frac{R_a \cdot \underline{v}_u - R_b}{1 + \underline{v}_u + j\omega R_b C} = -\frac{R_a \cdot \underline{v}_u - R_b}{1 + \underline{v}_u + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$(\text{mit} \quad \omega_0 = \tfrac{1}{R_b C})$$

2) $\underline{Z}(j\omega) \overset{|\underline{v}_u| \to \infty}{=} -\frac{R_a \cdot \underline{v}_u}{\underline{v}_u} = -R_a$

3) Es sind zunächst:

$$v_u = 100, \quad R_a = 1000\,\Omega, \quad R_b = 10\,\Omega \quad \text{und} \quad \omega_0 = \tfrac{1}{R_b C}$$

$R_a \cdot \underline{v}_u - R_b \approx R_a \cdot \underline{v}_u$, da $\frac{|R_a \cdot \underline{v}_u|}{|R_b|} = \frac{|1000\,\Omega \cdot 100|}{|10\,\Omega|} \gg 10.$

$1 + \underline{v}_u \approx \underline{v}_u$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{Z}(j\omega) = -\frac{R_a \cdot \underline{v}_u}{\underline{v}_u + \frac{j\omega}{\omega_0}} = -\frac{R_a}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0 \cdot \underline{v}_u}} = -\frac{1000\,\Omega}{1 + \frac{j\omega}{100 \cdot \omega_0}}}$$

4) Verlauf von Betrag und Phase von $\underline{Z}(j\omega)$ bezogen auf $1\,\Omega$ sind im Bode-Diagramm aufgetragen.

5) Im folgenden gilt:

$$R_b = 0 \quad \wedge \quad \underline{v}_u(j\omega) = \frac{v_0}{(1 + \frac{j\omega}{\cdot\omega_0}) \cdot (1 + \frac{j\omega}{100 \cdot \omega_0})} \quad (\text{mit} \quad v_0 = 100)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Z}(j\omega) = -\frac{R_a \cdot \underline{v}_u}{1 + \underline{v}_u}$$

Vergleich mit: $\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{F}_a(j\omega)}{1 + \underline{F}_a(j\omega) \cdot \underline{F}_2(j\omega)}$

$\Rightarrow \quad \underline{F}_a(j\omega) = -R_a \cdot \underline{v}_u \quad \wedge \quad \underline{F}_a \cdot \underline{F}_2 = \underline{v}_u$

$\Rightarrow \quad \underline{F}_2(j\omega) = -\frac{v_u}{\underline{v}_u \cdot R_a} = -\frac{1}{R_a}$

6) Schleifenverstärkung:

$\underline{F}_0(j\omega) = \underline{F}_a(j\omega) \cdot \underline{F}_2(j\omega) = \underline{v}_u = \frac{100}{(1+\frac{j\omega}{\omega_0})\cdot(1+\frac{j\omega}{100\cdot\omega_0})}$

Verlauf von Betrag und Phase sind im Bode-Diagramm aufgetragen.

Bode-Diagramm: