

14.1 Rückgekoppelte Vierpole

Bisher wurden durch Zweitore beschreibbare rückgekoppelte Schaltungen betrachtet. In der Regel enthielten die Zweitore Dreipol-Elemente, wodurch die Torbedingung der Zweitore für alle Möglichkeiten der Verschaltung zu einem Gesamtzweitor immer erfüllt ist. Nur bei Erfüllung der Torbedingung ist es möglich, ein Element mit vier Anschlüssen (Polen) durch nur zwei Ströme und zwei Spannungen vollständig zu beschreiben. In der Praxis können auch Schaltungen mit vier Polen vorkommen, die die Torbedingung nicht erfüllen (daher der Name Vierpol anstatt Zweitor). In diesem Fall kann entweder die Schaltung anders partitioniert werden oder mit Vierpolen gerechnet werden.

Im ersten Fall werden wenn möglich anstelle des Tores mit der nicht erfüllten Torbedingung andere Knoten der Schaltung, für die die Bedingung erfüllt ist, als Tor gewählt. Im großen ist dies immer möglich, da für alle elektrischen Schaltungen und Anordnungen die Maxwell'schen Gleichungen und damit nach Kap. 1 die Kirchhoffschen Regeln gelten: Wird um die gesamte Anordnung gedanklich eine Hülle gelegt, dann erfüllt jedes zweipolige Element oder jede zweipolige Teilschaltung, die aus dieser Hülle herausgezogen wird, die Torbedingung.

Mitunter führt eine solche Partitionierung aber zu Schaltungsteilen, deren Berechnung keinen Sinn macht oder zu aufwendig ist. Hier führt die Berech-

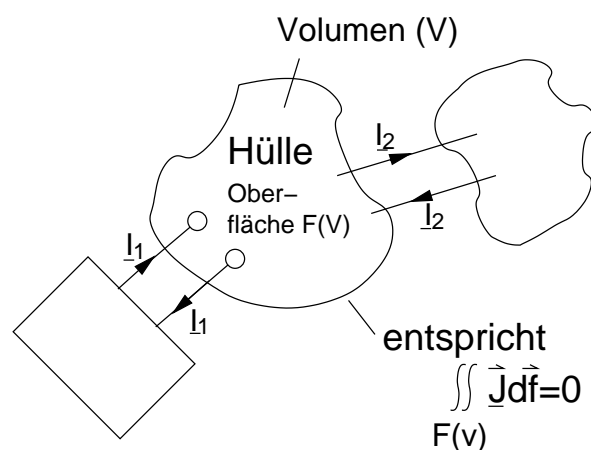


Abb. 64: Erzwangene Torbedingung für die Schaltung in V bei Abschluß mit echten 1-Tor-Elementen.

nung der Schaltung mit Hilfe einer Beschreibung durch Vektore zum Erfolg. Diese Methode wollen wir uns nachfolgend am häufigsten, in der Praxis vorkommenden Beispiel, der Serien-Parallel-Kopplung anschauen. Zur allgemeinen Beschreibung eines echten Vierpols werden die Ströme in drei der vier Pole sowie die Spannungen zwischen drei der vier Pole benötigt. Der fehlende vierte Wert ergibt sich aufgrund der Kirchhoffschen Gleichungen $\sum U = 0$, $\sum I = 0$ auf der Hüllfläche des Vierpols.

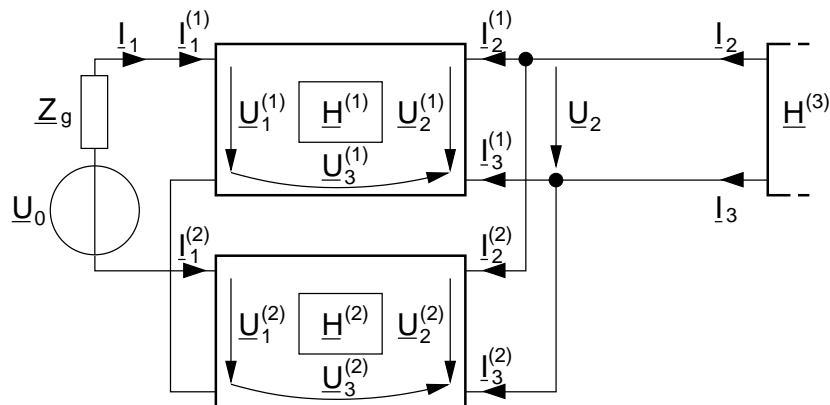


Abb. 65: Erzwungene Torbedingung der Gesamtschaltung bei Abschluß mit echten 1-Tor-Elementen.

Für die in der Abb. 65 dargestellte S-P-Kopplung addieren sich die Spannungen $\underline{U}_1^{(1)}$, $\underline{U}_1^{(2)}$ an den Eingängen der beiden Vierpole. An den Ausgängen addieren sich jeweils die Ströme $\underline{I}_2^{(1)}$, $\underline{I}_2^{(2)}$ und $\underline{I}_3^{(1)}$, $\underline{I}_3^{(2)}$.

Um die Zusammenschaltung der beiden Vierpole bei der S-P-Kopplung durch eine einfache Addition der Matrizen darstellen zu können, muss die $[\underline{\mathbf{H}}]$ -Matrix jedes Vierpols die Struktur

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{H}}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} \quad (216)$$

besitzen, bei der die addierten Größen der beiden Vierpole auf der linken Seite stehen. Die restlichen Größen bilden den Vektor der rechten Seite, die

Anordnung der Größen innerhalb eines Vektors ist willkürlich, liegt jedoch die Bedeutung der \underline{H}_{ij} in $[\mathbf{H}]$ fest. Man erleichtert sich daher die spätere Interpretation der Ergebnisse, wenn die Anordnung der Elemente in den Vektoren so gewählt wird, dass die aus der Zweitorthorie bekannte Bedeutung der Elemente weitestgehend beibehalten wird²³.

Aus Abb. (64) lesen wir folgende Beziehungen zwischen den Strömen und Spannungen an den Vierpolen ab:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1^{(1)} = -\underline{I}_1^{(2)} \quad (217)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2^{(1)} + \underline{I}_2^{(2)} \quad (218)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_3^{(1)} + \underline{I}_3^{(2)} \quad (219)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1^{(1)} - \underline{U}_1^{(2)} \quad (220)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_2^{(1)} = \underline{U}_2^{(2)} \quad (221)$$

$$\underline{U}_3^{(i)} = \underline{U}_3^{(1)} = \underline{U}_3^{(2)} \quad (222)$$

($\underline{U}_3^{(i)}$ ist keine Klemmspannung des Gesamtvierpols.)

Darin weisen $\underline{I}_1^{(2)}$ in Gl. (217) und $\underline{U}_1^{(2)}$ in Gl. (220) ein negatives Vorzeichen auf. Werden die einzelnen Hybrid-Matrizen entsprechend Gl. (216) definiert, müssen die Vorzeichen von \underline{I}_1 und \underline{U}_1 in der H-Matrix von Vierpol (2) berücksichtigt werden. Durch das Vorzeichen von \underline{I}_1 wird die erste Spalte, durch das Vorzeichen von \underline{U}_1 die erste Zeile der H-Matrix mit -1 multipliziert. Durch diese mathematische Umformung erhält man die modifizierte H-Matrix $\underline{H}_{mod}^{(2)}$, die zur Addition mit $\underline{H}^{(1)}$ geeignet ist:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Darstellung entsprechend Gl. (217) - (222)}} = [\mathbf{H}^{(2)}] \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Äquivalente Darst. entsprechend Def. nach Gl. (216)}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Äquivalente Darst. entsprechend Def. nach Gl. (216)}} = [\mathbf{H}_{mod}^{(2)}] \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Äquivalente Darst. entsprechend Def. nach Gl. (216)}} \quad (223)$$

²³Zum Vergleich hier noch einmal der Aufbau des Gleichungssystems für die Hybridmatrix:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{H}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$

mit

$$[\underline{\mathbf{H}}_{mod}^{(2)}] = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11}^{(2)} & -\underline{H}_{12}^{(2)} & -\underline{H}_{13}^{(2)} \\ -\underline{H}_{21}^{(2)} & \underline{H}_{22}^{(2)} & \underline{H}_{23}^{(2)} \\ -\underline{H}_{31}^{(2)} & -\underline{H}_{32}^{(2)} & -\underline{H}_{33}^{(2)} \end{bmatrix} . \quad (224)$$

Es ergibt sich aus Gl. (217)-(222) entsprechend den vorangegangenen Überlegungen für die Addition der H-Matrizen, die H-Matrix der S-P-Kopplung zu

$$[\underline{\mathbf{H}}] = [\underline{\mathbf{H}}^{(1)}] + [\underline{\mathbf{H}}_{mod}^{(2)}] \quad (225)$$

und das entsprechende Gleichungssystem zu

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \underline{H}_{13} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} & \underline{H}_{23} \\ \underline{H}_{31} & \underline{H}_{32} & \underline{H}_{33} \end{bmatrix}}_{[\underline{\mathbf{H}}]} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3^{(i)} \end{bmatrix} . \quad (226)$$

Das Gleichungssystem vereinfacht sich, falls der Gesamt-Vierpol mit einem Tor abgeschlossen ist, so dass gilt

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_2 . \quad (227)$$

In diesem Fall ist die dritte Zeile des Gleichungssystems (226) linear abhängig von der zweiten Zeile und lässt sich durch Addition mit der zweiten Zeile eliminieren.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \underline{H}_{13} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} & \underline{H}_{23} \\ \underline{H}_{21} + \underline{H}_{31} & \underline{H}_{22} + \underline{H}_{32} & \underline{H}_{23} + \underline{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3^{(i)} \end{bmatrix} \quad (228)$$

Die dritte Zeile ergibt eine identische Darstellung für $\underline{U}_3^{(i)}$:

$$-\underline{U}_3^{(i)} = \left[\frac{\underline{H}_{21} + \underline{H}_{31}}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} + \frac{\underline{H}_{22} + \underline{H}_{32}}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} \right] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (229)$$

die eingesetzt in Gl. (228) das Vierpol-Gleichungssystem mit Hybridparametern für eine S-P-Kopplung bei Abschluss mit einem Tor ergibt:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} - \frac{\underline{H}_{13}(\underline{H}_{21} + \underline{H}_{31})}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} & \underline{H}_{12} - \frac{\underline{H}_{13}(\underline{H}_{22} + \underline{H}_{32})}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} \\ \underline{H}_{21} - \frac{\underline{H}_{23}(\underline{H}_{21} + \underline{H}_{31})}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} & \underline{H}_{22} - \frac{\underline{H}_{23}(\underline{H}_{22} + \underline{H}_{32})}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (230)$$

Die Parameter des Gleichungssystems (230) sind die Vierpolparameter im üblichen Sinn; sie beschreiben zwar einen Dreipol in jeder Schaltungseinbettung korrekt, einen Vierpol jedoch nur dann, wenn er beidseitig mit Zweipolen abgeschlossen ist. Ist dies nicht der Fall, so müssen die Teilvierpole durch 3x3 - Matrizen beschrieben werden.

In analoger Weise gilt für die

-SSK:

$$\underline{\mathbf{U}} = (\underline{\mathbf{Z}}^{(1)} + \underline{\mathbf{Z}}^{(2)})\underline{\mathbf{I}} \quad (231)$$

mit $\underline{\mathbf{U}} = (\underline{U}_1, \underline{U}_2, 0)^t$, $\underline{\mathbf{I}} = (\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3^{(i)})^t$, $\underline{I}_3^{(i)}$ analog $\underline{U}_3^{(i)}$ zu Gleichung (222).

-PPK:

$$\underline{\mathbf{I}} = (\underline{\mathbf{Y}}^{(1)} + \underline{\mathbf{Y}}^{(2)})\underline{\mathbf{U}} \quad (232)$$

mit $\underline{\mathbf{U}} = (\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3)^t$, $\underline{\mathbf{I}} = (\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3)^t$.

-PSK:

$$\underline{\mathbf{A}} = (\underline{\mathbf{G}}^{(1)} + \underline{\mathbf{G}}_{mod}^{(2)})\underline{\mathbf{B}} \quad (233)$$

mit $\underline{\mathbf{A}} = (\underline{I}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_3^{(i)})^t$, $\underline{\mathbf{B}} = (\underline{U}_1, \underline{I}_2, \underline{U}_3^{(i)})^t$ und $\underline{\mathbf{G}}_{mod}$ analog $\underline{\mathbf{H}}_{mod}$.

Beispiel

In der folgenden Abb. (66) ist die Schaltung eines Universalverstärkers für den Tonfrequenzbereich dargestellt. Eine Tabelle zur Dimensionierung findet sich in Tabelle 4.

Im Wechselstromersatzschaltbild Abb. (67) und dem zugehörigen Kleinsignalmodell nach Abb. (68) fehlen die Bauelemente, die nur zur Arbeitspunkzeinstellung dienen.

Die Transistoren werden als nichtideale spannungsgesteuerte Stromquellen (g_{be}, g_m) modelliert (siehe nächstes Bild).

Die Berechnung der Vierpolmatrizen ergibt

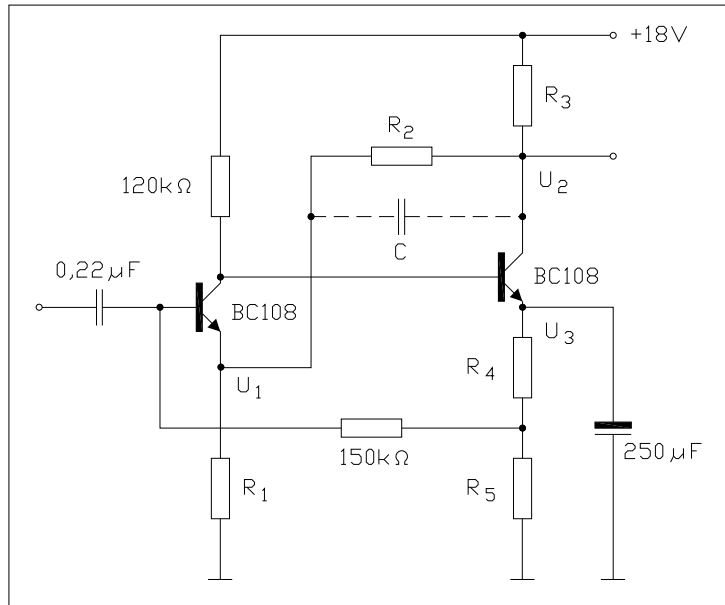


Abb. 66: Schaltung eines Universalverstärkers für den Tonfrequenzbereich.

V_u	dB	10	20	30	40
R_1	kΩ	4,7	1,5	1,5	1
R_2	kΩ	12	15	56	180
R_3	kΩ	1,8	2,2	2,2	2,2
R_4	Ω	470	560	330	680
R_5	Ω	1200	470	270	220
C	pF	-	-	-	10
U_1	V	3,4	0,97	0,4	0,15
U_2	V	10,8	9,3	9,3	9,7
U_3	V	5,6	3,55	2,3	3,4
$ Z_1 $	kΩ	145	140	135	110
$ Z_2 $	Ω	63	140	260	700
f_u	Hz	< 20	< 20	< 20	< 20
f_o	Hz	≫ 20	≫ 20	≫ 20	≫ 20

Tabelle 4: Dimensionierungen des Verstärkers nach Abb. (66) für verschiedene Spannungsverstärkungen V_U

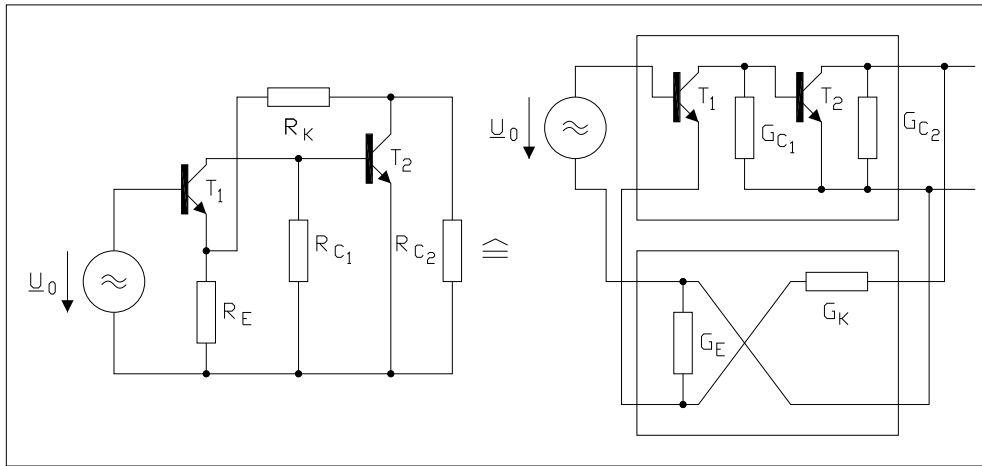


Abb. 67: Wechselstromersatzschaltung des Verstärkers nach Abb. (66). Die rechte Seite zeigt eine Aufspaltung in zwei Teilvierpole, die zur weiteren Berechnung verwendet wird.

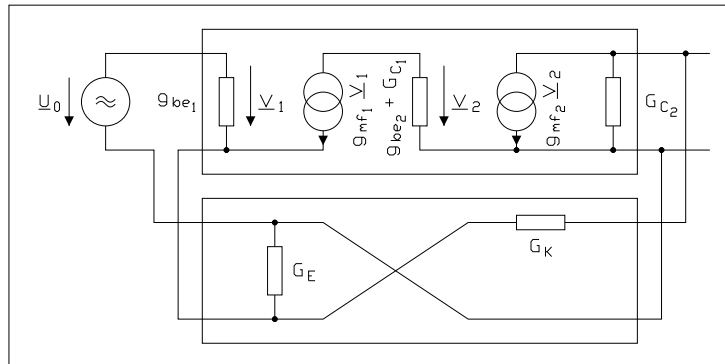


Abb. 68: Kleinsignalmodell der Wechselstromersatzschaltung nach Abb. (67)

$$\underline{\mathbf{H}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{be1}} & 0 & 0 \\ -\frac{g_{m1}g_{m2}}{g_{be1}(g_{be2} + G_{C1})} & G_{C2} & 0 \\ \frac{g_{m1}}{g_{be1}} \left(1 + \frac{g_{m2}}{g_{be2} + G_{C1}} \right) & -G_{C2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{H}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & G_K & -G_K \\ -1 & 0 & -G_E \end{bmatrix}.$$

Hieraus erhalten wir die resultierende Vierpolmatrix:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{be1}} & 0 & 1 \\ -\frac{g_{m1}g_{m2}}{g_{be1}(g_{be2} + G_{C1})} & G_K + G_{C2} & -G_K \\ \frac{g_{m1}}{g_{be1}} \left(1 + \frac{g_{m2}}{g_{be2} + G_{C1}} \right) + 1 & -G_{C2} & -G_E \end{bmatrix}.$$

Bei Abschluss mit einem Tor gilt Gl. (227) und die 3x3 Matrix läßt sich reduzieren. Die Reduktion (Elimination von $\underline{U}_3^{(i)}$) zur 2x2 - Matrix ergibt:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{be1}} + \frac{g_{m1}/g_{be1} + 1}{G_E + G_K} & \frac{G_K}{G_E + G_K} \\ -\frac{g_{m1}g_{m2}}{g_{be1}(g_{be2} + G_{C1})} - \frac{G_K}{G_E + G_K} \left(\frac{g_{m1}}{g_{be1}} + 1 \right) & G_{C2} + \frac{G_E G_K}{G_E + G_K} \end{bmatrix}.$$

Die Spannungsverstärkung \underline{V}_u ist gegeben durch $\underline{G}_{21} = -\underline{H}_{21}/\det[\mathbf{H}]$. Mit der Definition

$$\underline{V}'_u := \frac{\beta_1 \left(\frac{g_{m2}}{g_{be2} + G_{C1}} + \frac{G_K}{G_E + G_K} \right)}{\frac{1}{g_{be1}} \left(G_{C2} + \frac{G_E G_K}{G_E + G_K} \right) + \frac{\beta_1 G_{C2}}{G_E + G_K} + \frac{\beta_1 G_E G_K}{(G_E + G_K)^2}}$$

erhalten wir

$$\underline{V}_u = \frac{\underline{V}'_u}{1 + (G_K/(G_E + G_K))\underline{V}'_u}, \quad \text{und unter der Bedingung } \frac{G_K}{G_E + G_K} |\underline{V}'_u| \gg 1$$

gilt die Näherung

$$\underline{V}_u = \frac{G_E + G_K}{G_K} = \frac{R_E + R_K}{R_E}.$$

Aus der Dimensionierungstabelle kann man ersehen, daß die für die Näherung angegebene Bedingung für $|V_u| = 40\text{dB}$ nicht mehr erfüllt ist.

Beachten: \underline{V}'_u ist nicht allein durch die obere Teilstruktur festgelegt, sondern durch das Rückkopplungsnetzwerk wesentlich mitbestimmt.