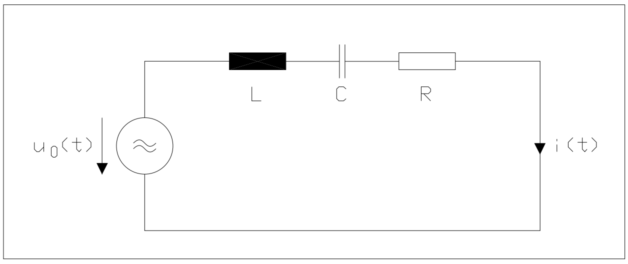
Beispiel 1: Serien - Schwingkreis.



Vorausgesetzt wird: $u_0(t) = 0$ für $t < 0$, $u_c(0) = 0$, $i(0) = 0$.
$i(t)$ ergibt sich aus der Lösung von

$$u_0(t) = L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + Ri(t) \ .$$

Die Transformation in den Spektralbereich ergibt:

$$U_0(s) = sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s) + RI(s) \ ,$$

woraus folgt

$$\frac{I(s)}{U_0(s)} = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1} \ .$$

Mit endlichen Anfangswerten ergibt sich:

$$I(s) = \frac{s\left(CU_0(s) + LCi(0)\right) - Cu_c(0)}{s^2LC + sRC + 1} \ .$$

Mit $U_0(s) = U_0 = \text{const.}$ erhalten wir

$$I(s) = \frac{U_0}{L}\frac{s}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{U_0}{L(s_1 - s_2)}\left(\frac{s_1}{s - s_1} - \frac{s_2}{s - s_2}\right)$$

mit

$$s_{1,2} = -\frac{R}{L} \pm \left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Es wird nun noch die Rücktransformation durchgeführt. Falls $s_1 \neq s_2$ gilt, ergibt sich

$$i(t) = \frac{U_0}{(s_1 - s_2)L}\left(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}\right) \ ,$$

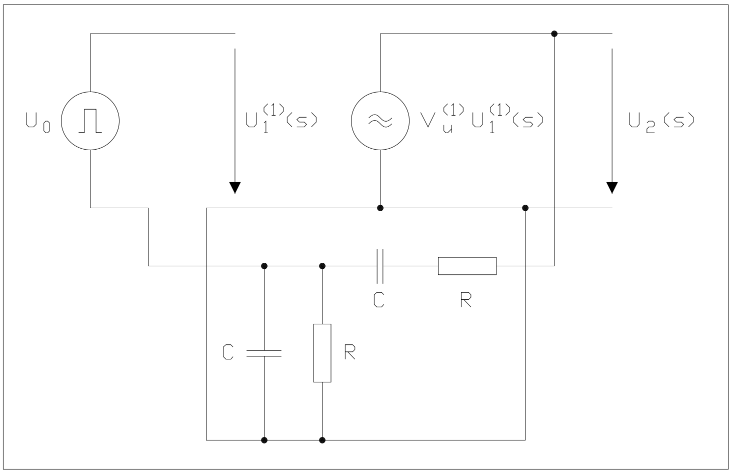
und speziell für $s_{1,2} = \sigma_0 \pm j\omega_0$, also $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$:

$$i(t) = \frac{U_0 \mathrm{e}^{\sigma_0 t}}{\omega_0 L}(\sigma_0 \sin\omega_0 t + \omega_0 \cos\omega_0 t)$$

$$i(t) = \frac{U_0({\sigma_0}^2 + {\omega_0}^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\sigma_0 t}}{\omega_0 L} \cos(\omega_0 t - \arctan\frac{\sigma_0}{\omega_0})$$

falls $s_1 = s_2 = \sigma_0$ gilt, ergibt sich $i(t) = \frac{U_0}{L}(1 + \sigma_0 t)\mathrm{e}^{\sigma_0 t}$.

Beispiel 2: Serien - Parallel - Kopplung einer spannungsgesteuerten Spannungsquelle mit einem RC - Netzwerk.



Es gilt (vergleiche Gleichung (177)):

$$U_2(s) = \frac{V_U^{(1)} U_0(s)}{1 - H_{12}^{(2)} V_U^{(1)}} \quad \text{und mit} \quad H_{12}^{(2)} = \frac{sRC}{s^2R^2C^2 + 3sRC + 1} :$$

$$U_2(s) = \frac{V_U^{(1)}(s^2R^2C^2 + 3sRC + 1)}{s^2R^2C^2 + sRC(3 - V_u^{(1)}) + 1} U_0(s) \; .$$

Die Nullstellen des Nenners sind gegeben durch

$$s_{1,2} = -\frac{3 - V_U^{(1)}}{2RC} \pm \left(\left(\frac{3 - V_U^{(1)}}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{R^2C^2}\right)^{\frac{1}{2}} \; .$$

In Abhängigkeit von der Spannungsverstärkung $V_U^{(1)}$, die als reell und konstant vorausgesetzt wird, ergibt sich für

a) $V_U^{(1)} \leq 1$:

$s_{1,2} = \sigma_{1,2} \quad \mathit{mit} \quad \sigma_1 < 0 \quad \mathit{und} \quad \sigma_2 < 0,$

b) $1 \leq V_U^{(1)} < 3$:

$s_{1,2} = \sigma_0 \pm j\omega_0 \quad \mathit{mit} \quad \sigma_0 < 0,$

c) $V_U^{(1)} = 3$:

$s_{1,2} = \pm j\omega_0 \quad \mathit{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC},$

d) $3 \leq V_U^{(1)} < 5$:

$s_{1,2} = \sigma_0 \pm j\omega_0 \quad \mathit{mit} \quad \sigma_0 > 0,$

e) $V_U^{(1)} \geq 5$:

$s_{1,2} = \sigma_{1,2} \quad \mathit{mit} \quad \sigma_1 > 0 \quad \mathit{und} \quad \sigma_2 > 0.$

In der folgenden Abbildung ist das Wurzelort - Diagramm dargestellt; die eingeklammerten Zahlen sind die Werte für $V_U^{(1)}$.