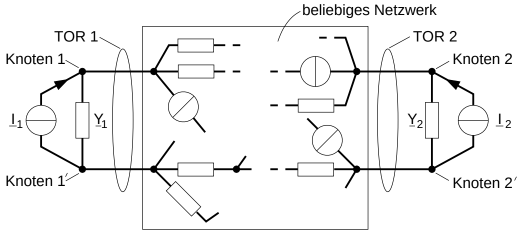
Kurze Wiederhohlung der Zweitor-Theorie

1. Für jedes beliebige[1] Netzwerk läßt sich der Zusammenhang zwischen den darin herrschenden Spannungen und Strömen z.B. mit Hilfe der Knotenspannungsanalyse (Knotenpotentialverfahren) beschreiben (vgl. Skript S. 9 *ff.*) :

$$\underbrace{[\underline{I}]}_{\text{Vektor der Quellströme}} = \underbrace{[\underline{Y}]}_{\text{Knotenadmittanzmatrix}} \cdot \underbrace{[\underline{U}]}_{\text{Vektor der Knotenpotentiale}}$$

2. Wir betrachten im Folgenden den Sonderfall von Netzwerken mit einem Eingangs- und einem Ausgangstor (Indizes 1 und 2). Ein Tor besteht aus zwei Anschlüssen, die jeweils als Teil eines Knotens aufgefaßt werden können.



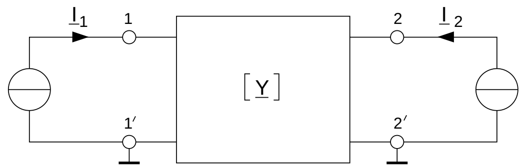
3. $(\underline{I}_1, \underline{Y}_1)$ und $(\underline{I}_2, \underline{Y}_2)$ sind die im allgemeinsten Fall möglichen Quellströme und Zweigadmittanzen zwischen dem Knotenpaar 1,1', das das Eingangstor bildet und dem Knotenpaar 2,2', das das Ausgangstor bildet.

4. Wir betrachten im Folgenden ausschließlich Netzwerke, in denen keine Quellspannungen- oder Quellströme enthalten sind. Gesteuerte Spannungs- oder Stromquellen im Netzwerk sind weiterhin möglich. Weiterhin verschieben wir die Zweigadmittanzen $\underline{Y}_1$ und $\underline{Y}_2$ von außerhalb der beiden Tore in das Netzwerk.

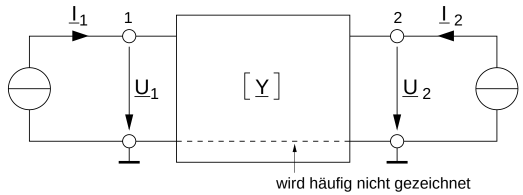
   Beachten: Durch die Verschiebung ändern sich weder Zweigströme noch Knotenpotentiale. Es ändert sich nur formal die Zuordnung, was innerhalb bzw. ausserhalb des Netzwerks liegt.

[1]Voraussetzungen: linear, monofrequent

5. Das Netzwerk mit den darin enthaltenen Zweigadmittanzen $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2$ soll die Knotenadmittanzmatrix $[\underline{Y}]$ haben.
   Dann läßt sich die Gesamtschaltung wie folgt darstellen:



6. Zur Vereinfachung der Überlegung (nicht zwingend notwendig) wollen wir annehmen, dass die Knoten 1' und 2' identisch sind und diesen Knoten als Bezugsknoten (Potential = 0) definieren. Dieser Fall ist i.d. Praxis häufig erfüllt. Es ergibt sich dann die Gesamtschaltung



7. Das Gleichungssystem für dieses Netzwerk lautet

$$[\ \underline{Y}\ ] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \vdots \\ \underline{U}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

   wobei wir die Anzahl aller unabhängigen Knoten des Netzwerks mit N bezeichnet haben. Knoten 1 und 2 sind davon die Knoten, die das Netzwerk mit dem Ein- und Ausgangstor gemeinsam hat. $[\underline{Y}]$ ist eine $N \times N$ Matrix.

8. Die Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe der Cramerschen Regel und dem Laplace'schen Entwicklungssatz (vgl. Skrip S. 11) ergibt für die Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ an den Ein-/Ausgangstoren

$$\underline{U}_1 = \frac{\sum_{n=1}^{N} D_{n1}\, \underline{I}_n}{Det([\underline{Y}])} = \frac{D_{11}\, \underline{I}_1}{Det([\underline{Y}])} + \frac{D_{21}\, \underline{I}_2}{Det([\underline{Y}])}$$
$$\underline{U}_2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} D_{n2}\, \underline{I}_n}{Det([\underline{Y}])} = \frac{D_{12}\, \underline{I}_1}{Det([\underline{Y}])} + \frac{D_{22}\, \underline{I}_2}{Det([\underline{Y}])}$$

Die anderen Glieder der Summe von $n = 3 \dots N$ sind Null, da nur die Quellströme an den Toren 1 und 2 existieren.

9. Mit der Definition (Abkürzung)

$$\underline{Z}_{11} := \frac{D_{11}}{Det([\underline{Y}])} \qquad \underline{Z}_{12} := \frac{D_{21}}{Det([\underline{Y}])}$$
$$\underline{Z}_{21} := \frac{D_{12}}{Det([\underline{Y}])} \qquad \underline{Z}_{22} := \frac{D_{22}}{Det([\underline{Y}])},$$

lässt sich das Gleichungssystem kürzer schreiben:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\, \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\, \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2,$$

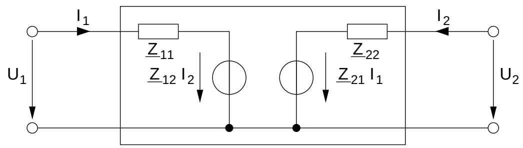
bzw.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\ \underline{Z}\ ] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Das sind die Matrizengleichungen der $\underline{Z}$-Parameter

$$[\ \underline{Z}\ ] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}.$$

10. Die Matrizengleichung der $\underline{Z}$-Parameter lassen sich äquivalent in einem Ersatzschaltbild darstellen:



Darin kann $\underline{Z}_{11}$, $\underline{Z}_{22}$ anschaulich als Eingangs- bzw. Ausgangsimpedanz interpretiert werden, die sich bei Leerlauf des Aus- bzw Eingangs ergeben:

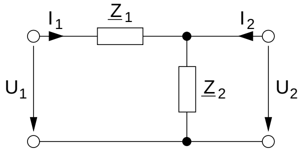
$$\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}, \quad \underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0}$$

$\underline{Z}_{21}$ und $\underline{Z}_{12}$ sind die Vorwärts- bzw Rückwärtsverstärkung, die die Fähigkeit des Zweitors beschreiben, aus einem Strom in eines der Tore eine Spannung am jeweils anderen Tor zu erzeugen. Dabei befindet sich das Tor, an dem die Spannung erzeugt wird, im Leerlauf:

$$\underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0}, \quad \underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}$$

11. Anstelle einer Berechnung über Determinate und Adjunkte der Knotenadmittanzmatrix können die vier Definitionsgleichungen direkt zur Bestimmung der $\underline{Z}$-Parameter verwendet werden.

Beispiel



$$\left.\begin{array}{ll} \underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} & = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} & = \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} & = \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} & = \underline{Z}_2 \end{array}\right\} [\ \underline{Z}\ ] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$$

Anstelle der Schaltung mit $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ (oben) könnte auch mit der Zweitorersatzschaltung von Punkt 10) gearbeitet werden. Diese ist völlig äquivalent, macht jedoch bei dem einfachen Beispielnetzwerk aus $\underline{Z}_1$ $\underline{Z}_2$, keinen Sinn, da komplizierter.