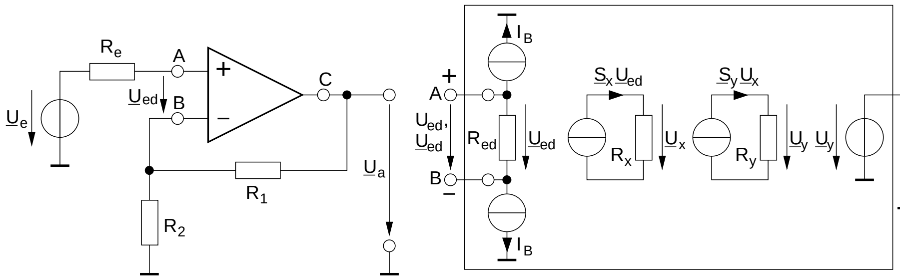
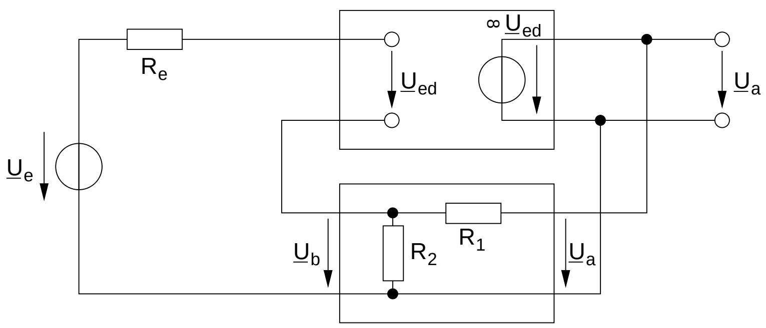
Aufgabe A) Lösung zum Rechnen mit dem realen Operationsverstärker

1.



$$
\begin{aligned}
v_0 &= \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_y} \cdot \frac{\underline{U}_y}{\underline{U}_x} \cdot \frac{\underline{U}_x}{\underline{U}_{ed}} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_{ed}} \\
&= 1 \cdot S_y R_y \cdot S_x R_x = 100 \text{ mS} \cdot 10 \text{ k}\Omega \cdot 10 \text{ mS} \cdot 100 \text{ k}\Omega \\
&= 1000 \cdot 1000 = 10^6
\end{aligned}
$$

2. Schaltung:

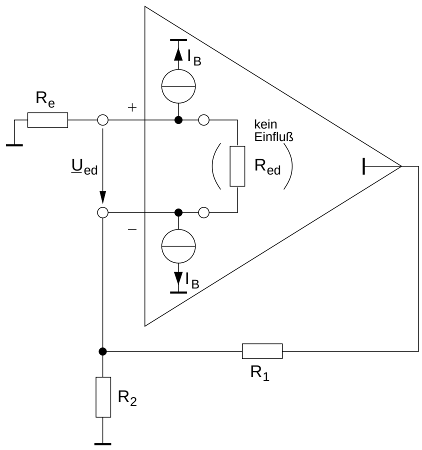


$$
\underline{F}_2 = \frac{\underline{U}_b}{\underline{U}_a} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ ; \quad \underline{F}_a \to \infty
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \ \underline{F} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} &= \frac{\underline{F}_a}{1 + \underline{F}_a \cdot \underline{F}_2} = \frac{1}{\underline{F}_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \\
&= 1 + \frac{R_1}{R_2} = 10 \quad \text{(Forderung)}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \ \frac{R_1}{R_2} = 9
$$

Randbedingung: $\underline{U}_{ed} = 0$, wenn $\underline{U}_e = 0$



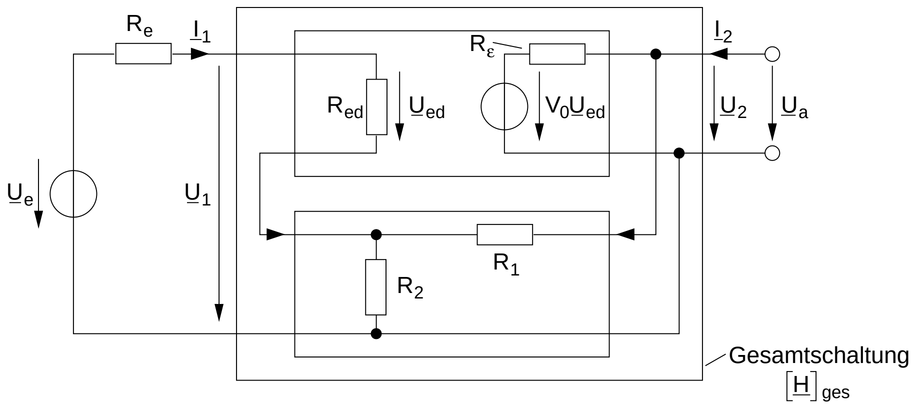
$\Rightarrow$ gleiche Widerstände an beiden Eingängen

$\Rightarrow R_1||R_2 = R_e = 50\ \text{k}\Omega$

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = \frac{R_1}{10} \stackrel{!}{=} R_e \Leftrightarrow\ R_1 = 10 \cdot R_e = 500\ \text{k}\Omega$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 9 \Leftrightarrow\ R_2 = \frac{R_1}{9} = \frac{500\ \text{k}\Omega}{9} \approx 56\ \text{k}\Omega$$

3.



Geeignete Parameter: $\underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\,\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\,\underline{U}_2$

$\underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\,\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\,\underline{U}_2$

R_ε ist Hilfswiderstand, da sonst $[\underline{\mathbf{H}}]_a$ Matrix nicht existiert (Einträge ∞).

$$[\underline{\mathbf{H}}]_a = \begin{bmatrix} R_{ed} & 0 \\ -\frac{R_{ed}\cdot v_0}{R_\varepsilon} & \frac{1}{R_\varepsilon} \end{bmatrix} \qquad \underline{I}_2 = -\frac{\underline{I}_1\cdot R_{ed}\cdot v_0}{R_\varepsilon}$$

$$[\underline{\mathbf{H}}]_2 = \begin{bmatrix} R_1||R_2 & \frac{R_2}{R_1+R_2} \\ \frac{-R_2}{R_1+R_2} & \frac{1}{R_1+R_2} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{\mathbf{H}}]_{ges} = [\underline{\mathbf{H}}]_a + [\underline{\mathbf{H}}]_2 = \begin{bmatrix} R_{ed} + R_1||R_2 & \frac{R_2}{R_1+R_2} \\ -\frac{R_{ed}\cdot v_0}{R_\varepsilon} - \frac{R_2}{R_1+R_2} & \frac{1}{R_\varepsilon} + \frac{1}{R_1+R_2} \end{bmatrix}$$

Bestimme $\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ bei $\underline{I}_2 = 0$ (Leerlauf am Ausgang)

nicht $\underline{U}_e$! ↗

$$\underline{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \underline{H}_{21}\,\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\,\underline{U}_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = -\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}}\,\underline{U}_2$$

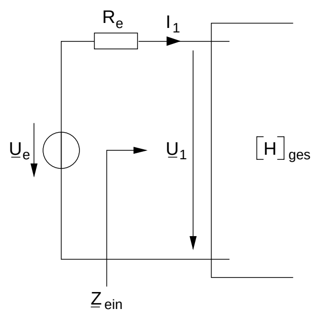
$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\overbrace{\left(-\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}}\,\underline{U}_2\right)}^{\underline{I}_1} + \underline{H}_{21}\,\underline{U}_2 \\
&= \left(-\frac{\underline{H}_{11}\,\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} + \underline{H}_{12}\right)\underline{U}_2 \\
\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= \frac{1}{\underline{H}_{12} - \frac{\underline{H}_{11}\,\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}}} = \frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{12}\,\underline{H}_{21} - \underline{H}_{11}\,\underline{H}_{22}} \\
&= \frac{-\frac{R_{ed}\,v_0}{R_\varepsilon} - \frac{R_2}{R_1+R_2}}{\underline{H}_{12}\left(-\frac{R_{ed}\,v_0}{R_\varepsilon} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right) - \underline{H}_{11}\left(\frac{1}{R_\varepsilon} + \frac{1}{R_1+R_2}\right)} \\
&= \frac{-R_{ed} - \frac{R_2\,R_\varepsilon}{R_1+R_2}}{\underline{H}_{12}\left(-R_{ed}\,v_0 - \frac{R_2\,R_\varepsilon}{R_1+R_2}\right) - \underline{H}_{11}\left(1 + \frac{R_\varepsilon}{R_1+R_2}\right)}
\end{aligned}$$

$R_\varepsilon \to 0$ (Grenzübergang zur idealen $[\underline{\mathbf{H}}]_a$ Matrix)

$$\Rightarrow \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_{ed}\, v_0}{\underline{H}_{12}\, R_{ed}\, v_0 + \underline{H}_{11}}$$
$$= \frac{R_{ed}\, v_0}{\frac{R_2}{R_1+R_2}\, R_{ed}\, v_0 + R_{ed} + \frac{R_1\, R_2}{R_1+R_2}}$$
$$= \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \underbrace{\frac{R_{ed}\, v_0}{R_{ed}\, v_0 + \frac{R_1+R_2}{R_2}\, R_{ed} + R_1}}_{\text{Änderung } \Delta}$$

$$\Delta = \frac{10^6\ \Omega \cdot 10^6}{10^{12}\ \Omega + 10 \cdot 10^6\ \Omega + 0,5 \cdot 10^6\ \Omega} = \frac{10^{12}}{10^{12} + 10,5 \cdot 10^6}$$
$$\approx 1 - \underbrace{10,5 \cdot 10^{-6}}_{\text{vernachlässigbar!}}$$

Bestimme $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_{ein}}{R_e + \underline{Z}_{ein}}$



$$\underline{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_2 = -\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}}\, \underline{I}_1$$

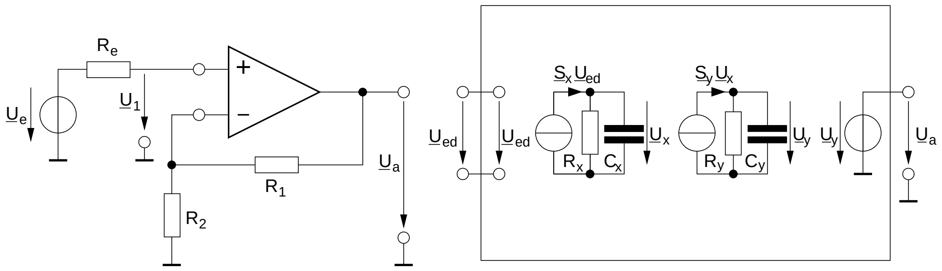
$$\Rightarrow \quad \underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\, \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \left(-\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} \right) \underline{I}_1$$
$$= \left(\underline{H}_{11} - \frac{\underline{H}_{12}\, \underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} \right) \underline{I}_1$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{ein} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = R_{ed} + R_1 \| R_2 - \frac{R_2 \left(-\frac{R_{ed}\, v_0}{R_\varepsilon} - \frac{R_2}{R_1+R_2} \right)}{(R_1 + R_2) \left(\frac{1}{R_\varepsilon} + \frac{1}{R_1+R_2} \right)}$$

$R_\varepsilon \to 0$ (Grenzübergang zur idealen $[\underline{\mathbf{H}}]_a$ Matrix)

$$\Rightarrow \underline{Z}_{ein} = R_{ed} + R_1 \| R_2 + \frac{R_2\, R_{ed}\, v_0}{(R_1 + R_2)}$$
$$= 1\ \mathrm{M\Omega} + 50\ \mathrm{k\Omega} + \frac{1}{10}\, 1\ \mathrm{M\Omega} \cdot 10^6$$
$$\approx 10^5\ \mathrm{M\Omega}$$
$$\Rightarrow \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_e} = \frac{10^5\ \mathrm{M\Omega}}{50\ \mathrm{k\Omega} + 10^5\ \mathrm{M\Omega}} \approx 1$$

4.



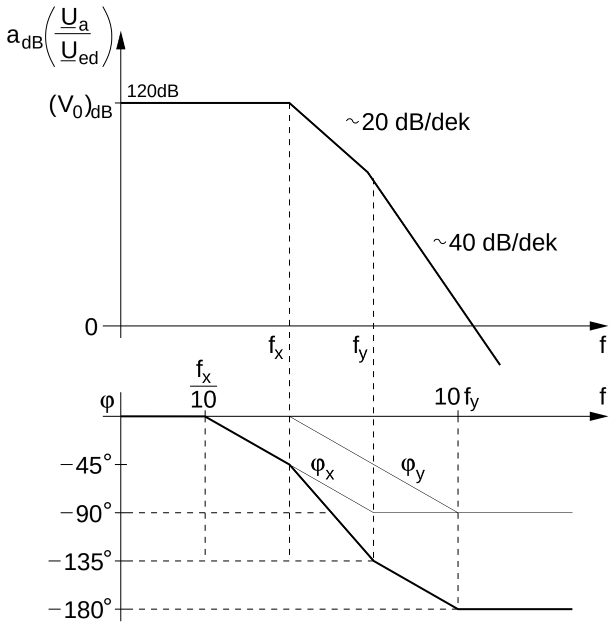
$$\underline{F}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_{ed}} = \frac{\underline{U}_y}{\underline{U}_x} \cdot \frac{\underline{U}_x}{\underline{U}_{ed}}$$
$$\underline{U}_x = S_x\, \underline{U}_{ed} \cdot \frac{R_x}{1 + j\omega\, R_x\, C_x}$$
$$\frac{\underline{U}_x}{\underline{U}_{ed}} = \frac{S_x\, R_x}{1 + j\omega\, R_x\, C_x} \quad , \quad R_x\, C_x = \frac{1}{\omega_x}$$
$$f_x = 100\ \mathrm{kHz}$$

entsprechend:

$$\frac{\underline{U}_y}{\underline{U}_x} = \frac{S_y\, R_y}{1 + j\omega\, R_y\, C_y} \quad , \quad R_y\, C_y = \frac{1}{\omega_y}$$
$$f_y = 1\ \mathrm{MHz}$$

$$\underline{F}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_{ed}} = \frac{\overbrace{S_x\, R_x \cdot S_y\, R_y}^{v_0}}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_x}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_y}\right)} = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_x}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_y}\right)}$$

Bode-Diagramm:



5. - Unterscheidung zwischen $\underline{U}_e$ und $\underline{U}_1$ nicht notwendig, da $\underline{U}_e = \underline{U}_1$ wegen $R_{ed} \to \infty$.

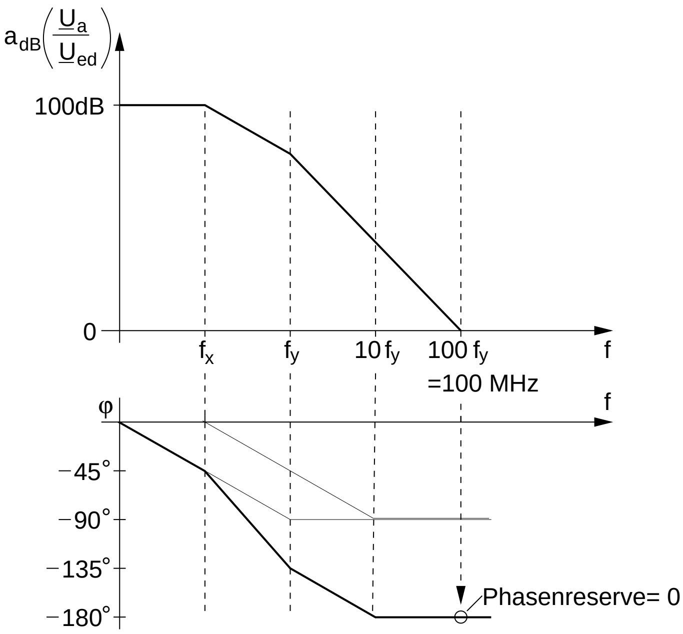
- $\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{F}_a}{1+\underline{F}_a\,\underline{F}_2}$ mit $\underline{F}_a = \frac{v_0}{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_x}\right)\left(1+\frac{j\omega}{\omega_y}\right)}$; $\underline{F}_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}$

- Schleifenverstärkung: $\underline{F}_a \cdot \underline{F}_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{v_0}{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_x}\right)\left(1+\frac{j\omega}{\omega_y}\right)}$

$\Rightarrow$ logarithmisch:

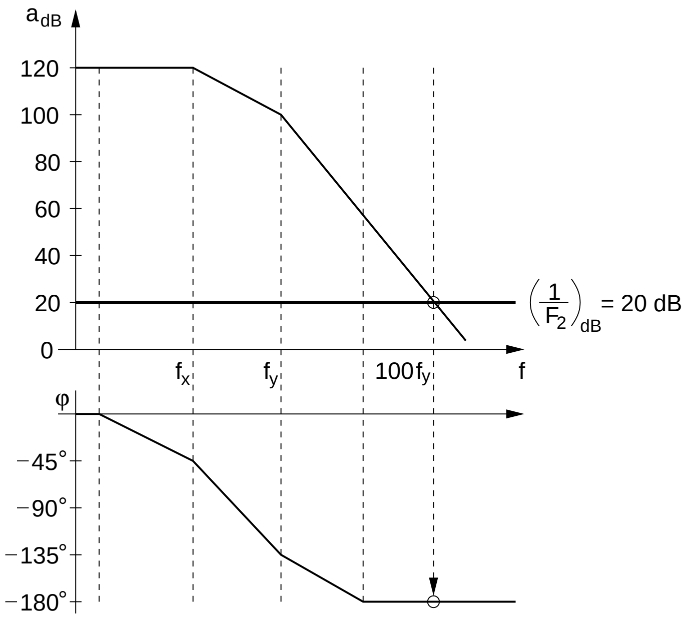
$$(\underline{F}_a \cdot \underline{F}_2)_{\text{dB}} = \underbrace{\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)_{\text{dB}}}_{(\frac{1}{10})_{\text{dB}}=-20\text{dB}} + \underbrace{\left(\frac{v_0}{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_x}\right)\left(1+\frac{j\omega}{\omega_y}\right)}\right)_{dB}}_{\text{bereits gezeichnet}}$$

d.h. im Bode-Diagramm wird der Betragsverlauf um 20 dB nach unten verschoben, die Phase bleibt erhalten.



6. Aus obiger Abbildung bestimmt man die Durchtrittsfrequenz zu $f = 100 \cdot f_y = 100\text{MHz}$.
   Die Phasenreserve beträgt $180° - 180° = 0°$.

7.



8. Aus der Abbildung zu Aufgabenteil 7 bestimmt sich die Durchtrittsfrequenz als Schnittpunkt der OP-Verstärkung mit der inversen Rückführungsverstärkung zu $f = 100 \cdot f_y = 100$ MHz. Die Phasenreserve ist identisch, da dieselbe Schaltung betrachtet wird.
   Problematisch, da Betrieb auf der Stabilitätsgrenze. Kleinste Abweichungen (z.B. Toleranzen) führen zu Instabilitäten. Ebenfalls nachteilig ist: die Sprungfunktionen haben eine unendliche Nachschwingdauer, da sie nicht gedämpft werden (Pole auf der imaginären Achse).

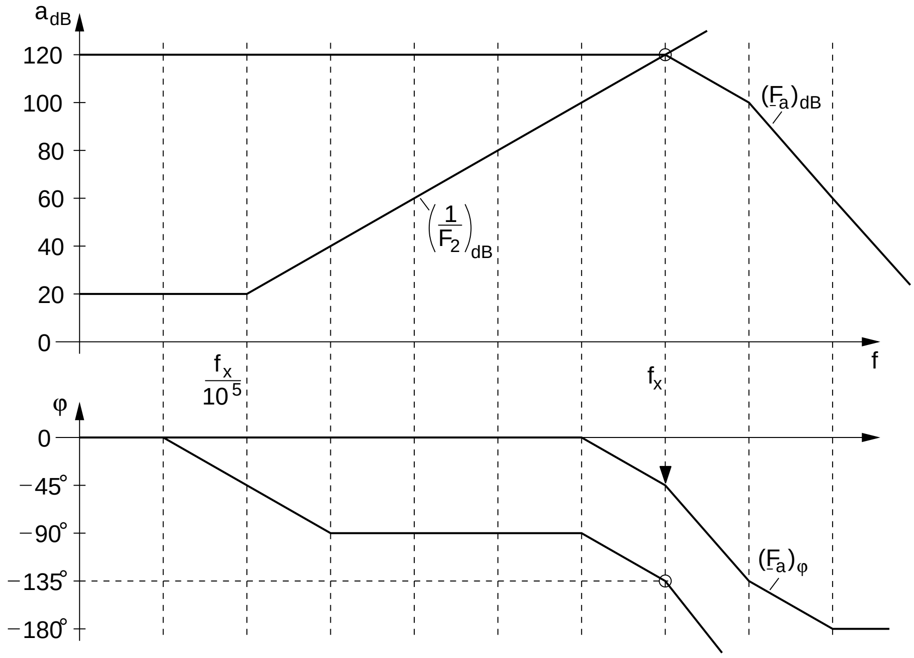
9. Bode-Diagramm für OP-Verstärkung bleibt, Frequenzgang des Rückkoppelnetzwerks ist jetzt

$$\Rightarrow \underline{F}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{R_1 + \underline{Z}_2} \quad ; \quad \underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega\, R_2\, C_p}$$

$$\Rightarrow \underline{F}_2 = \frac{1}{\frac{R_1}{\underline{Z}_2} + 1} = \frac{1}{\frac{R_1(1+j\omega\, R_2\, C_p)}{R_2} + 1}$$

$$= \frac{R_2}{R_2 + R_1 + j\omega\, R_1\, R_2\, C_p} = \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}_{\frac{1}{10}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\, C_p \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}}$$

d.h. 1-pol. Tiefpass, der in der $\left(\frac{1}{\underline{F}_2}\right)_{\mathrm{dB}}$ Darstellung wie ein 1-pol. Hochpass ansteigt.
Eckfrequenz: $\omega_p = \dfrac{1}{C_p \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$



$\underline{F}_2$ dreht die Phase zusätzlich um $-90°$, d.h. bei $f > 10 f_p$ darf die Phasendrehung des OP's ($\underline{F}_a$) nur $-45°$ betragen, damit 45° Phasenreserve verbleiben $\Rightarrow$ Schnittpunkt muss bei f_x liegen.

$$\Rightarrow \frac{1}{C_p \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}} = 2\pi \cdot \frac{f_x}{10^5} = 2\pi \cdot 1 \text{ Hz} \quad ; \quad \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_e = 50 \text{ k}\Omega}_{\text{aus Aufgabenteil 2}}$$

$$\Rightarrow C_p = \frac{1}{2\pi \cdot 1 \text{ Hz} \cdot 50 \text{ k}\Omega} \approx 3,2\ \mu\text{F}$$

Entscheidender Nachteil:

Das Rückkoppelnetzwerk ist ein Tiefpass mit Grenzfrequenz 1 Hz. Da der inverse Frequenzgang des Rückkoppelnetzwerks den Grenzfrequenzgang bestimmt, ist dieser nun stark frequenzabhängig (Hochpass mit 1 Hz Grenzfrequenz).

10. Durch vergrößern der internen Kapazität z.B. C_x (Anmerkung: bei manchen OP-Modellen auch durch externe Kapazität möglich) verringert man die Grenzfrequenz f_x so weit, dass die 20-dB-Linie des linearen Rückkopplungsnetzwerks bei f_y geschnitten wird. Daraus resultiert eine Phasendrehung von $-135°$ bei der Durchtrittsfrequenz. Die Phasenreserve bestimmt sich damit zu $-135° + 180° = 45°$ wie unter 9) gefordert wurde.