Universität des Saarlandes
Lehrstuhl für Elektronik und Schaltungstechnik
Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2018
Zusatzübung 9

Aufgabe 1) *Knotenpotentialverfahren, Admittanzmatrizen und Stromquellenvektoren.*

Stellen Sie für die Schaltungen a) und b) aus Abb. 1 und Abb. 2 die Admittanzmatrix und den Stromquellenvektor auf.

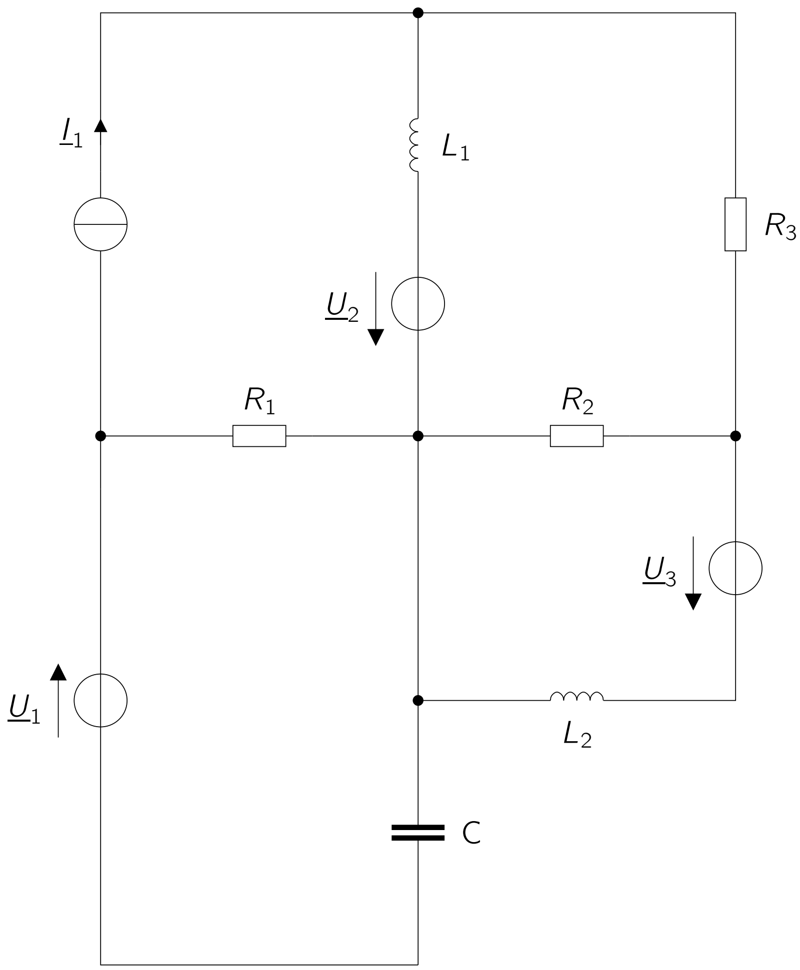

Abbildung 1: Schaltung a).

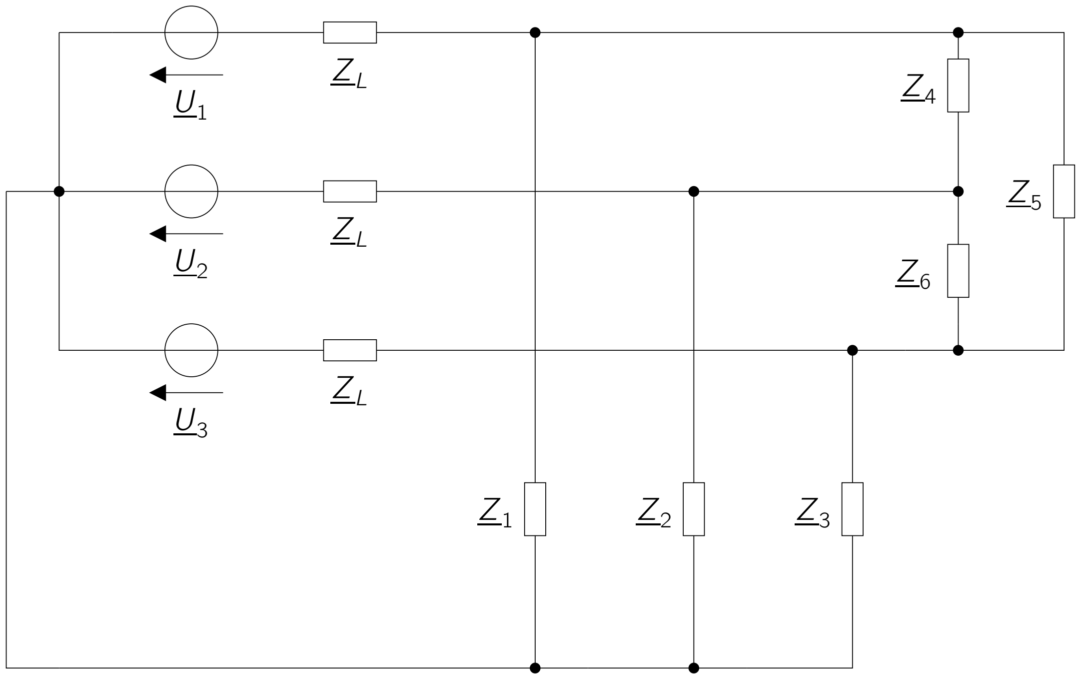

Abbildung 2: Schaltung b).

Lösung Aufgabe 1 a):

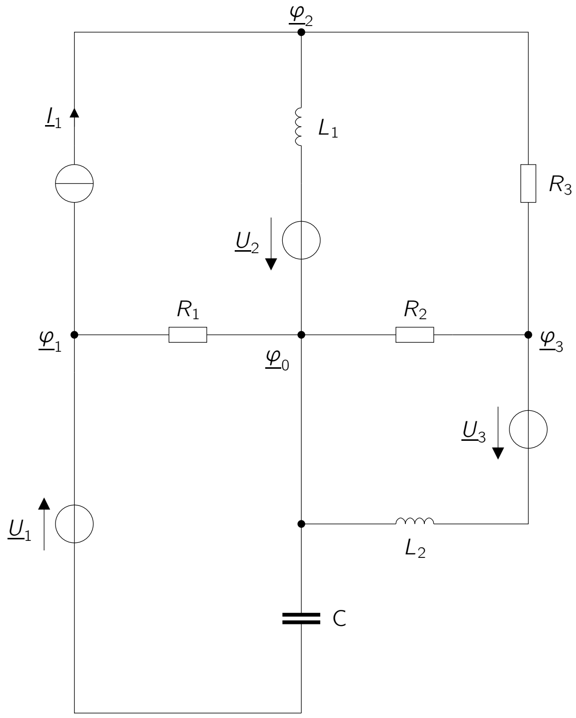

Abbildung 3: Schaltung a) mit Potentialen.

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \mathrm{j}\omega C & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_1} + \frac{1}{R_3} & \frac{-1}{R_3} \\ 0 & \frac{-1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_\mathrm{q} = \begin{pmatrix} -\left(\underline{I}_1 + \underline{U}_1 \mathrm{j}\omega C\right) \\ \underline{I}_1 + \frac{\underline{U}_2}{\mathrm{j}\omega L_1} \\ \frac{\underline{U}_3}{\mathrm{j}\omega L_2} \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 1 b):

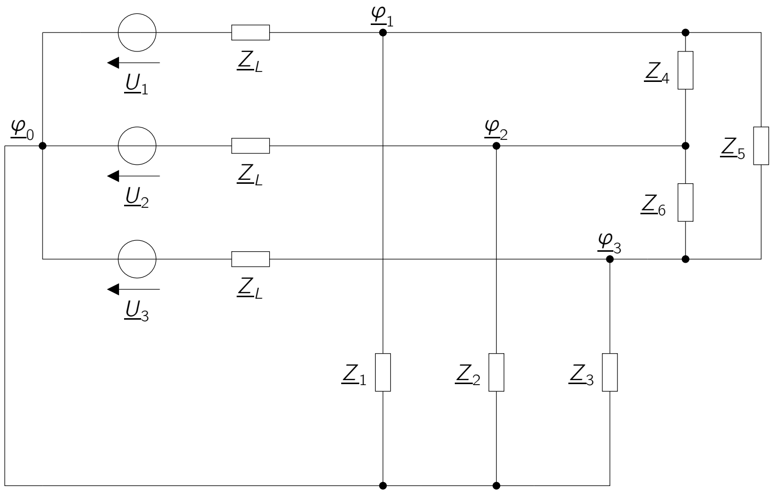

Abbildung 4: Schaltung b) mit Potentialen.

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} Y_L + Y_1 + Y_4 + Y_5 & -Y_4 & -Y_5 \\ -Y_4 & Y_L + Y_2 + Y_4 + Y_6 & -Y_6 \\ -Y_5 & -Y_6 & Y_L + Y_3 + Y_5 + Y_6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_q = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2) *Knotenpotentialverfahren, Admittanzmatrizen und Stromquellenvektoren.*

Stellen Sie für die Schaltung aus Abb. 5 die Admittanzmatrix und den Stromquellenvektor auf. Vereinfachen Sie dazu zuerst das Netzwerk.

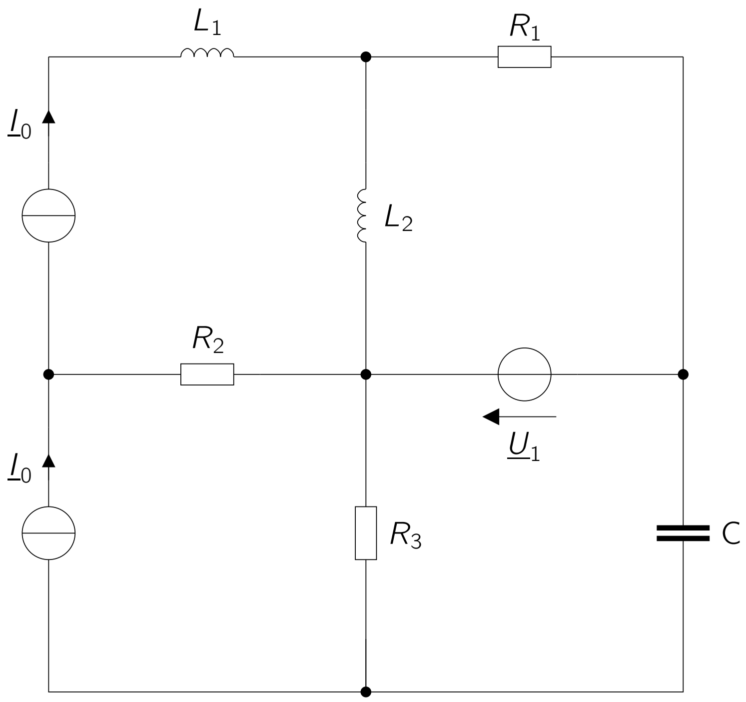

Abbildung 5: Schaltung.

Lösung Aufgabe 2:

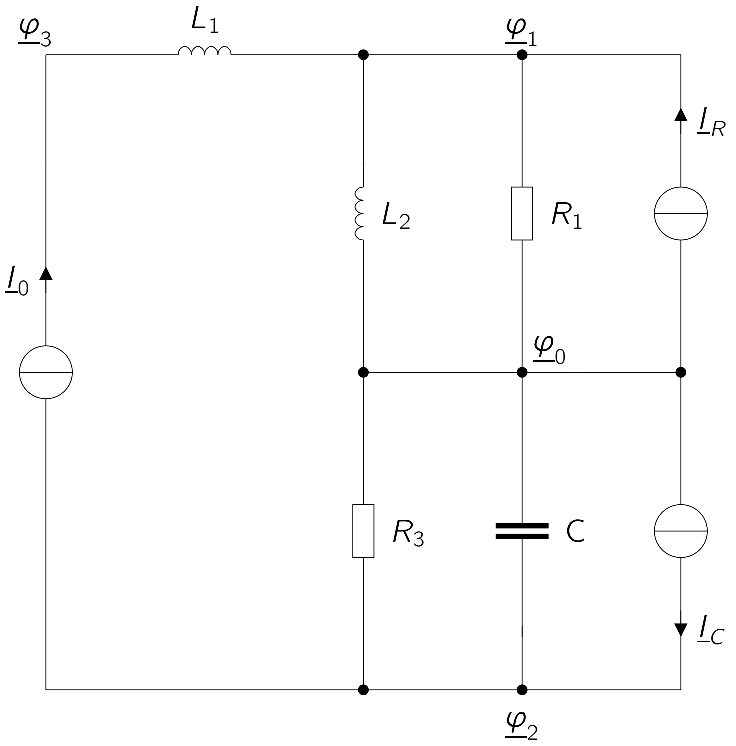

Abbildung 6: Schaltung mit Potentialen.

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} Y_{L1} + Y_{L2} + Y_1 & 0 & -Y_{L1} \\ 0 & Y_{R3} + Y_C & 0 \\ -Y_{L1} & 0 & Y_{L1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_q &= \begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_C - \underline{I}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\underline{U}_1}{R_1} \\ \mathrm{j}\omega C \underline{U}_1 - \underline{I}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3) *Knotenpotentialverfahren.*

Gegeben ist folgendes Netzwerk aus Abb. 7.

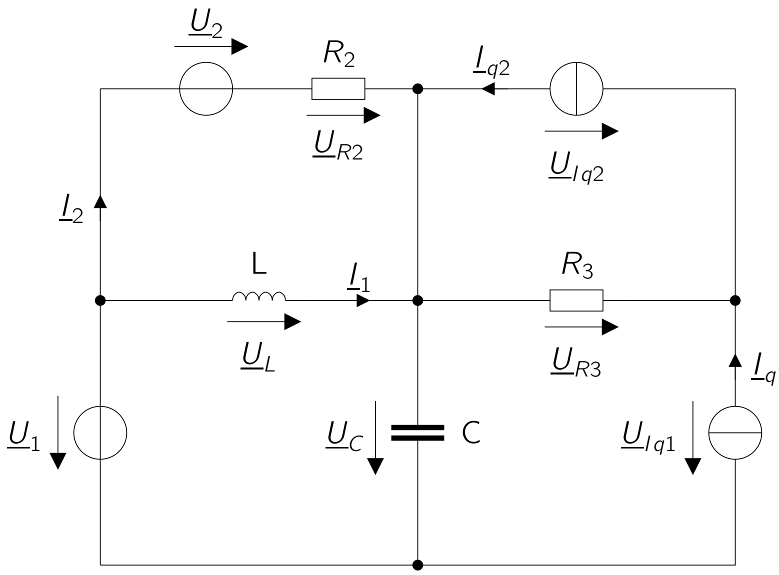

Abbildung 7: Schaltung.

$\underline{U}_1 = 12\,\mathrm{V}$	$\underline{U}_2 = 24\,\mathrm{V}e^{\mathrm{j}20°}$	$\omega = 2\pi 50\,\mathrm{Hz}$	$R_2 = 200\,\Omega$
$R_3 = 80\,\Omega$	$L = 10\,\mathrm{mH}$	$C = 100\,\mu\mathrm{F}$	$\underline{I}_{q1} = 500\,\mathrm{mA}$
$\underline{I}_{q2} = 800\,\mathrm{mA}e^{\mathrm{j}15°}$			

a) Berechnen Sie die Spannungen über allen Impedanzen. Berechnen Sie dazu zunächst alle Knotenpotentiale formal. Setzten Sie erst dann Werte ein. Rechnen Sie mit 4 Nachkommastellen.

b) Berechnen Sie die Spannung über der Stromquelle $\underline{I}_{q1}$.

c) Berechnen Sie die Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$.

Lösung Aufgabe 8.

a) Umformungen des Netzwerks: $\underline{U}' = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = 13{,}3693\,\mathrm{V}e^{-\mathrm{j}142{,}122^\circ}$

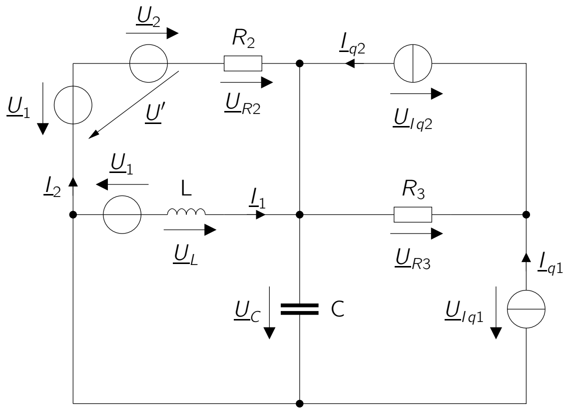

Abbildung 8: Schaltung.

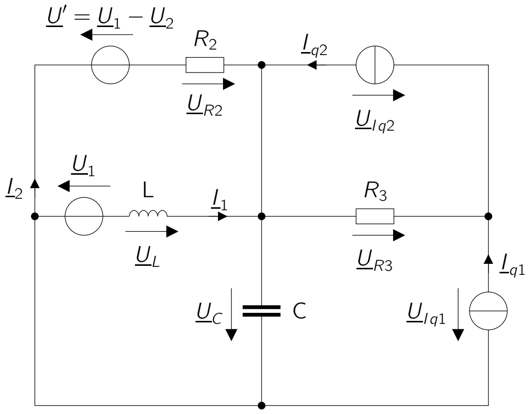

Abbildung 9: Schaltung.

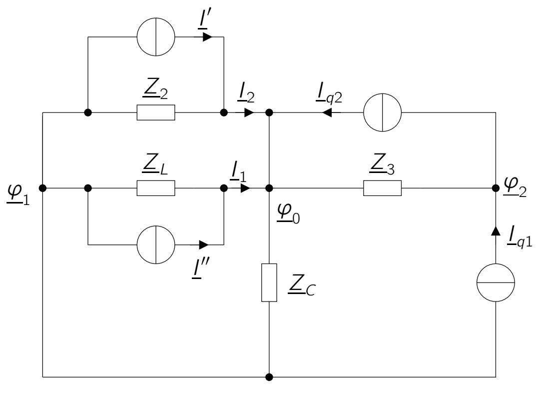

Abbildung 10: Schaltung.

$\underline{I}' = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{R_2} = 66{,}8\,\mathrm{mA}e^{-\mathrm{j}142{,}122^\circ}$

$\underline{I}'' = \frac{\underline{U}_1}{\mathrm{j}\omega L} = 3{,}8197\,\mathrm{A}e^{-\mathrm{j}90^\circ}$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_q = \begin{pmatrix} -\underline{I}' - \underline{I}'' - \underline{I}_{q1} \\ \underline{I}_{q1} - \underline{I}_{q2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{-\mathrm{j}\omega R_2 L}{\mathrm{j}\omega L + R_2 - \omega^2 R_2 L C}(\underline{I}' + \underline{I}'' + \underline{I}_{q1}) \\ R_3(\underline{I}_{q1} - \underline{I}_{q2}) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\varphi} = \begin{pmatrix} 13{,}545\,\mathrm{V}e^{-\mathrm{j}174{,}3901^\circ} \\ 27{,}3945\,\mathrm{V}e^{-\mathrm{j}142{,}7955^\circ} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\varphi}_1 = -\underline{U}_C$$
$$\underline{\varphi}_2 = -\underline{U}_{R3}$$
$$\underline{U}_L = \underline{\varphi}_1 + \underline{U}_1 = 1{,}986\,\mathrm{V}e^{-\mathrm{j}138{,}1849^\circ}$$
$$\underline{U}_{R2} = \underline{\varphi}_1 + \underline{U}' = 25{,}8543\,\mathrm{V}e^{-\mathrm{j}158{,}3643^\circ}$$

b)

$$\underline{U}_{Iq1} = \underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_1 = 17{,}3726\,\mathrm{V}e^{-\mathrm{j}118{,}6864^\circ}$$

c)

$$\underline{I}_l = \underline{I}'' + \frac{\underline{\varphi}_1}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_L}{\mathrm{j}\omega L}$$
$$\underline{I}_l = 632{,}2\,\mathrm{mA}e^{\mathrm{j}131{,}8151^\circ}$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}' + \frac{\underline{\varphi}_1}{R_2} = \frac{\underline{U}_{R2}}{R_2}$$
$$\underline{I}_2 = 129{,}3\,\mathrm{mA}e^{-\mathrm{j}158{,}3643^\circ}$$

Aufgabe 4) *Knotenpotentialverfahren.*

Gegeben ist die Schaltung aus Abb. 11.

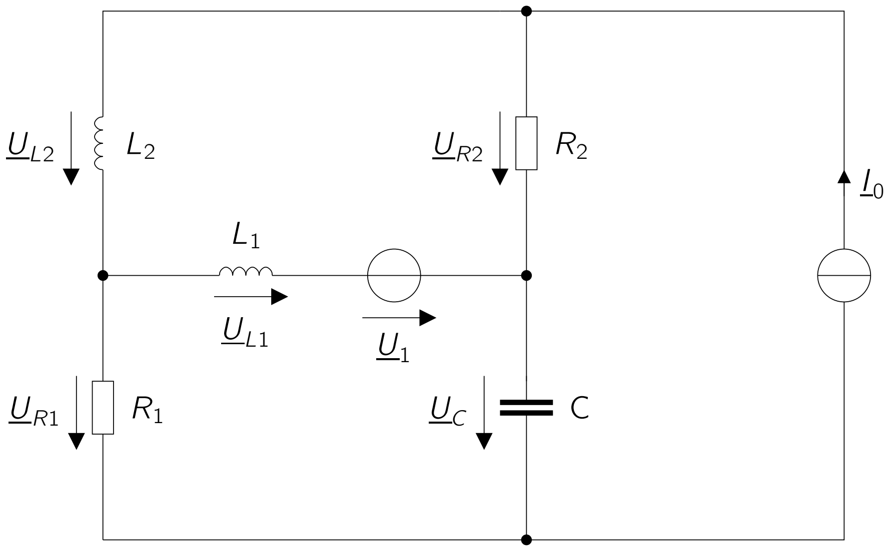

Abbildung 11: Schaltung.

a) Stellen Sie die Admittanzmatrix auf.

b) Stellen Sie den Stromquellenvektor auf.

c) Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_C$.

Lösung Aufgabe 4:

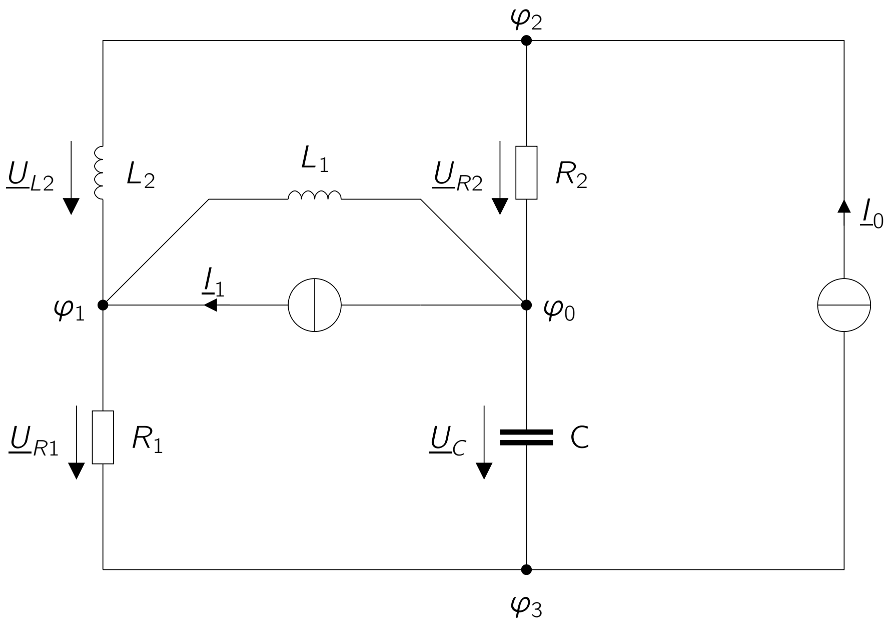

Abbildung 12: Schaltung.

Es gilt: $\underline{U}_C = -\underline{\varphi}_3$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2} & -\frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2} & \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2} + \frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_1} + \mathrm{j}\omega C \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_q = \begin{pmatrix} \frac{\underline{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} \\ \underline{I}_0 \\ -\underline{I}_0 \end{pmatrix}$$

Schreibe abkürzend:

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{12} & -\underline{Y}_{13} \\ -\underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{22} & 0 \\ -\underline{Y}_{13} & 0 & \underline{Y}_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\underline{U}_C = \frac{-[-\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{12}{}^2]\underline{I}_0 - \frac{\underline{Y}_{13}\underline{Y}_{22}}{\mathrm{j}\omega L_1}\underline{U}_1}{[\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}\underline{Y}_{33}] - [\underline{Y}_{22}\underline{Y}_{13}{}^2] - [\underline{Y}_{33}\underline{Y}_{12}{}^2]} \tag{2}$$

Aufgabe 5) *Knotenpotentialverfahren, gekoppelte Induktivitäten.*

Gegeben ist das Netzwerk aus Abb. 13, welches die gekoppelten Induktivitäten L_1, L_2 enthält. Zwischen den Spannungen und den Strömen an den gekoppelten Induktivitäten besteht der Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{j}\omega L_1 & -\mathrm{j}\omega M \\ -\mathrm{j}\omega M & \mathrm{j}\omega L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{I}_{\mathrm{L2}} \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Knotenpotentiale im Netzwerk aus Abbildung 13 auf.

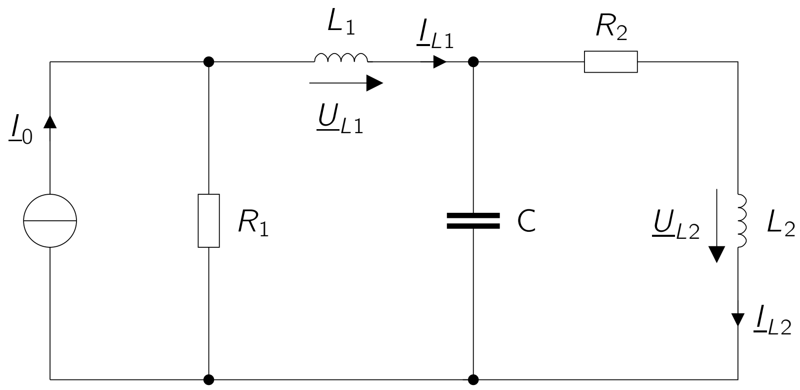

Abbildung 13: Schaltung.

Lösung Aufgabe 5:

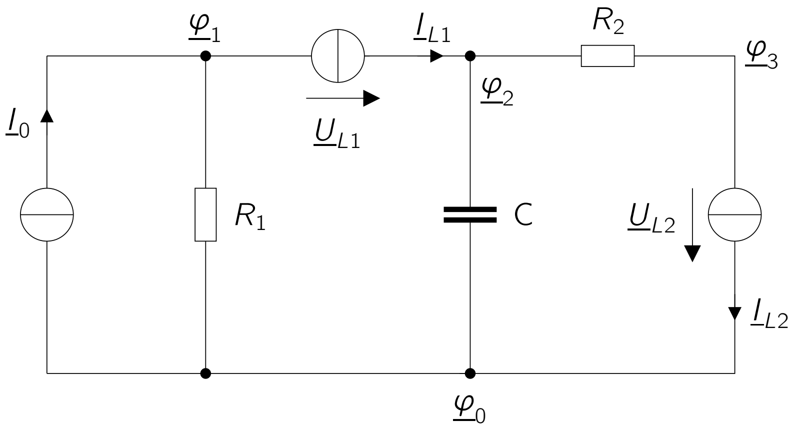

Abbildung 14: Schaltung.

1. Schritt: Wandele alle Induktivitäten in Stromquellen um und bestimme die dazugehörigen konstituierenden Gleichungen. Letztere erhält man mit

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{I}_{\mathrm{L2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{j}\omega L_1 & -\mathrm{j}\omega M \\ -\mathrm{j}\omega M & \mathrm{j}\omega L_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{U}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L2}} \end{pmatrix}$$

Schreibe abkürzend:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{j}\omega L_1 & -\mathrm{j}\omega M \\ -\mathrm{j}\omega M & \mathrm{j}\omega L_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Y_{\mathrm{L11}} & Y_{\mathrm{L12}} \\ Y_{\mathrm{L21}} & Y_{\mathrm{L22}} \end{pmatrix}$$

D.h. man hat nun:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{I}_{\mathrm{L2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{\mathrm{L11}} & Y_{\mathrm{L12}} \\ Y_{\mathrm{L21}} & Y_{\mathrm{L22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L2}} \end{pmatrix} \begin{matrix} a) \\ b) \end{matrix}$$

2. Schritt: Stelle nun, nach dem die Induktivitäten in Stromquellen umgewandelt worden sind, die Admittanzmatrix $[\underline{Y}_{\mathrm{n}}]$ und den Stromquellenvektor $[\underline{I}_{\mathrm{qn}}]$ auf.

3. Schritt: Schreibe den Stromquellenvektor $[\underline{I}_{\mathrm{qn}}]$ als Summe aus einem Vektor $[\underline{I}_0]$, der nur die Quellströme „echter" Stromquellen enthält und einen Vektor $[\underline{I}_{\mathrm{L}}]$ der nur die Ströme der umgewandelten Induktivitäten enthält (nur I_L's) .

$$[\underline{I}_{\mathrm{qn}}] = [\underline{I}_0] + [\underline{I}_{\mathrm{L}}]$$

4. Schritt: Schreibe mit Hilfe der Gleichungen a) und b) aus Schritt 1 den Vektor $[\underline{I}_{\mathrm{L}}]$ so um, dass dieser die Form $[\underline{I}_{\mathrm{L}}] = [\underline{A}] \begin{pmatrix} \underline{U}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L2}} \end{pmatrix}$ hat.

Es gilt nun:

$$[\underline{I}_{\mathrm{qn}}] = [\underline{I}_0] + [\underline{A}] \begin{pmatrix} \underline{U}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L2}} \end{pmatrix}$$

5. Schritt: Drücke die Spannungen über den Induktivitäten in Abhängigkeit der Knotenpotentiale aus.

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L2}} \end{pmatrix} = [\underline{B}] \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

6. Schritt: Setzte den Vektor der Spannungen über den Induktivitäten aus Schritt 5 in die Gleichung aus Schritt 4 ein. Es gilt nun:

$$[\underline{I}_{\mathrm{qn}}] = [\underline{I}_0] + [\underline{A}]\,[\underline{B}] \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

7. Schritt: Führe die Multiplikation der Matrizen $[\underline{A}]$ und $[\underline{B}]$ aus.

$$[\underline{C}] = [\underline{A}]\,[\underline{B}]$$

Es gilt nun:

$$[\underline{I}_{\mathrm{qn}}] = [\underline{I}_0] + [\underline{C}] \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

8. Schritt: Es gilt allgemein:

$$[\underline{I}_{\mathrm{qn}}] = [\underline{Y}_{\mathrm{n}}] \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

9.Schritt: Setzte die Gleichungen mit $[\underline{I}_{\mathrm{qn}}]$ aus Schritt 7 und 8 gleich. Es gilt dann:

$$[\underline{Y}_{\mathrm{n}}] \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{pmatrix} = [\underline{I}_0] + [\underline{C}] \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

10. Schritt: Bringe den Term $[\underline{C}] \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{pmatrix}$ aus der Gleichung aus Schritt 9 auf die andere Seite. Klammere dann $\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{pmatrix}$ aus. Man erhält nun das gesuchte Gleichungssystem:

$$([\underline{Y}_{\mathrm{n}}] - [\underline{C}]) \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{pmatrix} = [\underline{I}_0]$$

Mit den Werten dieser Aufgabe folgt:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \underline{Y}_{L11} & -\underline{Y}_{L11} & \underline{Y}_{L12} \\ -\underline{Y}_{L11} & \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R_2} + \underline{Y}_{L11} & -\frac{1}{R_2} - \underline{Y}_{L12} \\ \underline{Y}_{L21} & -\frac{1}{R_2} - \underline{Y}_{L21} & \frac{1}{R_2} + \underline{Y}_{L22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$