Universität des Saarlandes
Lehrstuhl für Elektronik und Schaltungstechnik

# Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2019

Zusatzübung 11

**Aufgabe 1)** *Schaltvorgänge.*

Gegeben sind die Schaltungen aus Abb. 1. Es sollen die Spannungsverläufe $U_C$, $U_R$ und $U_L$ beim Ein- bzw. Ausschalten der Spannungsquelle $U_0$ bestimmt werden.

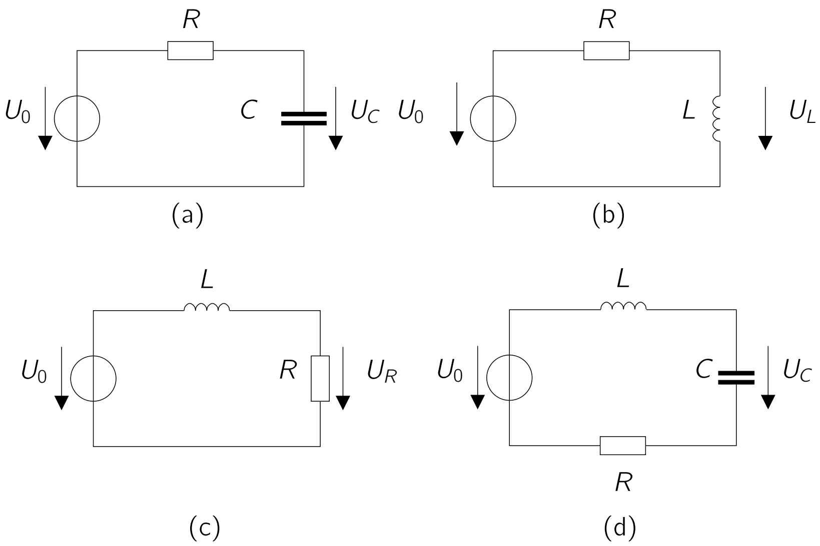


Abbildung 1: Schaltungen.

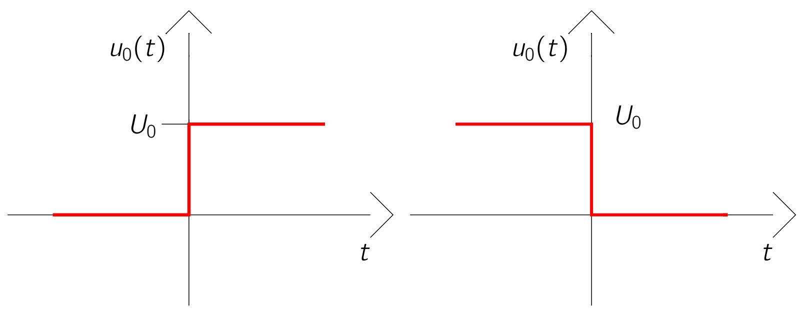


Abbildung 2: Einschaltvorgang (links) und Ausschaltvorgang (rechts)

1. Stellen Sie die Differentialgleichungen für $U_C$, $U_R$ und $U_L$ auf, für den Fall, dass die Spannungsquelle $U_0$ eingeschaltet wird.

2. Bestimmen Sie die Spannungsverläufe von $U_C$, $U_R$ und $U_L$ für den Fall, dass die Spannungsquelle $U_0$ eingeschaltet wird. Stellen Sie die Verläufe qualitativ durch eine Skizze des zeitlichen Verlaufs der Spannungen dar.

3. Stellen Sie die Differentialgleichungen für $U_C$, $U_R$ und $U_L$ auf, für den Fall, dass die Spannungsquelle $U_0$ ausgeschaltet wird.

4. Bestimmen Sie die Spannungsverläufe von $U_C$, $U_R$ und $U_L$ für den Fall, dass die Spannungsquelle $U_0$ ausgeschaltet wird. Stellen Sie die Verläufe qualitativ durch eine Skizze des zeitlichen Verlaufs der Spannungen dar.

Lösungen:

(a) 1. Durch einsetzen der konstituierenden Gleichungen: $u_R = R \cdot i$ und $i = C\frac{du_C}{dt}$ in die KVL: $u_0 = u_R + u_C$ ergibt sich

$$u_0(t) = u_C + RC\frac{du_C}{dt} \tag{1}$$

mit $u_0(t) = U_0 = \text{const.}$ für $t > 0$

2. Zur Bestimmung der Verläufe muss die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung aus Aufgabenteil 1. bestimmt werden. Diese setzt sich als Superposition der homogenen und partikulären Lösung zusammen, also allgemein : $u_c = u_{Ch} + u_{Cp}$. Zunächst bestimmen wir die homogene Lösung indem wir die homogene Differentialgleichung betrachten $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = 0$. Über das charakteristische Polynom gelangt man auf die homogene Lösung: $u_{Ch} = u_C(0) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$. Die inhomogene Lösung lässt sich über den Ansatz der rechten Seite bestimmen, indem man den Ansatz $u_{Cp} = \alpha_0 = \text{const.}$ in die Differentialgleichung einsetzt und liefert $u_{Cp} = u_0$. Durch einsetzen der Anfangsbedingung $u_C(0) = 0$ ergibt sich

$$u_c = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{2}$$

3. Die Differentialgleichung für den Ausschaltvorgang ergibt sich analog zur Differentialgleichung aus 1., wobei hier jedoch $u_0(t) = 0$ für $t > 0$ gilt. (vgl. Abb. 2 rechts)

$$0 = u_C + RC\frac{du_C}{dt} \tag{3}$$

4. Die Lösung dieser Differentialgleichung entspricht der homogenen Lösung aus Aufgabenteil 2. mit der Anfangsbedingung $u_C(0) = U_0$ .

$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{4}$$

(b) 1. Aus KVL:

$$u_0(t) = u_R + u_L \tag{5}$$

ergibt sich mit den konstituierenden Gleichungen

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \tag{6}$$

$$u_R = R \cdot i_L \tag{7}$$

und mit $u_0(t) = U_0 = \text{const.}$ für $t > 0$ für den Einschaltvorgang (vgl.Abb. 2) mittels einsetzen

$$U_0 = Ri_L + L\frac{di_L}{dt} \tag{8}$$

2. Auch hier setzt sich die Lösung aus homogener- und inhomogener Lösung zusammen. Wir betrachten zunächst die homogene Differentialgleichung: $0 = Ri_L + L\frac{di_L}{dt}$. Für die homogene Lösung ergibt sich $i_{Lh}(t) = i_L(0)e^{-\frac{R}{L}t}$. Daraufhin betrachten wir die inhomogene Differentialgleichung $U_0 = Ri_L + L\frac{di_L}{dt}$. Der Ansatz der rechten Seite liefert als partikuläre Lösung $i_{Lp}(t) = \frac{U_0}{R}$. Durch Superposition beider Lösungen und mit der Anfangsbedingung $i_L(0) = 0$ ergibt sich

$$i_L = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{9}$$

$$\Rightarrow u_L = U_0 - Ri_L = U_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{10}$$

3. Für den Ausschaltvorgang ergibt sich analog zum Einschaltvorgang mit $u_0(t) = 0$ für $t > 0$

$$0 = Ri_L + L\frac{di_L}{dt} \tag{11}$$

4. mit der Anfangsbedingung $i_L(0) = \frac{U_0}{R}$ gilt für die Lösung der Differentialgleichung, analog zum homogenen Fall aus 2.

$$i_L = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{12}$$

einsetzten in die konstituierende Gleichung

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \tag{13}$$

liefert

$$u_L = -U_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{14}$$

(c) 1. Das Aufstellen der Differentialgleichung erfolgt analog zu Aufgabenteil b) durch einsetzen der konstituierenden Gleichungen $u_L = L\frac{di_L}{dt}$ und $u_R = R \cdot i$ in die KVL:

$$u_R = U_0 - u_L \tag{15}$$

und liefert prinzipiell dasselbe Ergebnis aus b).

2. Da die Differentialgleichung, die gleiche aus b) ist, ergibt sich hier die gleiche Lösung für $i_L$ , wobei diese Lösung in diesem Fall in die konstituierende Gleichung $u_R = R \cdot i_L$ eingesetzt werden muss.

$$u_R = U_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{16}$$

3. Analog zu teil b)

$$u_R = -u_L \tag{17}$$

4. Die Lösung ergibt sich auch hier analog zu b) mit dem einzigen Unterschied, dass die Lösung für $i_L$ auch hier in die konstituierende Gleichung $u_R = R \cdot i_L$ eingesetzt wird

$$u_R = U_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{18}$$

(d) 1. Die Differentialgleichung ergibt sich mittels KVL: $u_0 = u_L + u_C + u_R$ durch einsetzen der konstituierenden Gleichungen $u_R = R \cdot i_L$,$u_L = L\frac{di_L}{dt}$ und $i_L = C\frac{du_C}{dt}$

$$u_0(t) = CL\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c \tag{19}$$

2. Auch hier ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung durch Superposition der homogenen und inhomogenen Lösung. Wir betrachten zunächst die homogene Differentialgleichung: $0 = CL\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c$. Die Lösung des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL}$ ergibt sich mittels p-q-Formel zu $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R}{2L}^2 - \frac{1}{CL}}$
Im folgenden müssen drei Fälle betrachtet werden, dazu definieren wir zur Vereinfachung der Darstellung $\Delta = \frac{R}{2L}^2 - \frac{1}{CL}$
Fall 1:$\Delta > 0$
In diesem Fall hat das charakteristische Polynom zwei reelle Lösungen und die homogene Lösung der Differentialgleichung ergibt sich mit der Definition von $\pm a = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R}{2L}^2 - \frac{1}{CL}}$ zu $u_{Ch}(t) = c_1e^{at} + c_2e^{-at}$. Der Ansatz der Rechten Seite liefert wieder die inhomogene Lösung: $u_{Cp}(t) = U_0$. Mit den Anfangsbedingungen $u_C(0) = 0$ und $\frac{du_C}{dt} = 0$ ergibt sich

$$u_c = U_0 \left(1 - \frac{1}{2}e^{-at} - \frac{1}{2}e^{at}\right) \tag{20}$$

Fall2: $\Delta = 0$
In diesem Fall besitzt das charakteristische Polynom eine doppelte Nullstelle weshalb sich die homogene Lösung mit der Definition von $b = -\frac{R}{2L}$ folgendermaßen ergibt : $u_{Ch}(t) = c_1e^{bt} + c_2te^{bt}$. Auch in diesem Fall lautet die inhomogene Lösung der Differentialgleichung $u_{Cp}(t) = U_0$. Mit den Anfangsbedingungen $u_C(0) = 0$ und $\frac{du_C}{dt} = 0$ ergibt sich :

$$u_c = U_0 \left(1 - (1 + \frac{R}{2L}t)e^{bt}\right) \tag{21}$$

3.Fall:$\Delta < 0$
In diesem Fall besitzt das charakteristische Polynom komplexe Lösungen und liefert durch Definition von $b = -\frac{R}{2L}$ und $\omega = \sqrt{\frac{R}{2L}^2 - \frac{1}{CL}}$ folgende homogene Lösung $u_{Ch}(t) = c_1 e^{bt} \cos\omega t + c_2 e^{bt} \sin\omega t$. Die inhomogene Lösung ergibt sich wieder mittels des Ansatzes der rechten Seite zu $u_{Cp}(t) = U_0$. Mit den Anfangsbedingungen $u_C(0) = 0$ und $\frac{du_C}{dt} = 0$ ergibt sich

$$u_c = U_0 \left(1 - e^{-bt}\left(\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t\right)\right) \tag{22}$$

3. Analoges Vorgehen zu 1. mit $U_0 = 0$

$$0 = CL\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c \tag{23}$$

4. Da es sich hier um eine homogene Differentialgleichung handelt ergibt sich die Lösung analog zu 2. jedoch mit den Anfangsbedingungen $u_C(0) = U_0 = const.$ und $\frac{du_C}{dt} = 0$ Wieder betrachten wir dazu die drei unterschiedlichen Fälle, die sich aus der Lösung des charakteristischen Polynom ergeben: $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R}{2L}^2 - \frac{1}{CL}}$ und definieren $\Delta = \frac{R}{2L}^2 - \frac{1}{CL}$.
Fall 1: $\Delta > 0$
Die homogene Lösung aus 2. mit den Anfangsbedingungen liefert

$$u_c = \frac{U_0}{2}(e^{at} + e^{-at}) \tag{24}$$

Fall 2: $\Delta = 0$
Die homogene Lösung aus 2. mit den Anfangsbedingungen liefert mit der Definition von $b = -\frac{R}{2L}$

$$u_c = U_0(1 - bt)e^{bt} \tag{25}$$

Fall 3:$\Delta < 0$
Die homogene Lösung aus 2. mit den Anfangsbedingungen liefert mit der Definition von $b = -\frac{R}{2L}$ und d $\omega = \sqrt{\frac{R}{2L}^2 - \frac{1}{CL}}$

$$u_c = U_0 e^{bt}\left(\cos\omega t - \frac{b}{\omega}\sin\omega t\right) \tag{26}$$