Elektronik I, WS 12/13 — Übung 4

Aufgabe 1) *Bedeutung der Fermi-Energie.*

Was sagt die Fermi-Energie eines freien Elektronen-Gases aus?

Aufgabe 2) *Volumenabhängigkeit der Fermi-Energie.*

Wie ändert sich die Fermi-Energie ($T = 0$) des freien Elektronen-Gases eines Metalls mit dem Volumen L^3, wenn die Kantenlänge L verdoppelt wird?

Aufgabe 3) *Zustandsdichte.*

Betrachten Sie einen würfelförmigen Kristall mit Kantenlänge $L = 1\,\mathrm{mm}$. Für die potentielle Energie der Elektronen soll gelten:

$$W_{pot} = \begin{cases} 0 & \text{innerhalb des Kristalls} \\ \infty & \text{außerhalb des Kristalls} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\Psi = a \cdot \mathrm{e}^{j\,\vec{k}\,\vec{r}}$ die Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2\,\mathrm{m_e}} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi \right) = W \cdot \Psi$$

löst. Welchen Term erhält man für die Energie des Elektrons?

b) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons aus der Wellenfunktion. Bestimmen Sie mit Hilfe der Normierungsbedingung die Konstante a.

c) Um die periodische Randbedingung zu erfüllen wird folgender Ansatz gewählt:

$$k_x = \frac{n_x \cdot 2\,\pi}{L} \qquad k_y = \frac{n_y \cdot 2\,\pi}{L} \qquad k_z = \frac{n_z \cdot 2\,\pi}{L} \qquad \text{mit } n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$$

Welchen Einfluss hat diese Wahl auf die Energie des Elektrons im k-Raum?

d) Berechnen Sie die ersten sieben Energieniveaus, die das Elektron einnehmen kann!

e) Wie viele Zustände N_Z ergeben sich auf den Energieniveaus? Durch wie viele Elektronen N_{EZ} können diese eingenommen werden?

f) Berechnen Sie nun die Zustandsdichte $D(W) := \frac{\Delta N_{EZ}}{V \cdot \Delta W}$! Die Zustandsdichte gibt an, wie sich die Anzahl der einnehmbaren Zustände ΔN_{EZ} pro Volumen verändert, wenn die Energie um einen Betrag ΔW erhöht wird.