1. Übung

1. Aufgabe

ges.: Berechnung folgender Betriebskenngrößen für das gegebene NF-Kleinsignalmodell:

- Spannungsübertragungsverhältnis $V_u = \frac{U_a}{U_e}$
- Stromübertragungsverhältnis $V_i = \frac{I_a}{I_e}$
- Eingangswiderstand $r_e = \frac{U_e}{I_e}$
- Ausgangswiderstand $r_a = \frac{U_a}{I_a}$

Lsg.:

a) Emitterschaltung

Zur Berechnung von V_u, V_i und r_e:

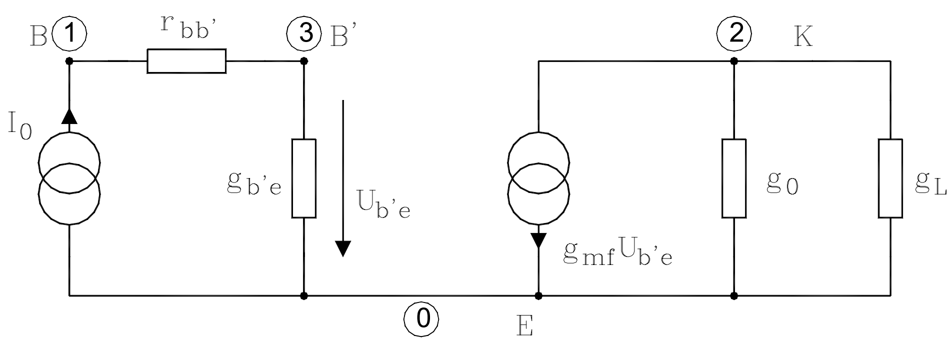


Abbildung 1.1: NF-Kleinsignalmodell der Emitterschaltung

Knotenadmittanzmatrix:

$$\begin{pmatrix} g_{bb'} & 0 & -g_{bb'} \\ 0 & g_o + g_L & g_{mf} \\ -g_{bb'} & 0 & g_{bb'} + g_{b'e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Gauß-Elimination

$$\begin{pmatrix} g_{bb'} & 0 & -g_{bb'} \\ 0 & g_o + g_L & g_{mf} \\ 0 & 0 & g_{b'e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ 0 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\boxed{U_3 = \frac{1}{g_{b'e}} \cdot I_0}$$

$$\boxed{U_2 = -\frac{g_{mf}}{g_{b'e}} \cdot \frac{1}{g_0 + g_L} \cdot I_0}$$

$$\boxed{U_1 = \left(\frac{1}{g_{bb'}} + \frac{1}{g_{b'e}} \right) \cdot I_0}$$

==>

- Eingangswiderstand:

$$\boxed{r_e = \frac{U_1}{I_0} = r_{bb'} + \frac{1}{g_{b'e}}}$$

- Spannungsübertragungsverhältnis:

$$V_u = \frac{U_2}{U_1} = -\beta_{AC} \cdot \frac{\frac{g_{b'e} g_{bb'}}{g_{bb'} + g_{b'e}}}{g_0 + g_L} = -\beta_{AC} \frac{\frac{g_{b'e}}{1 + g_{b'e} r_{bb'}}}{g_0 + g_L} \quad \text{mit } \beta_{\mathrm{AC}} = \frac{g_{mf}}{g_{b'e}}$$

$$\boxed{V_u = -g_{mf} \cdot r_L} \quad \text{mit} \quad g_L >> g_0;\ r_{bb'} \cdot g_{b'e} << 1;\ r_L = \frac{1}{g_L}.$$

- Stromübertragungsverhältnis:

$$V_i = \frac{I_a}{I_e} = -\frac{g_L \cdot U_2}{I_0}$$

$$\boxed{V_i = \beta_{AC} \cdot \frac{g_L}{g_0 + g_L} \approx \beta_{AC}} \quad \text{für } g_L >> g_0$$

- Ausgangswiderstand:

  - i. allg. abhängig vom Abschluss auf der Eingangsseite

  i) Leerlauf am Eingang: an Knoten 2: I_0 angeschlossen, g_L entfernt

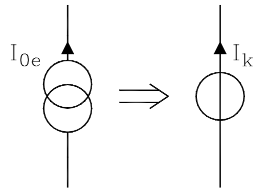
Knotenadmittanzmatrix:

$$\begin{pmatrix} g_{bb'} & 0 & -g_{bb'} \\ 0 & g_o & g_{mf} \\ -g_{bb'} & 0 & g_{bb'} + g_{b'e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U_3 = 0} \; ; \qquad \underline{U_2 = \frac{1}{g_0} \cdot I_0} \; ; \qquad \underline{U_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_a = \frac{U_2}{I_0} = \frac{1}{g_0}}$$

ii) Kurzschluss am Eingang:



KAM:

$$\begin{pmatrix} g_{bb'} & 0 & -g_{bb'} & -1 \\ 0 & g_0 & g_{mf} & 0 \\ -g_{bb'} & 0 & g_{bb'} + g_{b'e} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ I_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -g_{bb'} & g_{bb'} \\ 0 & g_0 & g_{mf} & 0 \\ 0 & 0 & g_{bb'} + g_{b'e} & -g_{bb'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_k \\ U_2 \\ U_3 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U_1 = 0} \; ; \qquad \underline{U_3 = 0} \; ; \qquad \underline{U_2 = \frac{1}{g_0} \cdot I_0} \; ; \qquad \underline{I_k = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_a = \frac{U_2}{I_0} = \frac{1}{g_0}}$$

b) **Kollektorschaltung**

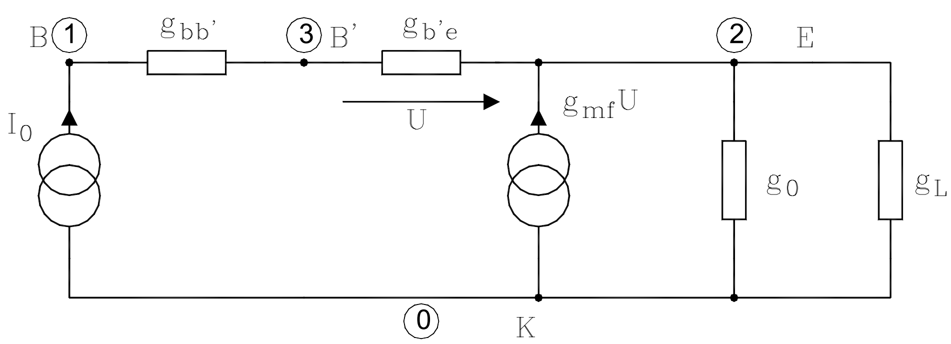


Abbildung 1.2: NF-Kleinsignalmodell der Kollektorschaltung

KAM:

$$\begin{pmatrix} g_{bb'} & 0 & -g_{bb'} \\ 0 & g_o + g_L + g_{b'e} + g_{mf} & -g_{b'e} - g_{mf} \\ -g_{bb'} & -g_{b'e} & g_{bb'} + g_{b'e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_{bb'} & 0 & -g_{bb'} \\ 0 & g_o + g_L + g_{b'e} + g_{mf} & -g_{b'e} - g_{mf} \\ 0 & 0 & g_{b'e} \cdot (g_0 + g_L) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ 0 \\ I_0 \cdot (g_0 + g_L + g_{b'e} + g_{mf}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_3 = \frac{g_0 + g_L + g_{b'e} + g_{mf}}{g_{b'e} \cdot (g_0 + g_L)} \cdot I_0}$$

$$\boxed{U_2 = \frac{g_{b'e} + g_{mf}}{g_{b'e} \cdot (g_0 + g_L)} \cdot I_0}$$

$$\boxed{U_1 = \left(\frac{1}{g_{bb'}} + \frac{g_0 + g_L + g_{b'e} + g_{mf}}{g_{b'e} \cdot (g_0 + g_L)} \right) \cdot I_0}$$

- Eingangswiderstand:

$$r_e = \frac{U_1}{I_0} = r_{bb'} + \frac{g_0 + g_L + g_{b'e} + g_{mf}}{g_{b'e} \cdot (g_0 + g_L)}$$

$$\approx \frac{g_L + g_{mf}}{g_L \cdot g_{b'e}} \qquad \text{für} \quad g_L \gg g_0$$

$$\boxed{r_e = r_{bb'} + \beta_{AC} \cdot r_L} \qquad \text{für} \quad g_{mf} \gg g_L$$

- Spannungsübertragungsverhältnis:

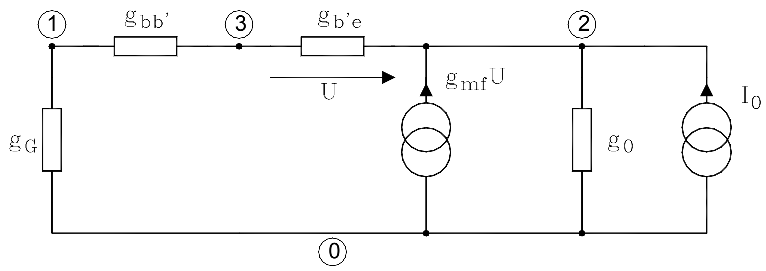
$$\boxed{V_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{g_{bb'} \cdot (g_{b'e} + g_{mf})}{(g_0 + g_L) \cdot (g_{b'e} + g_{bb'}) + g_{bb'} \cdot (g_{mf} + g_{b'e})}} \qquad (\lesssim 1)$$

- Stromübertragungsverhältnis:

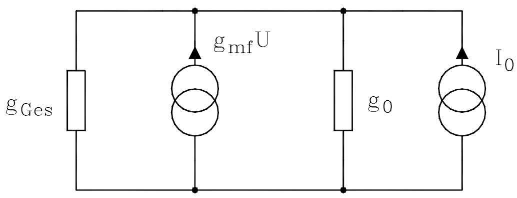
$$V_i = \frac{I_a}{I_e} = -\frac{g_L \cdot U_2}{I_0} = -\frac{g_L (g_{b'e} + g_{mf})}{g_{b'e} (g_0 + g_L)}$$

$$\boxed{V_i \approx -\beta_{AC}} \qquad \text{für} \quad g_L \gg g_0$$

- Ausgangswiderstand:



Durch Zusammenfassung dreier Leitwerte:
⇨ Netzwerk mit einem Knoten



mit $g_{Ges} = \dfrac{1}{r_G + r_{bb'} + \frac{1}{g_{b'e}}}$

$$r_a = \frac{U_a}{I_0} \qquad \text{mit} \qquad I_0 = \left(g_0 + \frac{1}{r_G + r_{bb'} + \frac{1}{g_{b'e}}} \right) \cdot U_a + g_{mf} \cdot U$$

$$\text{mit} \quad \frac{U}{U_a} = \frac{\frac{1}{g_{b'e}}}{r_G + r_{bb'} + \frac{1}{g_{b'e}}}$$

$$\Rightarrow \quad I_0 = \left(g_0 + \frac{1}{r_G + r_{bb'} + \frac{1}{g_{b'e}}} + g_{mf} \cdot \frac{\frac{1}{g_{b'e}}}{r_G + r_{bb'} + \frac{1}{g_{b'e}}} \right) \cdot U_a$$

$$\Rightarrow \quad I_0 = \left(g_0 + \frac{1 + \beta_{AC}}{r_G + r_{bb'} + \frac{1}{g_{b'e}}} \right) \cdot U_a$$

$$\boxed{r_a = \frac{1}{g_0 + \frac{1 + \beta_{AC}}{r_G + r_{bb'} + \frac{1}{g_{b'e}}}}}$$

$$r_G : klein \qquad \Rightarrow r_a \approx \frac{1}{g_{mf}}$$

$$r_G : groß \qquad \Rightarrow r_a \approx \frac{r_G}{\beta_{AC}}$$

c) **Basisschaltung**

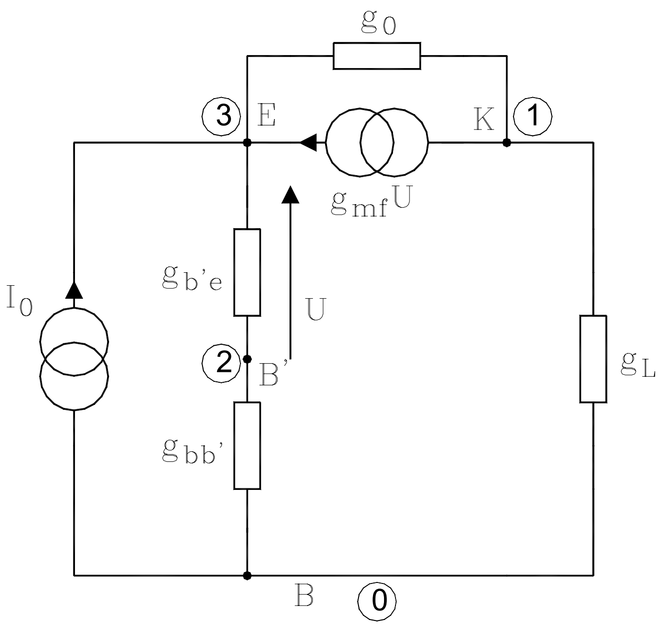


Abbildung 1.3: NF-Kleinsignalmodell der Basisschaltung

KAM:

$$\begin{pmatrix} g_0 + g_L & g_{mf} & -g_0 - g_{mf} \\ 0 & g_{bb'} + g_{b'e} & -g_{b'e} \\ -g_0 & -g_{b'e} - g_{mf} & g_0 + g_{b'e} + g_{mf} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\Rightarrow \quad U_3 = \frac{(g_0 + g_L) \cdot (g_{bb'} + g_{b'e})}{g_0 \cdot \left[g_{bb'} \cdot (g_{b'e} + g_L) + g_{b'e} \cdot g_L \right] + g_L \cdot g_{bb'} \cdot (g_{b'e} + g_{mf})} \cdot I_0$$

$$U_2 = \frac{g_{b'e} \cdot (g_0 + g_L)}{g_0 \cdot \left[g_{bb'} \cdot (g_{b'e} + g_L) + g_{b'e} \cdot g_L \right] + g_L \cdot g_{bb'} \cdot (g_{b'e} + g_{mf})} \cdot I_0$$

$$U_1 = \frac{(g_0 + g_{mf}) \cdot (g_{bb'} + g_{b'e}) - g_{mf} \cdot g_{b'e}}{g_0 \cdot \left[g_{bb'} \cdot (g_{b'e} + g_L) + g_{b'e} \cdot g_L \right] + g_L \cdot g_{bb'} \cdot (g_{b'e} + g_{mf})} \cdot I_0$$

- <u>Eingangswiderstand</u>:

$$r_e = \frac{U_3}{I_0} = \frac{(g_0 + g_L) \cdot (g_{bb'} + g_{b'e})}{g_0 \cdot \left[g_{bb'} \cdot (g_{b'e} + g_L) + g_{b'e} \cdot g_L \right] + g_L \cdot g_{bb'} \cdot (g_{b'e} + g_{mf})}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{g_0} + \frac{1}{g_L}\right) \cdot (g_{bb'} + g_{b'e})}{g_{bb'} \cdot \left(\frac{g_{b'e}}{g_L} + 1\right) + g_{b'e} + \frac{g_{b'e}}{g_0} \cdot (g_{b'e} + g_{mf})}$$

für $g_L \to 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_e\left(g_L = 0\right) = \frac{g_{bb'} + g_{b'e}}{g_{bb'} \cdot g_{b'e}} = r_{b'e} + r_{bb'}}$$

für $g_0 \to 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_e\left(g_0 = 0\right) = \frac{g_{bb'} + g_{b'e}}{g_{bb'} \cdot \left(g_{b'e} + g_{mf}\right)} = \frac{1 + r_{bb'}g_{b'e}}{g_{b'e} + g_{mf}} \approx \frac{1}{g_{mf}}}$$

- Spannungsübertragungsverhältnis:

$$V_u = \frac{U_1}{U_3} = \frac{\left(g_0 + g_{mf}\right)\cdot\left(g_{bb'} + g_{b'e}\right) - g_{mf}\cdot g_{b'e}}{\left(g_0 + g_L\right)\cdot\left(g_{bb'} + g_{b'e}\right)}$$

$$= \frac{g_0 \cdot \left(g_{bb'} + g_{b'e}\right) + g_{mf}\cdot g_{bb'}}{\left(g_0 + g_L\right)\cdot\left(g_{bb'} + g_{b'e}\right)}$$

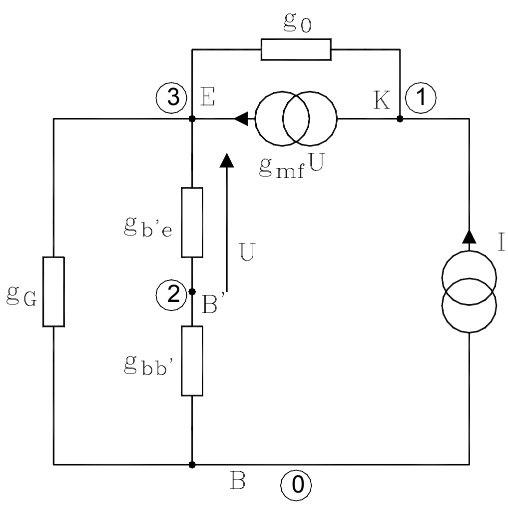
$$\boxed{V_u \approx \frac{g_{mf}\cdot r_L}{1 + g_{b'e}\cdot r_{bb'}}} \qquad \text{für} \quad g_0 \to 0\,.$$

- Stromübertragungsverhältnis:

$$V_i = \frac{I_a}{I_e} = -\frac{g_L \cdot U_1}{I_0} = -\frac{g_L\cdot\left(g_0\cdot\left(g_{bb'} + g_{b'e}\right) + g_{mf}\cdot g_{bb'}\right)}{g_0\cdot\left[g_{bb'}\cdot\left(g_{b'e} + g_L\right) + g_{b'e}\cdot g_L\right] + g_L\cdot g_{bb'}\cdot\left(g_{b'e} + g_{mf}\right)}$$

$$\boxed{V_i \approx -\frac{g_{mf}}{g_{b'e} + g_{mf}} = -\frac{\beta_{AC}}{1 + \beta_{AC}}} \qquad \text{für} \quad g_0 \to 0\,.$$

- Ausgangswiderstand:



$$\begin{pmatrix} g_0 & g_{mf} & -g_0 - g_{mf} \\ 0 & g_{bb'} + g_{b'e} & -g_{b'e} \\ -g_0 & -g_{b'e} - g_{mf} & g_G + g_0 + g_{b'e} + g_{mf} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$U_3 = \frac{g_{b'e} + g_{bb'}}{g_G \cdot \left(g_{b'e} + g_{bb'}\right) + g_{b'e} \cdot g_{bb'}} \cdot I_0$$

$$U_2 = \frac{g_{b'e}}{g_{b'e} + g_{bb'}} \cdot U_3 = \frac{g_{b'e}}{g_G \cdot \left(g_{b'e} + g_{bb'}\right) + g_{b'e} \cdot g_{bb'}} \cdot I_0$$

$$U_1 = \frac{1}{g_0} \cdot \left(-g_{mf} \cdot U_2 + \left(g_{mf} + g_0\right) \cdot U_3 + I_0\right)$$

$$= \frac{1}{g_0} \cdot \left(\frac{-g_{mf} \cdot g_{b'e} + \left(g_{mf} + g_0\right) \cdot \left(g_{b'e} + g_{bb'}\right)}{g_G \cdot \left(g_{b'e} + g_{bb'}\right) + g_{b'e} \cdot g_{bb'}} + 1 \right) \cdot I_0$$

$$r_a = \frac{U_1}{I_0} = r_0 \left(1 + \frac{g_{mf} \cdot g_{bb'} + g_0 \cdot \left(g_{b'e} + g_{bb'}\right)}{g_G \cdot \left(g_{b'e} + g_{bb'}\right) + g_{b'e} \cdot g_{bb'}} \right)$$

$$\boxed{r_a \approx r_0 \left(1 + \frac{\beta_{AC} \cdot g_{mf} \cdot r_G}{\beta_{AC} + g_{mf} \cdot r_G} \right)} \qquad \text{für} \qquad r_{bb'} \cdot g_{b'e} \ll 1, \quad g_0 \ll g_{mf}.$$