

Vorlesung Schaltungstechnik

Ergänzungen 1

M. Möller

2. Mai 2013

1 Definitionen

Elektrisches Bauelement: Eine reale oder virtuelle Anordnung mit mindestens zwei punktförmig definierten Anschlüssen (“Klemmen”) in die Ströme hinein (heraus) fließen können und zwischen denen im Allgemeinen Spannungen anliegen. Den Zusammenhang zwischen Strömen und Spannungen beschreiben die *konstituierenden Gleichungen* des jeweiligen Bauelements. Sonderfall sind ideale Strom- oder Spannungsquellen, bei denen die Quellgröße konstant und die jeweils andere Größe beliebig (vom angeschlossenen Netzwerk bestimmt) ist.

Elektrisches Netzwerk: Verknüpfung von beliebigen (linear, nichtlinear, zeitabhängig, verteilt, konzentriert ...) elektrischen Bauelementen mittels ideal leitender ($R=0$, $Z=0$) Verbindungen zwischen den Anschlüssen der Bauelemente.

Knoten: Punktförmige ideal leitende Verknüpfung von mindestens zwei ideal leitenden Verbindungen. Ein Knoten kann in mehrere Knoten aufgespalten werden, solange die Aufspaltung mit idealen Verbindungen erfolgt. Entsprechend können über ideale Verbindungen zusammenhängende Knoten zu einzelnen Knoten zusammengefasst werden.

Zweig: Verbindung zwischen zwei Knoten durch ein Bauelement. Durch die Verbindung fließt im Allgemeinen ein Strom und es fällt eine Spannung ab (Spannung zwischen den beiden Knoten).

Tor: Zwei Anschlüsse, deren Strom die Torbedingung erfüllt: Der Strom, der in den einen Anschluss hineinfließt, muss aus dem Anderen herausfließen.

Eintor(-Element): Jedes elektrische Netzwerk und damit auch jedes Bauelement mit nur zwei Anschlüssen erfüllt die Torbedingung (Beweis durch Kirchhoffsche Knotenregel, KCL).

Topologie (eines el. Netzwerks): Struktur der Verbindungen eines elektrischen Netzwerks in Form von Zweigen und Knoten, welche die Kirchhoffschen Spannungs- und Stromgleichungen (KVL, KCL) des Netzwerks befolgen.

Graph (gerichtet) eines el. Netzwerks: Darstellung der Topologie des Netzwerks mit Definition der Strom- bzw. Spannungsrichtung an einem Zweig. Zur Iden-

tifikation werden Zweige und Knoten in der Regel durchgehend numeriert. Bei einem verbundenen Graphen kann jeder Knoten über eine beliebige Sequenz von Zweigen erreicht werden. Wir vereinbaren an dieser Stelle, im Folgenden ausschließlich Netzwerke mit verbundenen Graphen zu behandeln.

Kirchhoffsche Spannungs(umlauf)-Regel (KVL): Aus Maxwellschen Gl. folgt allgemein die Wegunabhängigkeit des Integrals für die Spannung U_{21} zwischen zwei beliebigen Punkten (Knoten) P1, P2: $\int_{P1}^{P2} \vec{E} d\vec{s} = U_{21}$. Übertragen auf ein elektrisches Netzwerk lässt sich diese Eigenschaft wie folgt definieren:

Für alle in Form eines verbundenen Graphen darstellbare Netzwerke, für alle darin geschlossenen Umläufe über eine beliebige Sequenz von N Knoten gilt zu jedem beliebigen Zeitpunkt t , dass die algebraische Summe aller N Knoten-zu-Knoten Spannungen $u_n(t)$ entlang der geschlossenen Knoten-Sequenz gleich Null ist

$$\sum_{n=1}^N u_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (1)$$

Anmerkung:

- 1) Knoten-zu-Knoten Sequenz erfordert keinen Umlauf über Zweige.
- 2) Bei Umlauf über N Knoten sind $N - 1$ Spannungen unabhängig, d.h. ein Strom ist abhängig.

Kirchhoffsche Knotenregel (KCL): Aus Maxwellschen Gl. folgt dass der Gesamtfluss aus in einer geschlossenen Hülle (in eine geschlossene Hülle) Null ist : $\iint_{F(V)} \vec{J} d\vec{f} = 0$ (Kontinuitätsgleichung). Übertragen auf ein elektrisches Netzwerk lässt sich diese Eigenschaft wie folgt definieren:

Für alle in Form eines verbundenen Graphen darstellbare Netzwerke, für alle darin definierbaren geschlossenen Hüllen¹ gilt zu jedem beliebigen Zeitpunkt t , dass die algebraische Summe aller N Zweigströme $i_n(t)$ in die Hüllfläche hinein (aus der Hüllfläche heraus) gleich Null ist

$$\sum_{n=1}^N i_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (2)$$

Anmerkung:

- 1) Geschlossene Hülle ist nicht auf Knoten beschränkt. Definition von Überknoten ist möglich.
- 2) Bei N Strömen in eine geschlossene Hülle sind $N - 1$ Ströme unabhängig, d.h. ein Strom ist abhängig.

Gesamtleistung eines Netzwerks: Es lässt sich zeigen (z.B. Tellegen Theorem), dass die Gesamtleistung in einem abgeschlossenen Netzwerk (Gaußsche Hülle umfasst das gesamte Netzwerk) zu jeder Zeit gleich Null ist. Für ein Netzwerk

¹genauer: Gaußsche Oberflächen, d.h. zweiseitige (Innen- und Außenseite), überschneidungsfreie, geschlossene Oberflächen.

mit N Zweigen mit Zweigspannung $u_n(t)$, Zweigstrom $i_n(t)$ und dem Augenblickswert der Zweigleistung $p_n(t)$ in einem Zweig n gilt

$$\sum_{n=1}^N u_n(t)i_n(t) = \sum_{n=1}^N p_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (3)$$

Anmerkung:

- 1) Spannung und Strom sind gleich gerichtet definiert. Eine von einem Zweig aufgenommene Leistung ist damit positiv, eine abgegebene Leistung ist negativ.

2 Formale Berechnung linearer elektrischer Netzwerke (Knotenpotenzialverfahren)

Vorüberlegung: Die Quellgröße idealer Quellen ist vorgegeben und *unabhängig* von dem restlichen Netzwerk. Die jeweils andere Größe der Quelle (Strom bzw. Spannung bei Spannungs- bzw. Stromquelle) hängt ausschließlich vom umgebenden Netzwerk ab und kann nicht wie bei allen anderen Bauelementen über die konstituierenden Gleichungen (aus der Quellgröße) ermittelt werden. Um im Sinne einer allgemeinen Behandlung von Netzwerken keine Sonderregelung von Zweigen mit idealen Quellen zu machen, führen wir das Konzept eines *allgemeinen Zweiges* mit begleiteten Spannungs- bzw. Stromquellen ein.

Begleitete Quelle: Durch äquivalente Netzwerk-Umformung ist es immer möglich, einen Zweig mit einer idealen Strom- bzw. Spannungsquelle so umzuformen (Aufspalten und Verteilen), dass die resultierenden Strom- bzw. Spannungsquellen jeweils parallel bzw. in Reihe zu Eintor-Bauelementen liegen.

Sind alle idealen Quellen in Begleitete Quellen umgeformt, besteht das gesamte Netzwerk aus *allgemeinen Zweigen* wie in Abbildung 1 für einen Zweig j dargestellt.

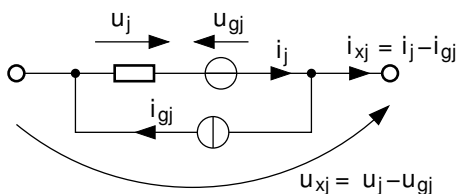


Abb. 1: Allgemeiner Zweig j mit Quellstrom i_{gj} und Quellspannung u_{gj} sowie einem beliebigen Eintorelement.

Obwohl nicht immer notwendig oder vorteilhaft soll zum Vorteil einer übersichtlichen Systematik ein Zweig nur jeweils ein Eintorelement (RLCM) enthalten. Eine Reihen- bzw. Parallelschaltung aus zwei Eintorelementen wird demnach durch zwei Zweige dargestellt.

Das derart dargestellte Netzwerk wird in den folgenden Schritten analysiert und berechnet. Zur Verdeutlichung dient ein einfaches Beispielnetzwerk.

- 1) *Erstellen des gerichteten Graphen des Netzwerks.* Richtungen für Zweigströme und -spannungen sind nach Verbraucherzählpfeilsystem gleich gerichtet. Alle Zweige und Knoten werden durchgehend nummeriert.

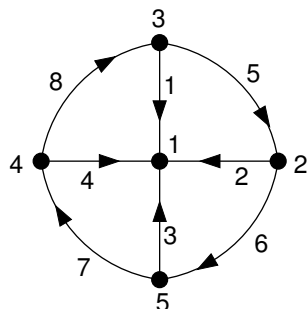


Abb. 2: Gerichteter Graph einer Beispielschaltung mit fünf Knoten und acht Zweigen.

- 2) *Definieren eines Baumes/Kobaumes.* Verfahren am Beispiel der Anwendung von KCL: Beginne bei einem beliebigen Knoten und wähle einen Zweig, der den abhängigen Strom führen soll (vgl. Anmerkungen zu KCL). Gehe über einen Zweig zum nächsten Knoten und wähle dort einen abhängigen Zweig. Für alle anderen Zweige an diesem Knoten existieren bereits schon zuvor definierte unabhängige und abhängige Ströme oder es werden weitere unabhängige Ströme vorgegeben. Setze dieses Verfahren systematisch fort, bis alle alle Knoten des Graphen besucht wurden. Am Ende sind alle Knoten durch abhängige Zweige miteinander verbunden, da jeder Knoten an mindestens einen abhängigen Zweig angeschlossen ist und sämtliche Knoten des Netzwerks besucht wurden. Geben wir jedem *unabhängigen* Zweig einen Strom mit dem Index der Zweignummer, entsteht z.B. der Graph in der folgenden Abbildung.

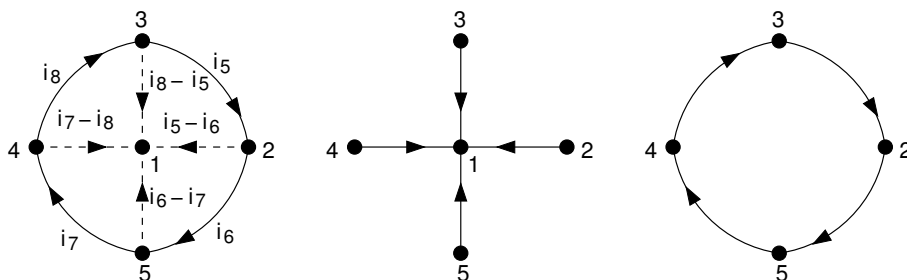


Abb. 3: Links: Definition von Baum und Kobaum durch Wahl von abhängigen Zweigen. Abhängige Zweige sind gestrichelt dargestellt. Mitte: Der resultierende Baum. Rechts: der Kobaum.

Da unabhängige Zweige ihren vorgegebenen Strom (i_5, i_6, i_7, i_8) führen, können sich diese Ströme nur über abhängige Zweige schließen. Warum schließen? Ein Strom, der auf einer Seite aus einem Zweig herausfließt, fließt am anderen Ende des Zweiges in ihn hinein (Beweis durch Kontinuitätssatz bzw. KCL mit Überknoten). Wir nennen den Teil des Graphen,

der die anhängigen Zweige enthält Baum, der restliche Teil des Graphen ist der Kobaum. Die Baum/Kobaumzweige heißen in der englischen Literatur *twigs/links*. Hat der Graph $n + 1$ Knoten, so lassen sich diese mit n Baumzweigen miteinander verbinden. Dies lässt sich einfach durch vollständige Induktion beweisen. Anhand des Beweises lässt sich auch sehen, dass der Baum niemals Schleifen haben kann. Auch lässt sich einfach zeigen, dass durch die Zweigspannungen des Baumes alle Spannungen des Kobaumes bereits definiert sind (Beweis durch KVL mit Spannungsumläufen die jeweils nur einen Kobaumzweig als abhängige Spannung enthalten). Sämtliche Ströme des Graphen sind also durch die Kobaumströme definiert und sämtliche Spannungen durch die Baumspannungen.

3) *Überführen des Netzwerk-Graphen in Matrix Schreibweise*

a) Knoteninzidenzmatrix. Der Graph (das Netzwerk) soll $n + 1$ Knoten und b Zweige enthalten. Gleichung 4 zeigt den allgemeinen Aufbau der Knoteninzidenzmatrix des Netzwerks.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}} = \begin{array}{c} \text{Knoten} \downarrow \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Zweige} \rightarrow 1,2,3 \dots b \\ \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & & & a_{1b} \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ \vdots & & & a_{ij} & & \\ & & & & \ddots & \\ a_{n+1\ 1} & & & & & a_{n+1\ b} \end{array} \right] \end{array} \quad (4)$$

mit den Matrixeinträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Zweig } j \text{ liegt an Knoten } i \text{ und ist von Knoten weg gerichtet,} \\ -1 & \text{Zweig } j \text{ liegt an Knoten } i \text{ und ist zum Knoten gerichtet,} \\ 0 & \text{Zweig } j \text{ liegt nicht an Knoten } i. \end{cases}$$

Für das Beispiel in Abb. 2 ergibt sich

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}} = \begin{array}{c} \text{Knoten} \downarrow \\ \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Zweige} \rightarrow \\ \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{matrix} \end{array} \left[\begin{array}{ccccccccc} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (5)$$

Jede Spalte von $\mathbf{A}_{\mathbf{a}}$ enthält je eine $+1$ und eine -1 . Wenn alle Zeilenvektoren der Matrix addiert werden ergibt dies einen Zeilenvektor mit Null-Einträgen. D.h. addiert man nur n Zeilenvektoren, so muss der resultierende Summenvektor das -1 -fache des verbliebenen Zeilenvektors sein. Daraus folgt, dass mindestens eine Zeile linear von den Anderen abhängig ist: $\text{Rang } \mathbf{A}_{\mathbf{a}} \leq (n + 1) - 1 = n$. In der Tat zeigt der folgende Absatz b), dass $\text{Rang } \mathbf{A}_{\mathbf{a}} = n$. Daher kann eine Zeile von $\mathbf{A}_{\mathbf{a}}$ eliminiert werden. Sinnvoller Weise wird die Zeile des Knotens eliminiert, der im Folgenden

als Bezugsknoten verwendet werden soll. Die daraus resultierende Matrix heißt reduzierte Knoteninzenzmatrix \mathbf{A} und hat die Dimension $n \times b$.

b) Beweis, dass $\text{Rang } A = n$, d.h., dass für die Lösung des Netzwerk-Gleichungssystems n unabhängige Gleichungen zur Verfügung stehen. Beweisschritte:

i) Wir wählen ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit willkürlich einen Bezugsknoten (im Beispiel Knoten 5) und streichen die entsprechende Zeile in der Matrix \mathbf{A}_a die dadurch zur reduzierten Knoteninzenzmatrix \mathbf{A} mit n Zeilen wird.

ii) Wir wählen aus \mathbf{A} die Spalten aus, die zum Baum gehören und fassen diese zu der Untermatrix A_t zusammen. A_t hat bei $n + 1$ Knoten des Baumes genau n Spalten entsprechend n Zweigen, die zum Verbinden der Knoten des Netzwerks notwendig sind. Damit ist \mathbf{A}_t eine quadratische $n \times n$ Matrix. Die restlichen Spalten, die zu den Zweigen des Kobaumes gehören, fassen wir in der Matrix \mathbf{A}_l zusammen. Damit können wir schreiben.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t \ \mathbf{A}_l]. \quad (6)$$

iii) Der restliche Beweis verwendet nur noch \mathbf{A}_t und zeigt, dass deren Rang gleich n ist. Da der Rang von \mathbf{A} nicht größer als n sein kann ist der Beweis abgeschlossen.

iv) Zur eingängigeren Erläuterung der weiteren Vorgehensweise betrachten wir das Beispiel aus der Matrix in Gl. 5, nachdem die Zeile des Bezugsknoten 5 gestrichen wurde

$$\mathbf{A}_t = \begin{array}{c} \text{Knoten } \downarrow \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Baum-Zweige } \rightarrow \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (7)$$

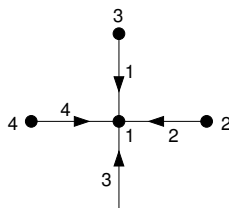


Abb. 4: Baum ohne Bezugsknoten 5 entsprechend den Einträgen in Gl. 7.

v) Da die Zeile des Bezugsknotens beim Übergang $\mathbf{A}_a \rightarrow \mathbf{A}$ gelöscht wurde, haben die an diesen Knoten angeschlossenen Zweige (= Spalten) in \mathbf{A} nur noch einen ± 1 Eintrag. Dieser Eintrag steht in den Zeilen, die zu Knoten gehören, die über Zweige mit dem gelöschten Bezugsknoten verbunden

sind. In unserem Beispiel sind das die Zweige 3, 6 und 7 wobei nur Zweig 3, der zu Knoten 1 führt, zur betrachteten Untermatrix \mathbf{A}_t gehört. Daher berechnen wir die Determinante von \mathbf{A}_t über eine Kofaktor Entwicklung in der Spalte von Zweig 3, die sich auf den -1 Eintrag für Knoten 1 reduziert. Wir erhalten allgemein als Ergebnis $(-1)^{n+m} \cdot a_{nm}$ (Unterdeterminante, die durch Streichen der n -ten Zeile und m -ten Spalte dieses einen Eintrags entsteht). Im Beispiel ist dies

$$\det(\mathbf{A}_t) = (-1)^{(1+3)} a_{13} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

vi) Bei der Elimination der Zeile des ersten Elementes bei der Kofaktor Entwicklung (im Beispiel Zeile 1) wurde der noch verbliebene Knoten des Zweiges gelöscht, der an dem gelöschten Bezugsknoten lag. Da wir einen verbundenen Graphen betrachten, muss an diesem Knoten mindestens ein weiterer Zweig angeschlossen sein. Wir schreiben zur Vereinfachung im Plural weiter. Durch die Löschung des Knotens fehlt diesen Zweigen wiederum ein Knoten, was sich durch nur jeweils einen ± 1 Eintrag in den entsprechenden Spalten dieser Zweige äußert. Die Entwicklung der Determinante von \mathbf{A}_t verwendet im nächsten Schritt eine Spalte (=Zweig) mit nur einem dieser Einträge. Die Entwicklung der verbliebenen Unterdeterminante reduziert sich wiederum nur auf dieses eine Element, in der Art wie bereits im Schritt zuvor beschrieben. In unserem Beispiel sind durch die Löschung des zentralen Knotens 1 sämtliche Zweige mit nur noch einem Knoten verblieben. Wir wählen zur Kofaktor Entwicklung Zweig 2 und erhalten

$$\det(\mathbf{A}_t) = (-1)(-1)^{(1+2)} a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(1) = 1 \quad (9)$$

vii) Die Kofaktor Entwicklung wird fortgesetzt bis die Determinante vollständig entwickelt ist. Da über den verbundenen Graphen nach jedem Schritt immer mindestens ein Zweig mit nur einem Knoten verbleibt, erhält man bei jedem Entwicklungsschritt einen zusätzlichen ± 1 Faktor. Dadurch nimmt die Determinante von \mathbf{A}_t in allen Fällen den Wert ± 1 ($\neq 0!$) an, wodurch der Rang von A_t und damit der Rang von \mathbf{A} immer gleich n ist, q.e.d.

Fazit: Ein Netzwerk mit einem zusammenhängenden Graphen mit $n + 1$ Knoten (mit einem Baum mit n Zweigen) hat eine Knotenadmittanzmatrix vom Rang n .

- 4) *Strombilanzgleichung (KCL).* In jeder Zeile (Knoten) von \mathbf{A} geben die Einträge a_{ij} an, ob ein Zweig (Spalte) zum Strom in den Knoten beiträgt ($+1$ wenn vom Knoten weg, -1 wenn zum Knoten hin orientiert) oder keinen Betrag zum Knoten liefert ($a_{ij} = 0$). Daher können wir die Strombilanzgleichung für das gesamte Netzwerk direkt im Sinne des KCL für jeden Knoten i formulieren $\sum_{j=1}^b a_{ij} i_{xj} = 0$ mit b Anzahl der Zweige des Netzwerks, i_{xj} allgemeiner Zweigstrom des Zweiges j vgl. Abb. 1) und $i = 1 \dots n + 1$ (Anzahl der Knoten des Netzwerks). In Matrixschreibweise

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_x = \mathbf{0} \quad \text{mit } \mathbf{i}_x = (i_{x1}, i_{x2} \dots i_{xb})^T. \quad (10)$$

Wir können mit Gl. 6 und dem nach Baum- \mathbf{i}_{xt} und Kobaumströmen \mathbf{i}_{xl} geordneten Zweigstromvektor $\mathbf{i}_x = [\mathbf{i}_{xt} \mathbf{i}_{xl}]^T$ auch schreiben

$$\mathbf{0} = [\mathbf{A}_t \mathbf{A}_l] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{xt} \\ \mathbf{i}_{xl} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_t \mathbf{i}_{xt} + \mathbf{A}_l \mathbf{i}_{xl}, \quad (12)$$

$$\mathbf{i}_{xt} = -\mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{A}_l \mathbf{i}_{xl}, \quad (13)$$

$$\mathbf{i}_x = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{A}_l \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{i}_{xl}, \quad (14)$$

mit $\mathbf{1}$ als Einheitsmatrix. Durch diese Beziehung lassen sich die Baumströme aus den Zweigströmen berechnen. Die Inverse \mathbf{A}_t^{-1} existiert, da wir in dem Beweis zuvor gezeigt haben, dass \mathbf{A}_t eine $n \times n$ Matrix vom Rang n ist.

- 5) *Abspalten von Quellen.* Für jeden Zweig gilt (vgl. Abb. 1) $i_{xj} = i_j - i_{gj}$ wobei i_j der Strom durch das mit konstituierenden Gleichungen beschreibbare Element des Zweiges ist und i_{gj} der Generatorstrom. Damit lässt sich Gl. 10 modifizieren

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_x = \mathbf{0}, \quad (15)$$

$$\mathbf{A} (\mathbf{i} - \mathbf{i}_g) = \mathbf{0}, \quad (16)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{A} \mathbf{i}_g, \quad (17)$$

mit $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_j \dots i_b)^T$ und $\mathbf{i}_g = (i_{g1}, \dots, i_{gj} \dots i_{gb})^T$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist in der Regel bekannt, da die Quellen bekannt sind.

- 6) *Umrechnen von Zweigspannungen in Knotenpotenziale.* Wir wählen für das Netzwerk ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit einen Referenzknoten, der identisch mit dem Knoten der Zeile ist, die in der allgemeinen Knoteninzidenzmatrix \mathbf{A}_a gestrichen wurde. Wir betrachten in Abb. 5 einen beliebigen Zweig j mit der Zweigspannung u_{xj} , die vom Knoten k zum Knoten l gerichtet ist.

Wir definieren die Knotenpotenziale u_k, u_l als die Spannungen von den Knoten u, k zu dem Referenzknoten, wodurch sich über einen einfachen Spannungsumlauf

$$u_{xj} = u_{nk} - u_{nl} \quad (18)$$

ergibt. Wir wollen die reduzierte Knoteninzidenzmatrix \mathbf{A} verwenden, um diese Zusammenhänge für alle Zweige des Netzwerks systematisch auszudrücken. Betrachten wir \mathbf{A} hinsichtlich der Einträge für den Zweig j

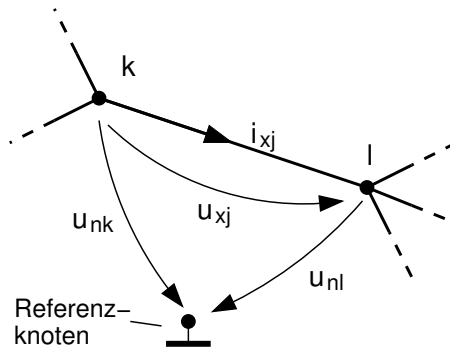


Abb. 5: Zusammenhang zwischen allgemeiner Zweigspannung u_{xj} zwischen Knoten k und l und den zugehörigen Knotenpotenzialen u_k und u_l . Der Referenzknoten wird oft auch mit “0”, “Masse” oder GND (ground, engl. f. Masse) bezeichnet.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \text{Knoten} \downarrow \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ l \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \text{Baum-Zweig} \\ \dots \quad j \quad \dots \\ \left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \dots & 1 & \dots \\ \vdots & & \\ \dots & -1 & \dots \\ \vdots & & \end{array} \right] \end{array} \quad (19)$$

Da die Richtung der Zweigspannung u_{xi} mit der Richtung des Zweigstromes i_{xj} übereinstimmt, geben die beiden ± 1 Einträge in der Spalte des entsprechenden Zweiges j das richtige Vorzeichen bei der Addition der beiden Knotenpotenziale nach Gl. 18 an. Alle weiteren Einträge in dieser Spalte sind null, da der Zweig nur an zwei Knoten liegen kann. Multiplizieren wir demnach die Einträge dieser Spalte mit einem Vektor \mathbf{u}_n der Knotenpotenziale, die entsprechend der Knotennummerierung gewählt wurden, erhalten wir die gewünschte Formulierung für die Beziehung zwischen Knotenpotenzialen und Zweigspannungen

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n \quad \text{mit } \mathbf{u}_n = (u_{n1}, u_{n2} \dots u_{nn})^T. \quad (20)$$

- 7) *Formulierung der Netzwerk-Gleichungen im Laplace-Bereich.* Wir betrachten den Zusammenhang von Strom eines linearen (oder linearisierten) RLC-Elements in einem allgemeinen Zweig j und der zugehörigen Spannung über dem Element. Die konstituierenden Gleichungen liefern

$$\begin{aligned}
\text{Leitwert:} \quad i_j(t) &= \frac{1}{R_j} u_j(t) = G_j u_j(t), \\
\text{Kapazität:} \quad i_j(t) &= C_j \frac{du_j(t)}{dt}, \\
\text{Induktivität:} \quad i_j(t) &= \frac{1}{L_j} \int_{-\infty}^t u_j(\tau) d\tau, \\
&= \frac{1}{L_j} \underbrace{\int_{-\infty}^0 u_j(\tau) d\tau}_{i_j(t=0)} + \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau, \\
&= i_j(t=0) + \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{21}$$

Für die Induktivität lässt sich die Anfangsbedingung $i_j(t=0)$ (oder kurz $i_j(0)$) in Form einer Gleichstromquelle mit dem Wert $I_0 = i_j(0)$ in einem äquivalenten Ersatzschaltbild nach Abb. 6 berücksichtigen.

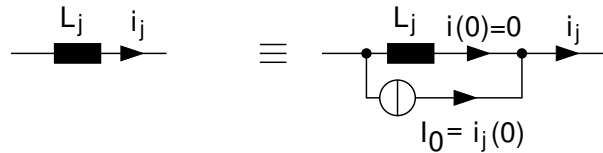


Abb. 6: Äquivalente Berücksichtigung der Anfangsbedingung des Stromes durch eine Induktivität nach Gl. 21 zum Zeitpunkt $t=0$ in Form einer Gleichstromquelle mit dem Anfangswert $i_j(0) = \text{const.}$ Die Induktivität ist in diesem Fall ohne Anfangswert, d.h. $i(0) = 0$.

Die Anfangsbedingung lässt sich demnach in Form des allgemeinen Zweig-Ersatzschaltbildes in Abb. 1 durch Berücksichtigung des Anfangswertes in der Zweigstromquelle i_{gj} berücksichtigen. Für die in diesem Fall vom Anfangswert befreiten Elemente gilt bei der Laplace-Transformation mit den bekannten Regeln ²

$$\begin{aligned}
i_j = G_j u_j & \quad \circ \bullet \quad I_j = G_j U_j, \\
i_j = C_j \frac{du_j}{dt} & \quad \circ \bullet \quad I_j = s C_j U_j - C_j u_j(t=0+), \\
i_j = \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau & \quad \circ \bullet \quad I_j = \frac{1}{s L_j} U_j, \\
\sigma(t) i_j(0) & \quad \circ \bullet \quad \frac{i_j(0)}{s},
\end{aligned} \tag{22}$$

mit $\mathcal{L}\{i_j(t)\} = I_j(s)$, $\mathcal{L}\{u_j(t)\} = U_j(s)$. Zur untersten Zeile in dieser Tabelle: Aufgrund der Konvention des Laplace-Integrals, beginnt die Integration zum Zeitpunkt $t = 0$ und sichert so die Konvergenz des Laplace Integrals. Daher kann keine Gleichstromquelle wie in Abb. 6 zur

²Vgl. z.B. O. Föllinger, *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*, Hüting Verlag Heidelberg, 9. Auflage, 2007 oder H. Weber, *Laplace-Transformation für Ingenieure der Elektrotechnik*, Teubner Studienskripten, 5. Auflage 1987.

Berücksichtigung der Anfangsbedingung des Stromes durch die Induktivität in der Transformation verwendet werden (Gleichstromquelle behält per Definition auch für $t < 0$ ihren konstanten Wert). Daher wird die Gleichstromquelle mit einer Sprungfunktion $\sigma(t) = \{0(t < 0), 1(t \geq 0)\}$ multipliziert, wodurch die Konvergenz sichergestellt und gleichzeitig die Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$ berücksichtigt wird. Die unterste Zeile der Tabelle 22 zeigt das zugehörige Transformationspaar der so definierten Anfangswertquelle.

Zusätzlich ergibt sich durch die Transformation des Differentialquotienten bei Kapazitäten (zweite Zeile in der Tabelle) aufgrund des Integrationsbeginns bei $t \rightarrow 0+$ ein konstanter Quellterm im Bildbereich ($s = 0$ in der komplexen Frequenzebene)³. Wir haben somit Allgemein bei der Behandlung von Netzwerken mit linearen RLC-Elementen im Bildbereich der Laplacetransformation zwei Quellterme aus Anfangsbedingungen, die sich als Teil der Generatorströme zusammenfassen lassen

$$I_{g0}(s) = \frac{i_j(0)}{s} - C_j U_j(0+). \quad (23)$$

Die Terme $\{G_j, sC_j, \frac{1}{sL_j}\}$ in Gl. 22 bezeichnen wir als Wirkungsfunktionen, da sie den Zusammenhang zwischen Ursache (hier $U_j(s)$) und Wirkung (hier $I_j(s)$) beschreiben. Stellvertretend für die einzelnen Wirkungsfunktionen werden wir im Folgenden auch die Admittanz $\underline{Y}(s)$ oder deren Kehrwert, die Impedanz $Z(s) = \underline{Y}(s)^{-1}$ als allgemeine Wirkungsfunktionen verwenden.

8) *Konstituierende Zweig-Gleichungen.*

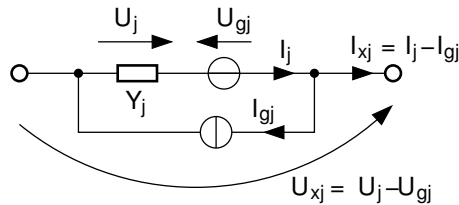


Abb. 7: Allgemeiner Zweig j im Bildbereich der Laplace-Transformation mit Quellstrom $I_{gj}(s)$ und Quellspannung $U_{gj}(s)$ sowie einem beliebigen linearen Eintorelement mit Admittanz $Y_j(s)$. Die Quelle $I_{gj}(s)$ enthält auch die Anfangsbedingungen nach Gl. 23.

Es gilt für jeden Zweig des Netzwerks in Abb. 7 $I_j = Y_j U_j$ oder in Matrix-Form

$$\mathbf{I} = \mathbf{YU} \quad \text{mit } \mathbf{I} = \{I_1 I_2 \dots I_b\}, \mathbf{U} = \{U_1 U_2 \dots U_b\}. \quad (24)$$

Die $(b \times b)$ Admittanzmatrix wird so aufgespaltet, dass sie als Summe dreier $(b \times b)$ RLC Matritzen dargestellt wird

³Dieses Ergebnis läßt sich einfach durch Partielle Integration des Laplace-Integrals zeigen.

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{s} \frac{1}{\mathbf{L}} + \mathbf{G} + s\mathbf{C}. \quad (25)$$

Darin steht $\frac{1}{\mathbf{L}}$ für eine Matrix mit $\frac{1}{L_j}$ Einträgen bei den jeweiligen Zweigadmittanzen und nicht etwa für die Inverse der Admittanzmatrix. In der Regel wird durch entsprechende Numerierung der Elemente eines Netzwerks versucht, eine möglichst geordnete Form der Admittanzmatrix zu erhalten. Im Fall eines Netzwerks ohne gesteuerte Quellen und damit auch ohne gekoppelte Elemente (z.B. Gegeninduktivität) erhält man für $\frac{1}{\mathbf{L}}$, \mathbf{G} , und \mathbf{C} (und somit auch für \mathbf{Y}) Diagonalmatrizen.

- 9) *Algebraische Lösung der Netzwerk-Gleichungen.* Wir lösen die Netzwerkgleichungen im Bildbereich der Laplace-Transformation. Das Gleichungssystem in Gl. 17 transformiert in den Bildbereich und mit Gl. 24 eingesetzt ergibt für die Stöme und Spannungen an den Elementen

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{I}_g, \quad (26)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{I}_g. \quad (27)$$

Für die Zweigspannungen gilt nach Abb. 7 $U_{xj} = U_j - U_{gj}$ und damit in Matrix-Schreibweise $\mathbf{U}_x = \mathbf{U} - \mathbf{U}_g$, womit

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}(\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_g) = \mathbf{A}\mathbf{I}_g, \quad (28)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U}_x = \mathbf{A}\mathbf{I}_g - \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U}_g, \quad (29)$$

$$\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T}_{=: \mathbf{Y}_n} \mathbf{U}_n = \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{I}_g - \mathbf{Y}\mathbf{U}_g)}_{=: \mathbf{I}_{qn}}, \quad (30)$$

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{I}_{qn}. \quad (31)$$

Beim Übergang auf Gl. 30 wurde von der in den Bildbereich transformierten Gl. 20 zur Darstellung von Zweigspannungen durch Knotenpotenziale Gebrauch gemacht. Das Ergebnis in Gl. 31 ist dadurch hinsichtlich der Knotenpotenziale des Netzwerks formuliert. Die definierte Matrix \mathbf{Y}_n wird als Knotenadmittanzmatrix bezeichnet. Der Quellstrom-Vektor der rechten Seite \mathbf{I}_{qn} repräsentiert die Inhomogenität des linearen Gleichungssystems und enthält mit dem Term $\mathbf{Y}\mathbf{U}_g$ die formale Umrechnung von Quellspannungen U_{gj} der Zweige in äquivalente Quellströme.

Wir interessieren uns für die Knotenpotenziale als Lösung des Gleichungssystems, die sich formal ergibt in der Form

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{Y}_n^{-1} \mathbf{I}_{qn}. \quad (32)$$

Lösungen dieses inhomogenen Gleichungssystems existieren falls die Inverse der quadratischen ($n \times n$) Matrix⁴ $\mathbf{Y}_n(s)$ existiert bzw. die äquivalente Forderung $\text{Det} \mathbf{Y}_n \neq 0$ erfüllt ist.

⁴Zur Erinnerung: das Netzwerk hat $n + 1$ Knoten

Für den Fall ohne Anregung sind die Spannungen und Ströme im Netzwerk zum Zeitpunkt $t = 0+$ gleich Null und es gilt $\mathbf{I}_{qn} = \mathbf{0}$. Dieser Fall tritt z.B. bei der Netzwerkberechnung von Oszillator-Schaltungen auf, die autonom eigene Quellspannungen oder eigene Quellströme erzeugen. Dann sind auch ohne zusätzliche Quellen die Spannungen und Ströme im Netzwerk von Null verschieden. In diesem Fall ist das homogene Gleichungssystem

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{0} \quad (33)$$

zu lösen. Nichttriviale Lösungen existieren in diesem Fall für $\text{Det} \mathbf{Y}_n = 0$

10) *Aufbau der Knotenadmittanzmatrix.* Die Knotenadmittanzmatrix

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \quad (34)$$

hat eine herausragende Bedeutung in der Berechnung linearer elektrischer Netzwerke. Ihr wesentlicher Vorteil gegenüber z.B. Formulierungen im Zustandsraum ist, dass sich \mathbf{Y}_n sehr einfach systematisch für beliebig komplexe Netzwerke aufstellen lässt. Aus diesem Grund arbeiten Programme zur Schaltungssimulation (z.B. SPICE oder SPECTRE) auf Basis der Knotenadmittanzmatrix, die direkt aus der vom Anwender eingegebenen Schaltung erstellt wird. Nachfolgend soll die Struktur von \mathbf{Y}_n ermittelt werden. Mit dem Ergebnis lässt sich \mathbf{Y}_n direkt durch formale Inspektion des Netzwerks aufstellen. Wir verdeutlichen die Überlegungen anhand des Graphen eines einfachen Netzwerks aus Abb. 2, das nur RLC Zweig-Elemente und keine gesteuerten Quellen besitzen soll. Die Zweigadmittanz-Matrix \mathbf{Y} hat in diesem Fall Diagonal-Gestalt. Als Referenzknoten wählen wir Knoten 5. In der nachfolgenden Rechnung ermitteln wir Gl. 34 in zwei Schritten (Punkte stehen für Null- Einträge)

$$\begin{array}{c}
\text{Zweig } \downarrow \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\end{array}
\mathbf{A}^T =
\begin{array}{c}
\text{Knoten } \rightarrow \\
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc}
-1 & . & 1 & . \\
-1 & 1 & . & . \\
-1 & . & . & . \\
-1 & . & . & 1 \\
. & -1 & 1 & . \\
. & 1 & . & . \\
. & . & . & -1 \\
. & . & -1 & 1
\end{array} \right]$$

$$\mathbf{Y}\mathbf{A}^T = \left[\begin{array}{cccccccc}
Y_1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & Y_2 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & Y_3 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & Y_4 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & Y_5 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & Y_6 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & Y_7 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & Y_8
\end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc}
-Y_1 & . & Y_1 & . \\
-Y_2 & Y_2 & . & . \\
-Y_3 & . & . & . \\
-Y_4 & . & . & Y_4 \\
. & -Y_5 & Y_5 & . \\
. & Y_6 & . & . \\
. & . & . & -Y_7 \\
. & . & -Y_8 & Y_8
\end{array} \right]$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T = \left[\begin{array}{cccccccc}
-1 & -1 & -1 & -1 & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & -1 & 1 & . & . \\
1 & . & . & . & 1 & . & . & -1 \\
. & . & . & 1 & . & . & -1 & 1
\end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc}
Y_{11} & -Y_2 & -Y_1 & -Y_4 \\
-Y_2 & Y_{22} & -Y_5 & . \\
-Y_1 & -Y_5 & Y_{33} & -Y_8 \\
-Y_4 & . & -Y_8 & Y_{44}
\end{array} \right]$$

mit

$$Y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4, \quad Y_{22} = Y_2 + Y_5 + Y_6, \quad Y_{33} = Y_1 + Y_5 + Y_8, \quad Y_{44} = Y_4 + Y_7 + Y_8. \quad (35)$$

Im ersten Schritt $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ bleiben durch die Multiplikation mit der Diagonalmatrix \mathbf{Y} die Orte der Einträge in \mathbf{A}^T erhalten. Es ändert sich jedoch der Wert der Einträge von ± 1 auf $\pm Y_j$, da ein Eintrag ± 1 für einen Zweig j in einer Spalte von \mathbf{A}^T die jeweilige Zweigadmittanz Y_j durch Multiplikation selektiert.

Im zweiten Schritt wird das Ergebnis $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ des ersten Schritts von links mit \mathbf{A} multipliziert. Wie zuvor festgestellt hat $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ dieselbe Struktur hinsichtlich der Orte und Vorzeichen der Einträge wie \mathbf{A}^T . Daher werden bei der Multiplikation der n -ten Zeile von \mathbf{A} mit der n -ten Spalte (=Knoten) von $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ sämtliche Einträge des Spaltenvektors mit ± 1 selektiert. Dabei werden Admittanzen, die zuvor mit einem bestimmten Vorzeichen multipliziert wurden wieder mit demselben Vorzeichen multipliziert. Daher ergibt sich in der Hauptdiagonalen eine Admittanz Y_{nn} die aus der Summe der Einträge der n -ten Spalte von $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ besteht. Da diese n -te Spalte die Admittanzen enthält die am n -ten Knoten des Netzwerks liegen gilt die einfache Regel: *Auf der Hauptdiagonalen der Knotenadmittanzmatrix steht an der Stelle Y_{nn} die Summe aller an einem Knoten n liegenden Zweigadmittanzen unabhängig von der Zweigorientierung mit positiven Vorzeichen.*

Für Elemente der Knotenadmittanzmatrix \mathbf{Y}_n , die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, gilt in ähnlicher Weise ebenfalls die Überlegung der Selektion von Einträgen von Spaltenvektoren von $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ durch ± 1 Einträge in \mathbf{A} . Nur der Eintrag (=Zweig) einer Spalte (=Knoten) von $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ wird selektiert, für den in \mathbf{A} an der entsprechenden Stelle ein ± 1 Eintrag vorhanden ist. Das ist definitionsgemäß für die Knoteninzidenzmatrix dann der Fall wenn dieser Zweig auch an dem Knoten (=Zeile) von \mathbf{A} liegt. Das Vorzeichen der Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen ist immer negativ, da die jeweils miteinander multiplizierten Einträge unterschiedliche Vorzeichen aufgrund der Orientierung eines Zweiges zu den beiden an ihm liegenden Knoten. Für Elemente der Knotenadmittanzmatrix von RLC Netzwerken die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen gilt daher die einfache Bestimmungsregel: *Ein Eintrag Y_{ij} außerhalb der Hauptdiagonalen der Knotenadmittanzmatrix besteht aus der Admittanz, welche die Knoten i und j miteinander verbindet. Das Vorzeichen aller Admittanzen außerhalb der Hauptdiagonalen ist immer negativ.*

Es gilt $\mathbf{Y}_n^T = (\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}\mathbf{Y}^T\mathbf{A}^T$. Für den Fall, dass $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T$ erfüllt ist, also \mathbf{Y} symmetrisch ist, wird $\mathbf{Y}_n^T = \mathbf{A}\mathbf{Y}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T = \mathbf{Y}_n$. Fazit: *Besitzt ein Netzwerk eine symmetrische Admittanzmatrix \mathbf{Y} so ist auch die Knotenadmittanzmatrix \mathbf{Y}_n symmetrisch.* Dies ist bei Netzwerken, die wie in unserem Beispiel aus RLC Elementen bestehen und somit ein \mathbf{Y} in Diagonal-Gestalt besitzen, immer der Fall.

Mit diesen beiden Regeln lässt sich die Knotenadmittanzmatrix eines beliebigen RLC Netzwerks rein formal durch Inspektion des in den Knoten nummerierten Netzwerks erstellen. Damit kann das Knotenpotenzialgleichungssystem 31 direkt aufgestellt werden. Der Quellstromvektor der rechten Seite enthält dabei für jeden Knoten die Summe der in diesen Knoten fließenden Ströme mit positivem Vorzeichen (Beweis als Übung).

- 11) *Verallgemeinerung für Netzwerke mit gesteuerten Quellen.* Zuvor wurden Netzwerke mit RLC Elementen betrachtet, die aufgrund der Diagonal-Gestalt der Admittanzmatrix \mathbf{Y} immer zu symmetrischen Knotenadmittanzmatrizen führen. Sind in dem Netzwerk gesteuerte Quellen so ist dies in der Regel nicht mehr der Fall. Ausnahme sind gekoppelte Induktivitäten, deren Einträge in die Knotenadmittanzmatrix immer symmetrisch erfolgen. Wählen wir die Bezeichnung "M" als Synonym für gekoppelte Induktivitäten so gilt die Aussage, dass Netzwerke aus RLCM Elementen immer eine symmetrische Knotenadmittanzmatrix besitzen. Beweis als Übung.