

# **Vorlesungen zur Schaltungstechnik**

Elektronische Schaltungen  
und  
Elektrische Netzwerke

---

In Bearbeitung, Stand 19.05.2016

---

M. Möller

25. Mai 2016

# 1 Schaltungstechnik-Module

ENTWURF

Geplante Struktur des Schaltungstechnik-Moduls (ab 2017)

VL	<i>Elektronische Schaltungen</i> anwendungsorientierte Einführung	<i>Elektrische Netzwerke</i> Vertiefung, Erläuterung Hintergründe	<i>Praktikum</i> <i>Schaltungs-</i> <i>technik</i>
1	Knoten/Zweig/Tor, KCL/KVL (Kapitel 2)	Graph/Baum/Cobaum, $Y_n = A^T A^T$ (Kapitel 3)	
2	Konstituier. Gl'en RLCM	$Y_n \rightarrow$ Knotenpotenzialverf.	
3	Schaltplan, Schaltungssimulation DC, AC, TRAN Simulation	Phasoren/Freq./Zeit/Laplace Lösungen von $Y_n U = I_q$	
4	Arbeitspunkt Einstellung und Stabili- sierung Linearisierung, Schaltbetrieb	Anhand $Y_n U = I_q$ Lösungen: Überlagerungs-Satz, Stabilität	
5	Transistorgrundschaltungen	T-Operator, Zweitorthorie	Termin 1
6	Rückkopp./Netzteil/OPerationsverstärker	Rückkopplung Realisierungsfragen	
7	Rückkopplung Oszillator	Frequenzgang/Bode Diagramm	Termin 2
8	OP/Beschaltung	Nyquist Kriterium	
9	OP/Aufbau/Leistungsendstufe	Gleich-/Gegentakt	Termin 3
10	Schaltbetrieb/Schaltnetzteil	Großsignal Überlegungen und Lösungen Dgl.	
11			Termin 4
12			
13			Zusatztermin

Das Schaltungstechnik Modul ist die Vorbereitung zu einer geplanten Vorlesung *Schaltungssimulation* und der SE Veranstaltung *Elektronische Systeme*.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Definitionen zur Schaltungstechnik

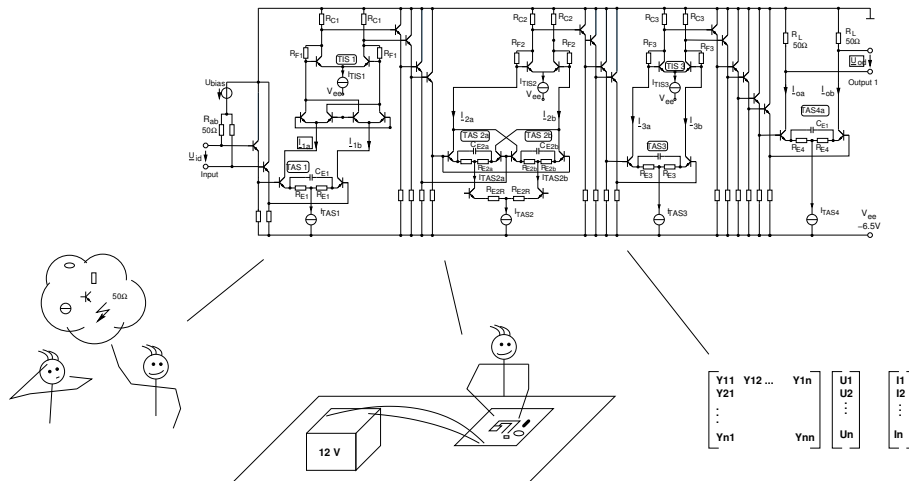


Abb. 1: Drei Anwendungen eines Schaltplans.

**Schaltplan:** Grafische Darstellung einer elektrischen Schaltung in Form der symbolhaften Darstellung der elektrischen Elemente und ihrer Verschaltung (vgl. Abb.1). In dieser symbolischen Form dient der Schaltplan als Ausdrucksform in der Kommunikation des Schaltungsentwicklers. Darüber hinaus kann er sowohl als Vorlage für eine Realisierung einer Schaltung als auch als grafische Darstellung des jeweils zugrundeliegenden Gleichungssystems verstanden werden. Diese Variante wird auch zur Eingabe ("schematic entry" über GUI) und nachfolgenden Umwandlung in ein Matrix-Gleichungssystem bei der Schaltungssimulation verwendet.

**Elektrisches Bauelement:** Eine reale oder virtuelle Anordnung mit mindestens zwei punktförmig definierten Anschlüssen ("Klemmen") in die Ströme hinein (heraus) fließen können und zwischen denen im Allgemeinen Spannungen anliegen. Den Zusammenhang zwischen Strömen und Spannungen beschreiben die *konstituierenden Gleichungen*, vgl. Kap. 2.2 des jeweiligen Bauelements. Sonderfall sind ideale Strom- oder Spannungsquellen, bei denen die Quellgröße konstant und die jeweils andere Größe beliebig (vom angeschlossenen Netzwerk bestimmt) ist. Für die grafische Darstellung werden Symbole verwendet, die meist genormt sind, jedoch z.T. unterschiedlichen Normen folgen.

**Elektrisches Netzwerk, elektrische Schaltung:** Verknüpfung von beliebigen (linear, nichtlinear, zeitabhängig, verteilt, konzentriert ...) elektrischen Bauelementen mittels ideal leitender ( $R=0$ ,  $Z=0$ ) Verbindungen zwischen den Anschlüssen der Bauelemente.

**Knoten:** Punktförmige ideal leitende Verknüpfung von mindestens zwei ideal leitenden Verbindungen. Ein Knoten kann in mehrere Knoten aufgespalten werden, solange die Aufspaltung mit idealen Verbindungen erfolgt. Entsprechend

können über ideale Verbindungen zusammenhängende Knoten zu einzelnen Knoten zusammengefasst werden.

Zweig: Verbindung zwischen zwei Knoten durch ein Bauelement. Durch die Verbindung fließt im Allgemeinen ein Strom und es fällt eine Spannung ab (Spannung zwischen den beiden Knoten). Anmerkung: Bei Bauelementen mit mehr als zwei Anschlüssen ist der Zweig-Begriff im Allgemeinen abstrakt zu verstehen. Damit ist gemeint, dass zwischen den Anschlüssen beliebige Zweige definiert werden können, solange die Kirchhoffschen Knoten und Spannungsregeln (KCL, KVL) erfüllt werden. In der Regel ist es am einfachsten die Definition so zu wählen, dass sie den gegebenen *konstituierenden Gleichungen* entsprechen. Ein Beispiel dazu zeigt die nachfolgende Abbildung.

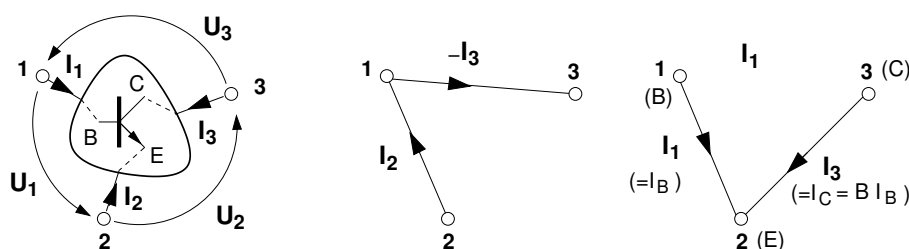


Abb. 2: Links: Dreipol, z.B. Bipolar-Transistor. Mitte und Rechts: Zwei Varianten der Zweigdefinition. Es genügen aufgrund KCL und KVL zwei Zweige, um die jeweils drei möglichen Ströme und Spannungen eindeutig zu definieren. In der rechten Abbildung wurden zur besseren Anschaulichkeit die Zweige entsprechend der Zweige des Transferstrommodells des normal aktiven Bipolartransistors gewählt.

Tor: Zwei Anschlüsse, deren Strom die Torbedingung erfüllt: Der Strom, der in den einen Anschluss hineinfließt, muss aus dem Anderen herausfließen.

Eintor(-Element): Jedes elektrische Netzwerk und damit auch jedes Bauelement mit nur zwei Anschlüssen erfüllt die Torbedingung (Beweis durch Kirchhoffsche Knotenregel, KCL).

Topologie (eines el. Netzwerks): Struktur der Verbindungen eines elektrischen Netzwerks in Form von Zweigen und Knoten, welche die Kirchhoffschen Spannungs- und Stromgleichungen (KVL, KCL) des Netzwerks befolgen.

Graph (gerichtet) eines el. Netzwerks: Darstellung der Topologie des Netzwerks mit Definition der Strom- bzw. Spannungsrichtung an einem Zweig. Zur Identifikation werden Zweige und Knoten in der Regel durchgehend nummeriert. Bei einem verbundenen Graphen kann jeder Knoten über eine beliebige Sequenz von Zweigen erreicht werden. Wir vereinbaren an dieser Stelle, im Folgenden ausschließlich Netzwerke mit verbundenen Graphen zu behandeln.

Kirchhoffsche Spannungs(umlauf)-Regel (KVL): Aus Maxwellschen Gl. folgt allgemein die Wegunabhängigkeit des Integrals für die Spannung  $U_{21}$  zwischen zwei beliebigen Punkten (Knoten)  $P1, P2$ :  $\int_{P1}^{P2} \vec{E} d\vec{s} = U_{21}$ . Übertragen auf ein elektrisches Netzwerk lässt sich diese Eigenschaft wie folgt definieren:

Für alle in Form eines verbundenen Graphen darstellbare Netzwerke, für alle darin geschlossenen Umläufe über eine beliebige Sequenz von  $N$  Knoten gilt zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$ , dass die algebraische Summe aller  $N$  Knoten-zu-Knoten Spannungen  $u_n(t)$  entlang der geschlossenen Knoten-Sequenz gleich Null ist

$$\sum_{n=1}^N u_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (1)$$

Anmerkung:

- 1) Knoten-zu-Knoten Sequenz erfordert keinen Umlauf über Zweige.
- 2) Bei Umlauf über  $N$  Knoten sind  $N - 1$  Spannungen unabhängig, d.h. eine Spannung ist abhängig.

Kirchhoffsche Knotenregel (KCL): Aus den Maxwellschen Gleichungen folgt dass der Gesamtfluss aus einer geschlossenen Hülle (in eine geschlossene Hülle) Null ist :  $\iint_{F(V)} \vec{J} d\vec{f} = 0$  (Kontinuitätsgleichung). Übertragen auf ein elektrisches Netzwerk lässt sich diese Eigenschaft wie folgt definieren:

Für alle in Form eines verbundenen Graphen darstellbare Netzwerke, für alle darin definierbaren geschlossenen Hüllen<sup>1</sup> gilt zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$ , dass die algebraische Summe aller  $N$  Zweigströme  $i_n(t)$  in die Hüllfläche hinein (aus der Hüllfläche heraus) gleich Null ist.

$$\sum_{n=1}^N i_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (2)$$

Anmerkung:

- 1) Geschlossene Hülle ist nicht auf Knoten beschränkt. Definition von Überknoten ist möglich.
- 2) Bei  $N$  Strömen in eine geschlossene Hülle sind  $N - 1$  Ströme unabhängig, d.h. ein Strom ist abhängig.

Gesamtleistung eines Netzwerks: Es lässt sich einfach zeigen (z.B. über Tellegen Theorem), dass die Gesamtleistung in einem abgeschlossenen Netzwerk (Gaußsche Hülle umfasst das gesamte Netzwerk) zu jedem Zeitpunkt gleich Null ist. Für ein Netzwerk mit  $N$  Zweigen mit Zweigspannung  $u_n(t)$ , Zweigstrom  $i_n(t)$  und dem Augenblickswert der Zweigleistung  $p_n(t)$  in einem Zweig  $n$  gilt

$$\sum_{n=1}^N u_n(t) i_n(t) = \sum_{n=1}^N p_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>genauer: Gaußsche Oberflächen, d.h. zweiseitige (Innen- und Außenseite), überschneidungsfreie, geschlossene Oberflächen.

Anmerkung:

- 1) Spannung und Strom sind in dieser Bilanzgleichung gleich gerichtet definiert.
- 2) Ergeben sich *bei dieser Definition positive Werte* (z.B. bei einem Zweig mit einem Widerstand), so nimmt dieser Zweig eine Leistung auf. Im Fall eines Widerstandes wird diese Leistung in Wärme umgewandelt. Im allgemeinen Sprachgebrauch spricht man dann von *Verlustleistung*.
- 3) Ordnet man die Summe in Gl. 3 so um, dass alle Verlustleistungsterme auf der einen Seite verbleiben und die verbleibenden Terme auf die andere Seite des Gleichheitszeichens verschoben werden, so erhält man eine Leistungsbilanz der Form *abgegebene Leistung (durch Quellen) = aufgenommene Leistung (Verlustleistung)*.
- 4) Die *abgegebene Leistung* hat dabei aufgrund der Verschiebung auf die andere Seite des Gleichheitszeichens ein *negatives Vorzeichen* erhalten. Dieses Vorzeichen kann als Umkehr des Spannungs- oder des Strompfeils interpretiert werden.
- 5) Fazit als Regel: Zweige mit gleichgerichtet definierten Spannungs- und Strompfeilen nehmen Leistung auf, wenn das Produkt  $u(t)i(t) > 0$  ist. Für  $u(t)i(t) < 0$  gibt ein Zweig Leistung ab.
- 6) Vorsicht bei Zweigen mit einer Quelle. Diese geben zwar meist, wie der Name vermuten lässt, eine Leistung ab, jedoch ist dies nicht immer und schon garnicht per Definition der Fall. Eine (Spannungs- oder Strom)-Quelle kann sowohl Leistung abgeben als auch aufnehmen wie das abschließende Beispiel zeigt.

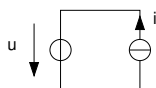


Abb. 3: Ein einfaches Beispiel zur Demonstration, dass Quellen sowohl Leistung aufnehmen als auch abgeben können. Hier hängt die Antwort welche der beiden Quellen Leistung abgibt bzw. aufnimmt davon ab, ob  $u$  bzw.  $i$  einen positiven oder negativen Wert besitzen. Für den Fall, dass beide Werte positiv sind, gibt die Stromquelle Leistung ab (da  $u i < 0$ ) und die Spannungsquelle nimmt Leistung auf (da  $u i > 0$ ).

## 2.2 Konstituierende Modell-Gleichungen

Die konstituierenden Gleichungen eines Bauelements geben den Zusammenhang zwischen Spannungen und Strömen an den Anschlüssen/Klemmen eines elektrischen Bauelements an. Genauer gesagt geben sie die Strom/Spannungszusammenhänge an einem Modell, das die zu beschreibende Eigenschaften eines elektrischen Bauelements nachbildet an (vgl. z.B. Transistormodell o.ä.). Dabei kann das Bauelement auch aus einer komplexen Zusammenschaltung mehrerer einzelnen Bauelemente bestehen (z.B. Operationsverstärker oder Mikrocontroller). Im Allgemeinen ist dieser Zusammenhang nichtlinear (nichtlineare Schaltung), kann aber durch Linearisierung in einem bestimmten Betriebspunkt (Ar-

beitspunkt) linearisiert werden. Dadurch ergeben sich einfachere Überlegungen für Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge und einfacher lösbare Gleichungssysteme.

Alle elektrischen Netzwerke und damit auch alle elektronischen Schaltungen werden durch

- den Schaltplan, der die Verknüpfungen der Bauelemente untereinander charakterisiert,
- die Bilanz-Gleichungen KCL, KVL, die getrennt voneinander jeweils nur für Ströme oder nur für Spannungen aufgestellt werden und
- die konstituierenden Gleichungen der Bauelemente, *durch die Spannungen und Ströme in der für jedes Bauelement charakteristischen Art miteinander verknüpft werden*

beschrieben.

Nachfolgend werden mit der Spannungs- und Stromquelle sowie Widerstand ( $R$ ), Induktivität  $L$ , Kapazität  $C$  und gekoppelten Induktivitäten  $M$ , kurz  $RLCM$  die konstituierenden Gleichungen der wichtigsten Bauelemente elektrischer Netzwerke betrachtet.

### 2.2.1 Spannungsquelle

Eine (ideale) Spannungsquelle besitzt einen spezifischen, eindeutig vorgegebenen Spannungsverlauf  $u(t)$  über der Zeit (z.B.  $u(t) = \text{const.} = 1V$  (Gleichspannungsquelle) oder  $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ ,  $U_0 = \text{const.}$  (zeitharmonischer Verlauf)). Die Spannung hängt dabei *nicht* von dem Strom durch die Spannungsquelle ab. Der Strom  $i(t)$  durch die Spannungsquelle kann *beliebige und damit auch negative* Werte annehmen und ergibt sich ausschließlich über die konstituierende Gleichung des an das Tor der Spannungsquelle angeschlossenen Netzwerks. Zu jedem Zeitpunkt  $t = t_0$  gilt daher

$$u(t = t_0) = \text{const.} \quad \forall i(t_0) \quad (4)$$

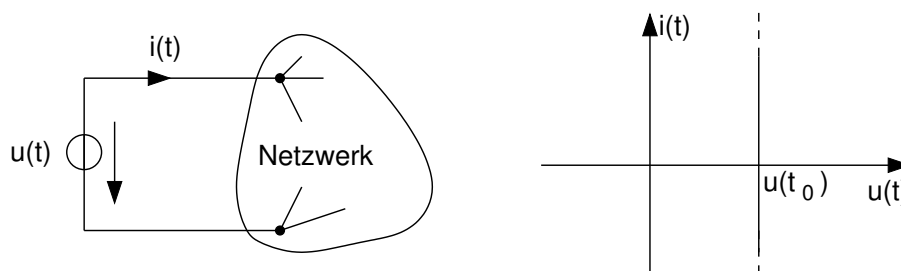


Abb. 4: Links: ideale Spannungsquelle mit beliebigem elektrischen Netzwerk als Last. Der Strom  $i(t)$  ergibt sich aus der konstituierenden Gleichung des Netzwerks. Rechts: Kennlinie einer idealen Spannungsquelle mit einem Zeitwert der Spannung  $u(t_0)$  bei beliebigen Lastströmen.

Innenwiderstand einer idealen Spannungsquelle: Da wir keine Voraussetzungen an einen Zusammenhang zwischen Innenwiderstand und Quellspannung getroffen haben, ist der Innenwiderstand einer idealen Spannungsquelle allgemein

unabhängig von der Quellspannung. Damit lässt sich der Innenwiderstand am einfachsten bei einem Wert der Quellspannung von Null (d.h.  $u(t_0) = 0$ ) bestimmen. Aus der Kennlinie in Abb. 4 ergibt sich dann ein senkrechter Verlauf entlang der y-Achse, was einem linearen Widerstand mit dem Wert Null entspricht. Das gleiche Ergebnis ergibt sich bei Linearisierung in einem beliebigen (Arbeits)punkt  $i_0$  entlang der Kennlinie, d.h.  $\left. \frac{du}{di} \right|_{i_0} = 0$ . Wird die Quellspannung auf Null gesetzt, repräsentiert die ideale Spannungsquelle einen Kurzschluss, d.h. die Spannung beträgt immer Null, unabhängig vom Strom, der durch die Quelle fließt.

### 2.2.2 Stromquelle

Hier gelten analog die Aussagen zur Spannungsquelle nur mit Strom und Spannung jeweils vertauscht. Eine (ideale) Stromquelle besitzt einen spezifischen, eindeutig vorgegebenen Stromverlauf  $i(t)$  über der Zeit (z.B.  $i(t) = \text{const.} = 1A$  (Gleichstrom-Quelle) oder  $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ ,  $I_0 = \text{const.}$  (zeitharmonischer Verlauf)). Der Strom hängt dabei *nicht* von der Spannung über der Stromquelle ab. Die Spannung  $u(t)$  über der Stromquelle kann *beliebige und damit auch negative* Werte annehmen und ergibt sich ausschließlich über die konstituierende Gleichung des an das Tor der Stromquelle angeschlossenen gesamten Netzwerks. Zu jedem Zeitpunkt  $t = t_0$  gilt daher

$$i(t = t_0) = \text{const.} \quad \forall u(t_0) \quad (5)$$

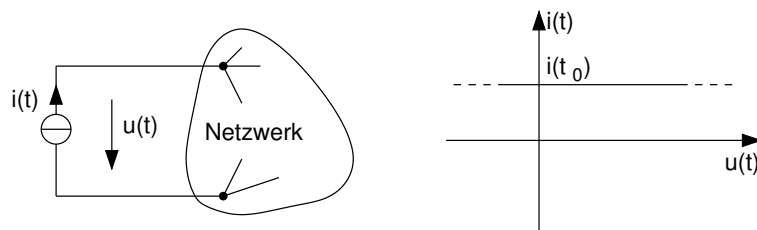


Abb. 5: Links: ideale Spannungsquelle mit beliebigem elektrischen Netzwerk als Last. Der Strom  $i(t)$  ergibt sich aus der konstituierenden Gleichung des Netzwerks. Rechts: Kennlinie einer idealen Spannungsquelle mit einem Zeitwert der Spannung  $u(t_0)$  bei beliebigen Lastströmen.

Innenwiderstand einer idealen Stromquelle: Entsprechend der Überlegungen zur Spannungsquelle ergibt sich aufgrund des horizontalen Verlaufs der Kennlinie der Stromquelle ein Innenwiderstand von Unendlich. Wird der Quellstrom auf Null gesetzt repräsentiert die ideale Stromquelle einen Leerlauf, d.h. der Strom beträgt immer Null, unabhängig von der an die Quelle angelegten Spannung.

### 2.2.3 Reale Strom- und Spannungsquelle

Bei einer realen Spannungsquelle führt ein Stromfluss dazu, dass die an den Klemmen zugängliche Spannung sich im Maße des Stromflusses verringert. Oft besteht zwischen Stromfluss und Verringerung der Klemmspannung ein (näherungsweise) linearer Zusammenhang, so dass das in Abb. 6 links gezeigte Modell einer realen Spannungsquelle anwendbar ist.



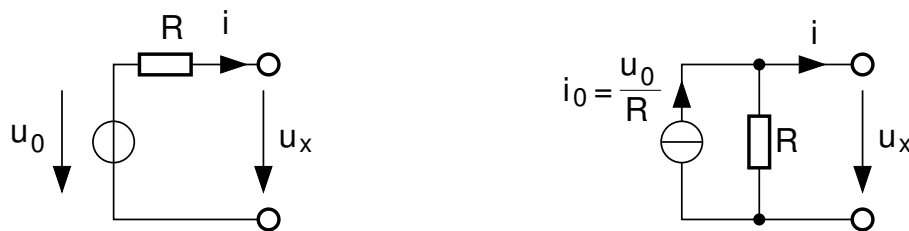


Abb. 6: Links: reale Spannungsquelle. Rechts: (Nur) bezüglich der Klemmgrößen  $u_x$  und  $i$  äquivalente Darstellung als reale Stromquelle (sog. Norton-Thevenin Äquivalenz-Umwandlung).

Die zu beobachtende Verringerung der Klemmspannung wird darin durch einen linearen Widerstand  $R$  in Reihe zu einer idealen Spannungsquelle modelliert. Bezüglich der Klemmgrößen  $u_x$  und  $i$  kann anstelle des in der Abbildung links gezeigten Modells auch die rechts abgebildete Variante verwendet werden, die sich einfach über Umformung der Netzwerkgleichungen der linken Schaltung ergibt.

$$u_x = u_0 - iR \quad (6)$$

$$i = \frac{1}{R}(u_0 - u_x) \quad (7)$$

$$= \underbrace{\frac{u_0}{R}}_{i_0} - \frac{u_x}{R} \quad (8)$$

Eine einfache Inspektion der rechten Schaltung zeigt, dass diese äquivalent mit der letzten Gleichungszeile ist.

### 2.2.4 Elektrischer Widerstand

Ein elektrischer Widerstand resultiert aus der für ein Bauelement beabsichtigten oder der unerwünschten endlichen Leitfähigkeit eines Leiters. Wir betrachten im Folgenden nur Leiter mit zwei Anschlüssen, d.h. Widerstände in Form von Eintor-Elementen.

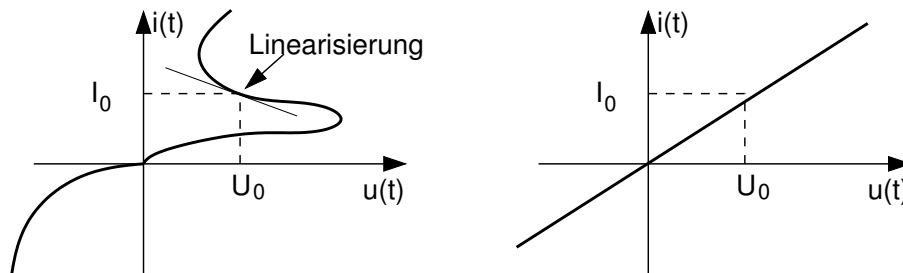


Abb. 7: Links: Kennlinie eines nichtlinearen, stromgesteuerten Widerstands. Als Beispiel für eine Linearisierung in einem Arbeitspunkt wurden  $U_0, I_0$  im Bereich der negativen Steigung gewählt. Rechts: Beispiel für einen linearen Widerstand.

Der Widerstand verknüpft Spannung und Strom in der allgemeinen zeit-unabhängigen Form  $u = u(i)$  bei stromgesteuerten bzw.  $i = i(u)$  bei span-

nungsgesteuerten Widerständen. Im Falle eines in der Regel für Widerstands-Bauelemente beabsichtigten linearen Zusammenhangs ergibt sich  $u = R i$ . Bei nichtlinearen Widerständen kann bei hinreichend kleinen Aussteuerungen um einen Arbeitspunkt  $i = I_0, u = u(I_0)$  bzw.  $u = U_0, i = i(U_0)$  auf der Kennlinie der Kleinsignal-Widerstand über  $R = \left. \frac{du}{di} \right|_{U_0, I_0}$  bestimmt werden. Hinweis: bei einer Reihe von Bauelemente existieren Betriebsbereiche, in denen die Kennlinie eine negative Steigung aufweist. Dadurch wird der Kleinsignalwiderstand negativ, was zur Instabilität der Schaltung in diesen Bereichen führen kann.

### 2.2.5 Kapazität

Die elektrische Kapazität beschreibt das Vermögen einer Leiteranordnung, elektrische Ladung in Abhängigkeit von der angelegten Spannung zu speichern. Dies kann eine erwünschte Eigenschaft bei der Realisierung von Kondensatoren sein. Unerwünschte Kapazität wird oft auch als *parasitäre Kapazität* bezeichnet und tritt grundsätzlich zwischen allen Leitern einer beliebigen Anordnung auf. Wir betrachten im Folgenden nur Kondensator-Bauelemente mit zwei Anschlüssen, d.h. in Form von Eintor-Elementen. Die Definition der Kapazität ergibt sich über die Definition des Stroms in Form der pro Zeit  $dt$  fließenden elektrischen Ladung  $dq$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}, \quad (9)$$

$$= \underbrace{\frac{dq}{du}}_{C(u)} \frac{du}{dt} \quad \text{mit} \quad C(u) := \frac{dq}{du}, \quad (10)$$

$$= C(u) \frac{du}{dt}. \quad (11)$$

$$(12)$$

Im Falle eines in der Regel bei Kondensator-Bauteilen beabsichtigten linearen Zusammenhangs zwischen Ladung und Spannung ergibt sich eine konstante Kapazität  $C = \frac{dq}{du} = \frac{q}{u}$ .

Hinweis: für eine mathematische Behandlung stellt die Spannung an der Kapazität eine stetige und damit differenzierbare Größe dar, da sie über die Definitionsgleichung mit der Kapazität direkt proportional zur Ladung ist, die sich als eine physikalischen Größe nur stetig ändern kann.

### 2.2.6 Induktivität

Die Induktivität beschreibt eine zur Kapazität duale Eigenschaft einer Leiteranordnung. Das bedeutet, dass sich die gleichen Eigenschaften wie bei der Kapazität ergeben, wenn die Rollen von Strom und Spannung vertauscht werden. An die Stelle der elektrischen Ladung tritt der (verkettete) magnetische Fluss. In diesem Sinne lässt sich der Absatz über Kapazität wie folgt umformulieren.

Die Induktivität beschreibt das Vermögen einer Leiteranordnung magnetischen Fluss in Abhängigkeit des durch die Anordnung fließenden Stroms zu speichern. Dies kann eine erwünschte Eigenschaft bei der Realisierung von Induktivitäts-, Spulen- oder Übertrager- oder Transformator-Bauelementen

sein. Unerwünschte Induktivität wird oft auch als *parasitäre Induktivität oder induktive Verkopplung* bezeichnet und tritt grundsätzlich zwischen allen Leitern einer beliebigen Anordnung auf, in denen Ströme fließen können. Wir betrachten im Folgenden nur Induktivitäten als Bauelemente mit zwei Anschlüssen, d.h. in Form von Eintor-Elementen. Die Definition der Induktivität ergibt sich über die Definition der Spannung in Form des pro Zeit  $dt$  erzeugten magnetischen Flusses  $dq$ .

$$u(t) = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (13)$$

$$= \underbrace{\frac{d\Phi}{di}}_{L(i)} \frac{di}{dt} \quad \text{mit} \quad L(i) := \frac{d\Phi}{di}, \quad (14)$$

$$= L(i) \frac{di}{dt}. \quad (15)$$

$$(16)$$

Im Falle eines in der Regel bei Induktivitäts-Bauteilen beabsichtigten linearen Zusammenhangs zwischen magnetischem Fluss und Strom ergibt sich eine konstante Induktivität  $L = \frac{d\Phi}{di} = \frac{\Phi}{i}$ .

Hinweis: für eine mathematische Behandlung stellt der Strom durch die Induktivität eine stetige und damit differenzierbare Größe dar, da er über die Definitionsgleichung mit der Induktivität direkt proportional zum magnetischen Fluss ist, der sich als eine physikalische Größe nur stetig ändern kann.

### 2.2.7 Memristor

Der Memristor war lange Zeit seit seiner formalen Einführung<sup>2</sup> in 1971 ein theoretisches Artefakt, das sich rein aus der Beobachtung der Symmetrie der Beziehungen zwischen Strom, Spannung, elektrischem und magnetischem Fluss ergab. Daraus postulierte Chua, dass es neben dem Widerstand (Verknüpfung von  $du/di$ ), der Kapazität (Verknüpfung von  $dq/du$ ) und der Induktivität (Verknüpfung von  $d\Phi/di$ ) auch ein Element geben müsste, das eine  $d\Phi/dq$  Verknüpfung herstellt. Dieses Element nannte er Memristor und den Grad der Verknüpfung (Wirkungsfunktion) wurde mit Memristanz  $M := d\Phi/dq$  bezeichnet. Diese sollte nicht mit der in dieser Veranstaltung häufig verwendeten Gegeninduktivität, die ebenfalls allgemein mit  $M$  bezeichnet wird, verwechselt werden. Spätestens seit 2007/2008 konnten erstmals auch memristive Bauelemente hergestellt werden, die durchaus Potenzial z.B. als energieeffiziente Informationsspeicher haben könnten. Der Memristor wird wegen der (noch?) geringen Bedeutung als grundlegendes Bauelement in dieser Veranstaltung nicht weiter betrachtet.

### 2.2.8 Gekoppelte Induktivitäten (Übertrager)

Grundsätzlich koppeln alle stromdurchflossenen Leiter miteinander. Die Ursache dafür ist der magnetische Fluss, der in einem Leiter erzeugt wird und alle geschlossenen Strompfade (Stromkreise) durchdringt. Bei dem Übertrager und

<sup>2</sup>Leon O. Chua, "Memristor - The missing circuit Element", IEEE Transactions on Circuit theory, no. 5, Sep. 1971

Transformator als elektrische Bauelemente wird diese Eigenschaft gezielt genutzt. Abb. 8 zeigt die grundsätzliche Wirkungsweise anhand zweier verkoppelter Leiterschleifen.

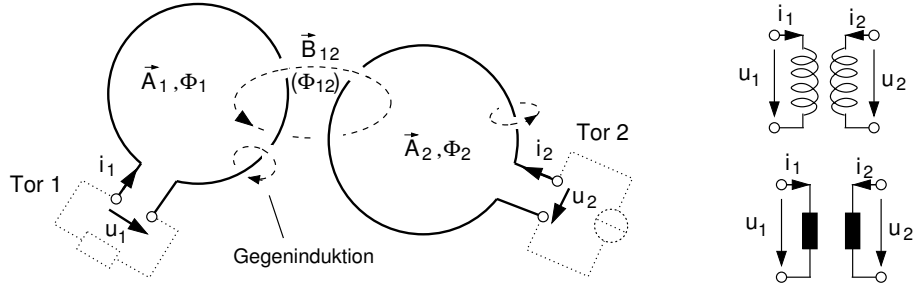


Abb. 8: Links: Zwei durch eine magnetische Flussdichte  $\vec{B}_{12}$  gekoppelte geschlossene Leiterschleifen. In diesem Beispiel wird an Tor 2 ein zeitveränderlicher Strom  $i_2$  eingeprägt und die dadurch an Tor 1 induzierte Spannung  $u_1$  betrachtet. Rechts: Zwei Schaltplan-Symbole zur Darstellung von verkoppelten Leiterschleifen, Übertragern oder Transformatoren.

Die darin eingetragenen Spannungs- und Stromrichtungen sind beliebig gewählt worden, jedoch müssen die konstituierenden Gleichungen den Zusammenhang der Richtungen zwischen den beiden Toren durch entsprechende Vorzeichenwahl für die konkrete Anordnung abbilden. Dazu dienen die folgenden Überlegungen.

- Durch den in der Leiterschleife 2 fließenden zeitveränderlichen Strom  $i_2$  wird eine magnetische Flussdichte erzeugt, von der ein Teil  $\vec{B}_{12}$  die Fläche  $\vec{A}_1$  der Leiterschleife 1 durchdringt und dort einen Fluss  $\Phi_{12} = \int_{\vec{A}_1} \vec{B}_{12} d\vec{A}$  hervorruft.
- Aufgrund des Induktionsgesetzes wird in der ersten Schleife eine Spannung  $u_1$  induziert, die zu einem Strom  $i_1$  führt. Die aus  $i_1$  resultierende Flussdichte ist der verursachenden Flussdichte  $\vec{B}_{12}$  entgegen gerichtet (Gegeninduktion, vgl. Abb. 8). Der Stromfluss von  $i_1$  muss dafür entgegen der eingezeichneten Richtung von  $i_1$  sein. Die Richtung von  $u_1$  stimmt mit der eingezeichneten Richtung überein.
- Der magnetische Fluss in Schleife 1

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12} \quad (17)$$

setzt sich zusammen aus dem durch  $i_1$  erzeugten Fluss  $\Phi_{11}$  und dem Anteil  $\Phi_{12}$  des von  $i_2$  in Leiterschleife 2 erzeugten und Flusses  $\Phi_2$ , der auch Leiterschleife 1 durchdringt. Das Vorzeichen von  $\Phi_{12}$  hängt von der konkreten Anordnung ab und soll im Folgenden für das Beispiel in Abb. 8 bestimmt werden.

- Aus dem Induktionsgesetz folgt mit Gl. 17

$$u_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_{11}}{dt} \pm \frac{d\Phi_{12}}{dt}, \quad (18)$$

$$= L_{11} \frac{di_1}{dt} \pm L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad \text{mit } L_{11} := \frac{d\Phi_{11}}{di_1}, \quad L_{12} := \frac{d\Phi_{12}}{di_2}. \quad (19)$$

- Da wir aus den Vorüberlegungen wissen, dass bei einem Stromfluss in Schleife 2 in Richtung des eingezeichneten Stromes  $i_2$  die Richtung von  $u_1$  mit der eingezeichneten Richtung übereinstimmt gilt das ”+“ Zeichen.
- Analoge Überlegungen gelten bei Einspeisung eines Stromes in Schleife und Betrachtung der induzierten Spannung in Schleife 2. Es ergibt sich

$$u_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{d\Phi_{22}}{dt} \pm \frac{d\Phi_{21}}{dt}, \quad (20)$$

$$= L_{22} \frac{di_2}{dt} \pm L_{21} \frac{di_1}{dt} \quad \text{mit } L_{22} := \frac{d\Phi_{22}}{di_2}, \quad L_{21} := \frac{d\Phi_{21}}{di_1}. \quad (21)$$

Wobei ebenfalls das ”+“ Zeichen gilt.

Anmerkungen:

- $L_{11}$ ,  $L_{22}$  werden als Eigeninduktivitäten bezeichnet, da sie den Ursache- (eingepägter Strom) Wirkungs- (induzierte Spannung) Zusammenhang für die selbe Schleife beschreiben. Dagegen werden  $L_{12}$ ,  $L_{21}$  als Gegen- oder Koppelinduktivitäten bezeichnet, da sie den Ursache-Wirkungs-Zusammenhang zwischen den beiden verkoppelten Schleifen beschreiben.
- Man kann einfach z.B. mit dem Satz von Tellegen (Master Vorlesung Hochfrequenztechnik) zeigen, dass der nur aus passiven Elementen (Induktivitäten) bestehende Übertrager ein reziprokes Bauelement ist, für das immer  $L_{12} = L_{21}$  mit gleichen Vorzeichen gelten muss.
- Zur Vereinfachung wird wegen der reziproken Eigenschaft oft auch mit der Gegeninduktivität  $M = L_{12} = L_{21}$  gearbeitet.
- Allgemein gelten für die beiden Tore zweier gekoppelter beliebiger Leiter und damit auch für Übertrager oder Transformatoren die konstituierenden Gleichungen

$$u_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} \pm L_{12} \frac{di_2}{dt}, \quad (22)$$

$$u_2 = L_{22} \frac{di_2}{dt} \pm L_{21} \frac{di_1}{dt}. \quad (23)$$

Diese Gleichungen können leicht generisch auf eine beliebige Anzahl Tore (d.h. von gekoppelten Leitern) erweitert werden. Z.B. gilt für die Spannung an Tor 1 bei N gekoppelten Leitern

$$u_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} \pm L_{12} \frac{di_2}{dt} \pm L_{13} \frac{di_3}{dt} \dots L_{1N} \frac{di_N}{dt}. \quad (24)$$

### 3 Formale Berechnung linearer elektrischer Netzwerke (Knotenpotenzialverfahren)

Vorüberlegung: Die Quellgröße idealer Quellen ist vorgegeben und *unabhängig* von dem restlichen Netzwerk. Die jeweils andere Größe der Quelle (Strom bzw.

Spannung bei Spannungs- bzw. Stromquelle) hängt ausschließlich vom umgebenden Netzwerk ab und kann nicht wie bei allen anderen Bauelementen über die konstituierenden Gleichungen (aus der Quellgröße) ermittelt werden. Um im Sinne einer allgemeinen Behandlung von Netzwerken keine Sonderregelung von Zweigen mit idealen Quellen zu machen, führen wir das Konzept eines *allgemeinen Zweiges* mit begleiteten Spannungs- bzw. Stromquellen ein.

**Begleitete Quelle:** Durch äquivalente Netzwerk-Umformung ist es immer möglich, einen Zweig mit einer idealen Strom- bzw. Spannungsquelle so umzuformen (Aufspalten und Verteilen), dass die resultierenden Strom- bzw. Spannungsquellen jeweils parallel bzw. in Reihe zu Eintor-Bauelementen liegen.

Sind alle idealen Quellen in Begleitete Quellen umgeformt, besteht das gesamte Netzwerk aus *allgemeinen Zweigen* wie in Abbildung 9 für einen Zweig  $j$  dargestellt.

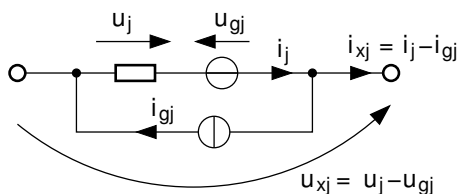


Abb. 9: Allgemeiner Zweig  $j$  mit Quellstrom  $i_{gj}$  und Quellspannung  $u_{gj}$  sowie einem beliebigen Eintorelement.

Obwohl nicht immer notwendig oder vorteilhaft soll zum Vorteil einer übersichtlichen Systematik ein Zweig nur jeweils ein Eintorelement (RLCM) enthalten. Eine Reihen- bzw. Parallelschaltung aus zwei Eintorelementen wird demnach durch zwei Zweige dargestellt.

Das derart dargestellte Netzwerk wird in den folgenden Schritten analysiert und berechnet. Zur Verdeutlichung dient ein einfaches Beispielnetzwerk.

- 1) *Erstellen des gerichteten Graphen des Netzwerks.* Richtungen für Zweigströme und -spannungen sind nach Verbraucherzählpfeilsystem gleich gerichtet. Alle Zweige und Knoten werden durchgehend nummeriert.

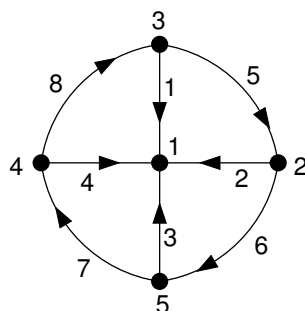


Abb. 10: Gerichteter Graph einer Beispielschaltung mit fünf Knoten und acht Zweigen.

- 2) *Definieren eines Baumes/Kobaumes.* Verfahren am Beispiel der Anwendung von KCL: Beginne bei einem beliebigen Knoten und wähle einen

Zweig, der den abhängigen Strom führen soll (vgl. Anmerkungen zu KCL). Gehe über einen Zweig zum nächsten Knoten und wähle dort einen abhängigen Zweig. Für alle anderen Zweige an diesem Knoten existieren bereits schon zuvor definierte unabhängige und abhängige Ströme oder es werden weitere unabhängige Ströme vorgegeben. Setze dieses Verfahren systematisch fort, bis alle Knoten des Graphen besucht wurden. Am Ende sind alle Knoten durch abhängige Zweige miteinander verbunden, da jeder Knoten an mindestens einen abhängigen Zweig angeschlossen ist und sämtliche Knoten des Netzwerks besucht wurden. Geben wir jedem *unabhängigen* Zweig einen Strom mit dem Index der Zweignummer, entsteht z.B. der Graph in der folgenden Abbildung.

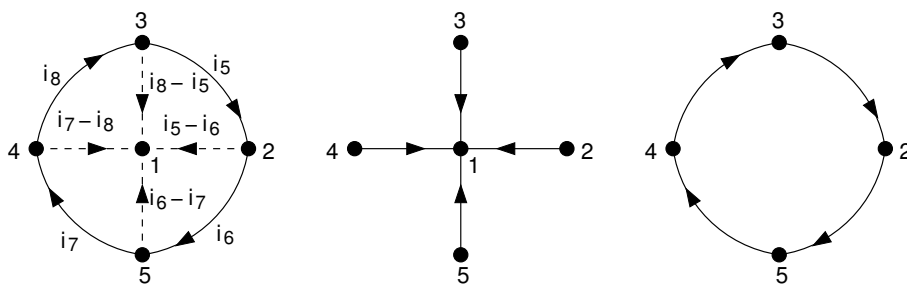


Abb. 11: Links: Definition von Baum und Kobaum durch Wahl von abhängigen Zweigen. Abhängige Zweige sind gestrichelt dargestellt. Mitte: Der resultierende Baum. Rechts: der Kobaum.

Da unabhängige Zweige ihren vorgegebenen Strom ( $i_5, i_6, i_7, i_8$ ) führen, können sich diese Ströme nur über abhängige Zweige schließen. Warum schließen? Ein Strom, der auf einer Seite aus einem Zweig herausfließt, fließt am anderen Ende des Zweiges in ihn hinein (Beweis durch Kontinuitätssatz bzw. KCL mit Überknoten). Wir nennen den Teil des Graphen, der die abhängigen Zweige enthält Baum, der restliche Teil des Graphen ist der Kobaum. Die Baum/Kobaumzweige heißen in der englischen Literatur *twigs/links*. Hat der Graph  $n + 1$  Knoten, so lassen sich diese mit  $n$  Baumzweigen miteinander verbinden. Dies lässt sich einfach durch vollständige Induktion beweisen. Anhand des Beweises lässt sich auch sehen, dass der Baum niemals Schleifen haben kann. Auch lässt sich einfach zeigen, dass durch die Zweigspannungen des Baumes alle Spannungen des Kobaumes bereits definiert sind (Beweis durch KVL mit Spannungsumläufen die jeweils nur einen Kobaumzweig als abhängige Spannung enthalten). Sämtliche Ströme des Graphen sind also durch die Kobaumströme definiert und sämtliche Spannungen durch die Baumspannungen.

- 3) *Überführen des Netzwerk-Graphen in Matrix Schreibweise*
  - a) Knoteninzidenzmatrix. Der Graph (das Netzwerk) soll  $n + 1$  Knoten und  $b$  Zweige enthalten. Gleichung 25 zeigt den allgemeinen Aufbau der Knoteninzidenzmatrix des Netzwerks.

$$\mathbf{A}_a = \begin{array}{c} \text{Knoten} \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{array} \begin{array}{c} \text{Zweige} \rightarrow 1,2,3 \dots b \\ \left[ \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1b} \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{ij} & & \\ & & & & \ddots & \\ a_{n+1 1} & & & & & a_{n+1 b} \end{array} \right] \end{array} \quad (25)$$

mit den Matrixeinträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Zweig } j \text{ liegt an Knoten } i \text{ und ist vom Knoten weg gerichtet,} \\ -1 & \text{Zweig } j \text{ liegt an Knoten } i \text{ und ist zum Knoten gerichtet,} \\ 0 & \text{Zweig } j \text{ liegt nicht an Knoten } i. \end{cases}$$

Für das Beispiel in Abb. 10 ergibt sich

$$\mathbf{A}_a = \begin{array}{c} \text{Knoten} \downarrow \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \text{Zweige} \rightarrow \\ \left[ \begin{array}{ccccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (26)$$

Jede Spalte von  $\mathbf{A}_a$  enthält je eine +1 und eine -1. Wenn alle Zeilenvektoren der Matrix addiert werden ergibt dies einen Zeilevektor mit Null-Einträgen. D.h. addiert man nur  $n$  Zeilenvektoren, so muss der resultierende Summenvektor das -1-fache des verbliebenen Zeilenvektors sein. Daraus folgt, dass mindestens eine Zeile linear von den Anderen abhängig ist:  $\text{Rang } \mathbf{A}_a \leq (n+1) - 1 = n$ . In der Tat zeigt der folgende Absatz b), dass  $\text{Rang } \mathbf{A}_a = n$ . Daher genügt es eine Zeile von  $\mathbf{A}_a$  zu eliminieren. Sinnvoller Weise wird die Zeile des Knotens eliminiert, der im Folgenden als Bezugsknoten verwendet werden soll. Die daraus resultierende Matrix heißt reduzierte Knoteninzidenzmatrix  $\mathbf{A}$  und hat die Dimension  $n \times b$ .

- b) Beweis, dass  $\text{Rang } A = n$ , d.h., dass für die Lösung des Netzwerk-Gleichungssystems  $n$  unabhängige Gleichungen zur Verfügung stehen. Beweisschritte:
- i) Wir wählen ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit willkürlich einen Bezugsknoten (im Beispiel Knoten 5) und streichen die entsprechende Zeile in der Matrix  $\mathbf{A}_a$ , die dadurch zur reduzierten Knoteninzidenzmatrix  $\mathbf{A}$  mit  $n$  Zeilen wird.
  - ii) Wir wählen aus  $\mathbf{A}$  die Spalten aus, die zum Baum gehören und fassen diese zu der Untermatrix  $A_t$  zusammen.  $A_t$  hat bei  $n+1$  Knoten des Baumes genau  $n$  Spalten entsprechend  $n$  Zweigen, die zum Verbinden der Knoten des Netzwerks notwendig sind. Damit ist  $\mathbf{A}_t$  eine quadratische  $n \times n$  Matrix. Die restlichen Spalten, die zu den Zweigen des Kobaumes gehören, fassen wir in der Matrix  $\mathbf{A}_l$  zusammen. Damit können wir schreiben.



$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t \mathbf{A}_1]. \quad (27)$$

iii) Der restliche Beweis verwendet nur noch  $\mathbf{A}_t$  und zeigt, dass deren Rang gleich  $n$  ist. Da der Rang von  $\mathbf{A}$  nicht größer als  $n$  sein kann ist der Beweis abgeschlossen.

iv) Zur eingängigeren Erläuterung der weiteren Vorgehensweise betrachten wir das Beispiel aus der Matrix in Gl. 26, nachdem die Zeile des Bezugsknoten 5 gestrichen wurde

$$\mathbf{A}_t = \begin{array}{c} \text{Knoten } \downarrow \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Baum-Zweige } \rightarrow \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

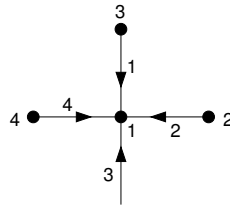


Abb. 12: Baum ohne Bezugsknoten 5 entsprechend den Einträgen in Gl. 28.

v) Da die Zeile des Bezugsknotens beim Übergang  $\mathbf{A}_a \rightarrow \mathbf{A}$  gelöscht wurde, haben die an diesen Knoten angeschlossenen Zweige (= Spalten) in  $\mathbf{A}$  nur noch einen  $\pm 1$  Eintrag. Dieser Eintrag steht in den Zeilen, die zu Knoten gehören, die über Zweige mit dem gelöschten Bezugsknoten verbunden sind. In unserem Beispiel sind das die Zweige 3, 6 und 7, wobei nur Zweig 3, der zu Knoten 1 führt, zur betrachteten Untermatrix  $\mathbf{A}_t$  gehört. Daher berechnen wir die Determinante von  $\mathbf{A}_t$  über eine Kofaktor Entwicklung in der Spalte von Zweig 3, die sich auf den  $-1$  Eintrag für Knoten 1 reduziert. Wir erhalten allgemein als Ergebnis  $(-1)^{n+m} \cdot a_{nm}$ . (Unterdeterminante, die durch Streichen der  $n$ -ten Zeile und  $m$ -ten Spalte dieses einen Eintrags entsteht). Im Beispiel ist dies

$$\det(\mathbf{A}_t) = (-1)^{(1+3)} a_{13} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (29)$$

vi) Bei der Elimination der Zeile des ersten Elementes bei der Kofaktor Entwicklung (im Beispiel Zeile 1) wurde der noch verbliebene Knoten des Zweiges gelöscht, der an dem gelöschten Bezugsknoten lag. Da wir einen verbundenen Graphen betrachten, muss an diesem Knoten mindestens ein weiterer Zweig angeschlossen sein. Wir schreiben zur Vereinfachung im

Plural weiter. Durch die Löschung des Knotens fehlt diesen Zweigen wiederum ein Knoten, was sich durch nur jeweils einen  $\pm 1$  Eintrag in den entsprechenden Spalten dieser Zweige äußert. Die Entwicklung der Determinante von  $\mathbf{A}_t$  verwendet im nächsten Schritt eine Spalte (=Zweig) mit nur einem dieser Einträge. Die Entwicklung der verbliebenen Unterdeterminante reduziert sich wiederum nur auf dieses eine Element, in der Art wie bereits im Schritt zuvor beschrieben. In unserem Beispiel sind durch die Löschung des zentralen Knotens 1 sämtliche Zweige mit nur noch einem Knoten verblieben. Wir wählen zur Kofaktor Entwicklung Zweig 2 und erhalten

$$\det(\mathbf{A}_t) = (-1)(-1)^{(1+2)} a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(1) = 1 \quad (30)$$

vii) Die Kofaktor Entwicklung wird fortgesetzt bis die Determinante vollständig entwickelt ist. Da über den verbundenen Graphen nach jedem Schritt immer mindestens ein Zweig mit nur einem Knoten verbleibt, erhält man bei jedem Entwicklungsschritt einen zusätzlichen  $\pm 1$  Faktor. Dadurch nimmt die Determinante von  $\mathbf{A}_t$  in allen Fällen den Wert  $\pm 1$  ( $\neq 0!$ ) an, wodurch der Rang von  $A_t$  und damit der Rang von  $\mathbf{A}$  immer gleich  $n$  ist, q.e.d.

*Fazit:* Ein Netzwerk mit einem zusammenhängenden Graphen mit  $n + 1$  Knoten (mit einem Baum mit  $n$  Zweigen) hat eine Knotenadmittanzmatrix vom Rang  $n$ .

- 4) *Strombilanzgleichung (KCL).* In jeder Zeile (Knoten) von  $\mathbf{A}$  geben die Einträge  $a_{ij}$  an, ob ein Zweig (Spalte) zum Strom in den Knoten beiträgt (+1 wenn vom Knoten weg,  $-1$  wenn zum Knoten hin orientiert) oder keinen Betrag zum Knoten liefert ( $a_{ij} = 0$ ). Daher können wir die Strombilanzgleichung für das gesamte Netzwerk direkt im Sinne des KCL für jeden Knoten  $i$  formulieren  $\sum_{j=1}^b a_{ij} i_{xj} = 0$  mit  $b$  Anzahl der Zweige des Netzwerks,  $i_{xj}$  allgemeiner Zweigstrom des Zweiges  $j$  vgl. Abb. 9) und  $i = 1 \dots n + 1$  (Anzahl der Knoten des Netzwerks). In Matrixschreibweise

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_x = \mathbf{0} \quad \text{mit } \mathbf{i}_x = (i_{x1}, i_{x2} \dots i_{xb})^T. \quad (31)$$

Wir können mit Gl. 27 und dem nach Baum-  $\mathbf{i}_{xt}$  und Kobaumströmen  $\mathbf{i}_{xl}$  geordneten Zweigstromvektor  $\mathbf{i}_x = [\mathbf{i}_{xt} \mathbf{i}_{xl}]^T$  auch schreiben

$$\mathbf{0} = [\mathbf{A}_t \mathbf{A}_l] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{xt} \\ \mathbf{i}_{xl} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_t \mathbf{i}_{xt} + \mathbf{A}_l \mathbf{i}_{xl}, \quad (33)$$

$$\mathbf{i}_{xt} = -\mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{A}_l \mathbf{i}_{xl}, \quad (34)$$

$$\mathbf{i}_x = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{A}_l \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{i}_{xl}, \quad (35)$$

mit  $\mathbf{1}$  als Einheitsmatrix. Durch diese Beziehung lassen sich die Baumströme aus den Zweigströmen berechnen. Die Inverse  $\mathbf{A}_t^{-1}$  existiert, da wir in dem Beweis zuvor gezeigt haben, dass  $\mathbf{A}_t$  eine  $n \times n$  Matrix vom Rang  $n$  ist.

- 5) *Abspalten von Quellen.* Für jeden Zweig gilt (vgl. Abb. 9)  $i_{xj} = i_j - i_{gj}$  wobei  $i_j$  der Strom durch das mit konstituierenden Gleichungen beschreibbare Element des Zweiges ist und  $i_{gj}$  der Generatorstrom. Damit lässt sich Gl. 31 modifizieren

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_x = \mathbf{0}, \quad (36)$$

$$\mathbf{A} (\mathbf{i} - \mathbf{i}_g) = \mathbf{0}, \quad (37)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{A} \mathbf{i}_g, \quad (38)$$

mit  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_j, \dots, i_b)^T$  und  $\mathbf{i}_g = (i_{g1}, \dots, i_{gj}, \dots, i_{gb})^T$ . Die rechte Seite dieser Gleichung ist in der Regel bekannt, da die Quellen bekannt sind.

- 6) *Umrechnen von Zweigspannungen in Knotenpotenziale.* Wir wählen für das Netzwerk ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit einen Referenzknoten, der identisch mit dem Knoten der Zeile ist, die in der allgemeinen Knoteninzidenzmatrix  $\mathbf{A}_a$  gestrichen wurde. Wir betrachten in Abb. 13 einen beliebigen Zweig  $j$  mit der Zweigspannung  $u_{xj}$ , die vom Knoten  $k$  zum Knoten  $l$  gerichtet ist.

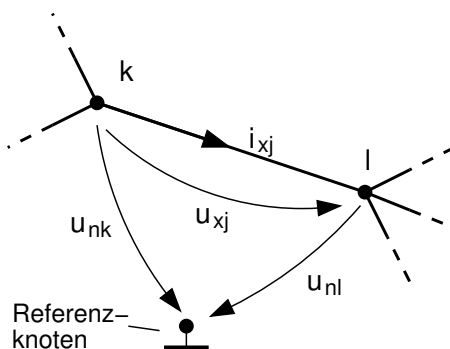


Abb. 13: Zusammenhang zwischen allgemeiner Zweigspannung  $u_{xj}$  zwischen Knoten  $k$  und  $l$  und den zugehörigen Knotenpotenzialen  $u_k$  und  $u_l$ . Der Referenzknoten wird oft auch mit "0", "Masse" oder GND (ground, engl. f. Masse) bezeichnet.

Wir definieren die Knotenpotenziale  $u_{nk}$ ,  $u_{nl}$  als die Spannungen von den Knoten  $u$ ,  $k$  zu dem Referenzknoten, wodurch sich über einen einfachen Spannungsumlauf

$$u_{xj} = u_{nk} - u_{nl} \quad (39)$$

ergibt. Wir wollen die reduzierte Knoteninzidenzmatrix  $\mathbf{A}$  verwenden, um diese Zusammenhänge für alle Zweige des Netzwerks systematisch auszudrücken. Betrachten wir  $\mathbf{A}$  hinsichtlich der Einträge für den Zweig  $j$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \text{Knoten } \downarrow \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ l \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \text{Baum-Zweig} \\ \dots \quad j \quad \dots \\ \vdots \\ \dots \quad 1 \quad \dots \\ \vdots \\ \dots \quad -1 \quad \dots \\ \vdots \end{array} \quad (40)$$

Da die Richtung der Zweigspannung  $u_{xi}$  mit der Richtung des Zweigstromes  $i_{xj}$  übereinstimmt, geben die beiden  $\pm 1$  Einträge in der Spalte des entsprechenden Zweiges  $j$  das richtige Vorzeichen bei der Addition der beiden Knotenpotenziale nach Gl. 39 an. Alle weiteren Einträge in dieser Spalte sind null, da der Zweig nur an zwei Knoten liegen kann. Multiplizieren wir demnach die Einträge dieser Spalte mit einem Vektor  $\mathbf{u}_n$  der Knotenpotenziale, die entsprechend der Knotennumerierung gewählt wurden, erhalten wir die gewünschte Formulierung für die Beziehung zwischen Knotenpotenzialen und Zweigspannungen

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n \quad \text{mit } \mathbf{u}_n = (u_{n1}, u_{n2} \dots u_{nn})^T. \quad (41)$$

- 7) *Formulierung der Netzwerk-Gleichungen im Laplace-Bereich.* Wir betrachten den Zusammenhang von Strom eines linearen (oder linearisierten) RLC-Elements in einem allgemeinen Zweig  $j$  und der zugehörigen Spannung über dem Element. Die konstituierenden Gleichungen liefern

$$\begin{aligned}
\text{Leitwert:} \quad i_j(t) &= \frac{1}{R_j} u_j(t) = G_j u_j(t), \\
\text{Kapazität:} \quad i_j(t) &= C_j \frac{du_j(t)}{dt}, \\
\text{Induktivität:} \quad i_j(t) &= \frac{1}{L_j} \int_{-\infty}^t u_j(\tau) d\tau, \\
&= \frac{1}{L_j} \underbrace{\int_{-\infty}^0 u_j(\tau) d\tau}_{i_j(t=0)} + \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau, \\
&= i_j(t=0) + \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau.
\end{aligned} \quad (42)$$

Für die Induktivität lässt sich die Anfangsbedingung  $i_j(t=0)$  (oder kurz  $i_j(0)$ ) in Form einer Gleichstromquelle mit dem Wert  $I_0 = i_j(0)$  in einem äquivalenten Ersatzschaltbild nach Abb. 14 berücksichtigen.

Die Anfangsbedingung lässt sich demnach in Form des allgemeinen Zweig-Ersatzschaltbildes in Abb. 9 durch Berücksichtigung des Anfangswertes in der Zweigstromquelle  $i_{gj}$  berücksichtigen. Für die in diesem Fall vom Anfangswert befreiten Elemente gilt bei der Laplace-Transformation mit den bekannten Regeln <sup>3</sup>

<sup>3</sup>Vgl. z.B. O. Föllinger, *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*, Hüting Verlag Heidelberg, 9. Auflage, 2007 oder H. Weber, *Laplace-Transformation für Ingenieure der Elektrotechnik*, Teubner Studienskripten, 5. Auflage 1987.

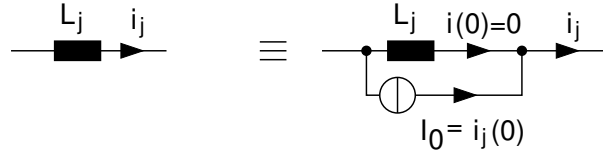


Abb. 14: Äquivalente Berücksichtigung der Anfangsbedingung des Stromes durch eine Induktivität nach Gl. 42 zum Zeitpunkt  $t=0$  in Form einer Gleichstromquelle mit dem Anfangswert  $i_j(0) = \text{const}$ . Die Induktivität ist in diesem Fall ohne Anfangswert, d.h.  $i(0) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 i_j &= G_j u_j & \circ\bullet & I_j = G_j U_j, \\
 i_j &= C_j \frac{du_j}{dt} & \circ\bullet & I_j = sC_j U_j - C_j u_j(t=0+), \\
 i_j &= \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau & \circ\bullet & I_j = \frac{1}{sL_j} U_j, \\
 \sigma(t) i_j(0) & & \circ\bullet & \frac{i_j(0)}{s},
 \end{aligned} \tag{43}$$

mit  $\mathfrak{L}\{i_j(t)\} = I_j(s)$ ,  $\mathfrak{L}\{u_j(t)\} = U_j(s)$ . Zur untersten Zeile in dieser Tabelle: Aufgrund der Konvention des Laplace-Integrals beginnt die Integration zum Zeitpunkt  $t = 0$  und sichert so die Konvergenz des Laplace Integrals. Daher kann keine Gleichstromquelle wie in Abb. 14 zur Berücksichtigung der Anfangsbedingung des Stromes durch die Induktivität in der Transformation verwendet werden. Diese trägt per Definition auch für  $t < 0$  mit ihren konstanten Wert zum Integral bei was bei einem Integrationsbeginn bei  $t = 0$  zu Fehlern führen kann. Zur Lösung wird die Gleichstromquelle mit einer Sprungfunktion  $\sigma(t) = \{0(t < 0), 1(t \geq 0)\}$  multipliziert, wodurch die Konvergenz sichergestellt und gleichzeitig die Anfangsbedingung zum Zeitpunkt  $t = 0$  berücksichtigt wird. Der statische Gleichstromfall wird dadurch für  $t \rightarrow \infty$  erreicht, wenn sämtliche Artefakte des Sprungs abgeklungen sind (vgl. Endwertsatz der Laplace-Transformation). Die unterste Zeile der Tabelle 43 zeigt das zugehörige Transformationspaar der so definierten Anfangswertquelle.

Zusätzlich ergibt sich durch die Transformation des Differentialquotienten bei Kapazitäten (zweite Zeile in der Tabelle) aufgrund des Integrationsbeginns bei  $t \rightarrow 0+$  ein konstanter Quellterm im Bildbereich ( $s = 0$  in der komplexen Frequenzebene)<sup>4</sup>. Wir haben somit allgemein bei der Behandlung von Netzwerken mit linearen RLC-Elementen im Bildbereich der Laplace-Transformation zwei Quellterme aus Anfangsbedingungen, die sich als Teil der Generatorströme zusammenfassen lassen

$$I_{gj0}(s) = \frac{-i_j(0)}{s} + C_j u_j(0+). \tag{44}$$

Die Terme  $\{G_j, sC_j, \frac{1}{sL_j}\}$  in Gl. 43 bezeichnen wir als Wirkungsfunktionen, da sie den Zusammenhang zwischen Ursache

<sup>4</sup>Dieses Ergebnis lässt sich einfach durch Partielle Integration des Laplace-Integrals zeigen.

(hier  $U_j(s)$ ) und Wirkung (hier  $I_j(s)$ ) für jeden Zweig beschreiben. Stellvertretend für die jeweils in einem Zweig  $j$  vorhandene Wirkungsfunktion werden wir im Folgenden auch die Admittanz  $\underline{Y}_j(s)$  oder deren Kehrwert, die Impedanz  $Z_j(s) = \underline{Y}_j(s)^{-1}$  als allgemeine Wirkungsfunktionen verwenden.

8) *Konstituierende Zweig-Gleichungen.*

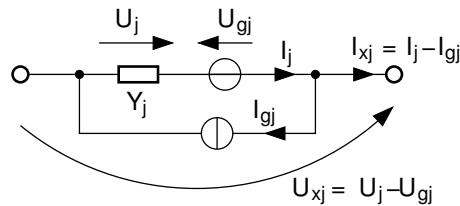


Abb. 15: Allgemeiner Zweig  $j$  im Bildbereich der Laplace-Transformation mit Quellstrom  $I_{gj}(s)$  und Quellspannung  $U_{gj}(s)$  sowie einem beliebigen linearen Eintorelement mit Admittanz  $Y_j(s)$ . Die Quelle  $I_{gj}(s)$  enthält auch die Anfangsbedingungen nach Gl. 44.

Es gilt für ein Netzwerk für jeden Zweig nach Abb. 15  $I_j = Y_j U_j$  oder in Matrix-Form

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{U} \quad \text{mit } \mathbf{I} = \{I_1 I_2 \dots I_b\}^T, \mathbf{U} = \{U_1 U_2 \dots U_b\}^T. \quad (45)$$

Die  $(b \times b)$  Admittanzmatrix wird so aufgespaltet, dass sie als Summe dreier  $(b \times b)$  RLC Matrizen dargestellt wird

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{s} \mathbf{L} + \mathbf{G} + s\mathbf{C}. \quad (46)$$

Darin steht  $\frac{1}{\mathbf{L}}$  für eine Matrix mit  $\frac{1}{L_j}$  Einträgen bei den jeweiligen Zweigadmittanzen und nicht etwa für die Inverse der Admittanzmatrix. In der Regel wird durch entsprechende Numerierung der Elemente eines Netzwerks versucht, eine möglichst geordnete Form der Admittanzmatrix zu erhalten. Im Fall eines Netzwerks ohne gesteuerte Quellen und damit auch ohne gekoppelte Elemente (z.B. Gegeninduktivität) erhält man für  $\frac{1}{\mathbf{L}}$ ,  $\mathbf{G}$ , und  $\mathbf{C}$  (und somit auch für  $\mathbf{Y}$ ) Diagonalmatrizen.

9) *Algebraische Lösung der Netzwerk-Gleichungen.* Wir lösen die Netzwerk-Gleichungen im Bildbereich der Laplace-Transformation. Das Gleichungssystem in Gl. 38 transformiert in den Bildbereich und mit Gl. 45 eingesetzt ergibt für die Stöme und Spannungen an den Elementen

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{I}_g, \quad (47)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{I}_g. \quad (48)$$

Für die Zweigspannungen gilt nach Abb. 15  $U_{xj} = U_j - U_{gj}$  und damit in Matrix-Schreibweise  $\mathbf{U}_x = \mathbf{U} - \mathbf{U}_g$ , womit

$$\mathbf{AY}(\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_g) = \mathbf{AI}_g, \quad (49)$$

$$\mathbf{AYU}_x = \mathbf{AI}_g - \mathbf{AYU}_g, \quad (50)$$

$$\underbrace{\mathbf{AYA}^T}_{=: \mathbf{Y}_n} \mathbf{U}_n = \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{I}_g - \mathbf{YU}_g)}_{=: \mathbf{I}_{qn}}, \quad (51)$$

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{I}_{qn}. \quad (52)$$

Beim Übergang auf Gl. 77 wurde von der in den Bildbereich transformierten Gl. 41 zur Darstellung von Zweigspannungen durch Knotenpotenziale Gebrauch gemacht. Das Ergebnis in Gl. 52 ist dadurch hinsichtlich der Knotenpotenziale des Netzwerks formuliert. Die definierte Matrix  $\mathbf{Y}_n$  wird als Knotenadmittanzmatrix bezeichnet. Der Quellstrom-Vektor der rechten Seite  $\mathbf{I}_{qn}$  repräsentiert die Inhomogenität des linearen Gleichungssystems und enthält mit dem Term  $\mathbf{YU}_g$  die formale Umrechnung von Quellspannungen  $U_{gj}$  der Zweige in äquivalente Quellströme.

Wir interessieren uns für die Knotenpotenziale als Lösung des Gleichungssystems, die sich formal ergibt in der Form

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{Y}_n^{-1} \mathbf{I}_{qn}. \quad (53)$$

Lösungen dieses inhomogenen Gleichungssystems existieren falls die Inverse der quadratischen ( $n \times n$ ) Matrix<sup>5</sup>  $\mathbf{Y}_n(\mathbf{s})$  existiert bzw. die äquivalente Forderung  $\text{Det} \mathbf{Y}_n \neq 0$  erfüllt ist.

Für den Fall ohne Anregung sind die Quellspannungen und -ströme im Netzwerk gleich Null und es gilt  $\mathbf{I}_{qn} = \mathbf{0}$ . In diesem Fall ist das homogene Gleichungssystem

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{0} \quad (54)$$

zu lösen. Nichttriviale Lösungen existieren in diesem Fall für  $\text{Det} \mathbf{Y}_n = 0$ . Dieser Fall tritt z.B. bei der Netzwerkberechnung von Oszillator-Schaltungen auf, die autonom eigene Quellspannungen oder eigene Quellströme erzeugen. Dann sind auch ohne zusätzliche Quellen die Spannungen und Ströme im Netzwerk von Null verschieden.

10) *Aufbau der Knotenadmittanzmatrix.* Die Knotenadmittanzmatrix

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{AYA}^T \quad (55)$$

hat eine herausragende Bedeutung in der Berechnung linearer elektrischer Netzwerke. Ihr wesentlicher Vorteil gegenüber z.B. Formulierungen im Zustandsraum ist, dass sich  $\mathbf{Y}_n$  sehr einfach systematisch für beliebig komplexe Netzwerke aufstellen lässt. Aus diesem Grund arbeiten Programme zur Schaltungssimulation (z.B. SPICE oder SPECTRE) auf Basis der Knotenadmittanzmatrix, die direkt aus der vom Anwender eingegebenen Schaltung erstellt wird. Nachfolgend soll die Struktur von  $\mathbf{Y}_n$  ermittelt werden.

<sup>5</sup>Zur Erinnerung: das Netzwerk hat  $n + 1$  Knoten

Mit dem Ergebnis lässt sich  $\mathbf{Y}_n$  direkt durch formale Inspektion des Netzwerks aufstellen. Wir verdeutlichen die Überlegungen anhand des Graphen eines einfachen Netzwerks aus Abb. 10, das nur RLC Zweig-Elemente und keine gesteuerten Quellen besitzen soll. Die Zweigadmittanz-Matrix  $\mathbf{Y}$  hat in diesem Fall Diagonal-Gestalt. Als Referenzknoten wählen wir Knoten 5. In der nachfolgenden Rechnung ermitteln wir Gl. 55 in zwei Schritten (Punkte stehen für Null- Einträge)

$$\begin{array}{c}
 \text{Zweig } \downarrow \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
 \end{array}
 \mathbf{A}^T =
 \begin{array}{c}
 \text{Knoten } \rightarrow \\
 \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{cccc}
 -1 & \cdot & 1 & \cdot \\
 -1 & 1 & \cdot & \cdot \\
 -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 -1 & \cdot & \cdot & 1 \\
 \cdot & -1 & 1 & \cdot \\
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\
 \cdot & \cdot & -1 & 1
 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{Y}\mathbf{A}^T = \left[ \begin{array}{cccccccc}
 Y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & Y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & Y_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & Y_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_5 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_6 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_7 & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_8
 \end{array} \right]
 \left[ \begin{array}{cccc}
 -Y_1 & \cdot & Y_1 & \cdot \\
 -Y_2 & Y_2 & \cdot & \cdot \\
 -Y_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 -Y_4 & \cdot & \cdot & Y_4 \\
 \cdot & -Y_5 & Y_5 & \cdot \\
 \cdot & Y_6 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & -Y_7 \\
 \cdot & \cdot & -Y_8 & Y_8
 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T = \left[ \begin{array}{cccccccc}
 -1 & -1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\
 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & 1
 \end{array} \right]
 \left[ \begin{array}{cccc}
 Y_{11} & -Y_2 & -Y_1 & -Y_4 \\
 -Y_2 & Y_{22} & -Y_5 & \cdot \\
 -Y_1 & -Y_5 & Y_{33} & -Y_8 \\
 -Y_4 & \cdot & -Y_8 & Y_{44}
 \end{array} \right]$$

mit

$$Y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4, \quad Y_{22} = Y_2 + Y_5 + Y_6, \quad Y_{33} = Y_1 + Y_5 + Y_8, \quad Y_{44} = Y_4 + Y_7 + Y_8. \quad (56)$$

Im ersten Schritt  $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$  bleiben durch die Multiplikation mit der Diagonalmatrix  $\mathbf{Y}$  die Orte der Einträge in  $\mathbf{A}^T$  erhalten. Es ändert sich jedoch der Wert der Einträge von  $\pm 1$  auf  $\pm Y_j$ , da ein Eintrag  $\pm 1$  für einen Zweig  $j$  in einer Spalte von  $\mathbf{A}^T$  die jeweilige Zweigadmittanz  $Y_j$  durch Multiplikation selektiert.

Im zweiten Schritt wird das Ergebnis  $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$  des ersten Schritts von links mit  $\mathbf{A}$  multipliziert. Wie zuvor festgestellt hat  $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$  dieselbe Struktur hinsichtlich der Orte und Vorzeichen der Einträge wie  $\mathbf{A}^T$ . Daher werden bei der Multiplikation der  $n$ -ten Zeile von  $\mathbf{A}$  mit der  $n$ -ten Spalte (=Knoten) von  $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$  sämtliche Einträge des Spaltenvektors mit  $\pm 1$  selektiert. Dabei werden Admittanzen, die zuvor mit einem bestimmten Vorzeichen multipliziert wurden wieder mit demselben Vorzeichen multipliziert.



Daher ergibt sich in der Hauptdiagonalen eine Admittanz  $Y_{nn}$ , die aus der Summe der Einträge der  $n$ -ten Spalte von  $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$  besteht. Da diese  $n$ -te Spalte die Admittanzen enthält die am  $n$ -ten Knoten des Netzwerks liegen, gilt die einfache Regel: *Auf der Hauptdiagonalen der Knotenadmittanzmatrix steht an der Stelle  $Y_{nn}$  die Summe aller an einem Knoten  $n$  liegenden Zweigadmittanzen unabhängig von der Zweigorientierung mit positiven Vorzeichen.*

Für Elemente der Knotenadmittanzmatrix  $\mathbf{Y}_n$ , die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, gilt in ähnlicher Weise ebenfalls die Überlegung der Selektion von Einträgen von Spaltenvektoren von  $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$  durch  $\pm 1$  Einträge in  $\mathbf{A}$ . Nur der Eintrag (=Zweig) einer Spalte (=Knoten) von  $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$  wird selektiert, für den in  $\mathbf{A}$  an der entsprechenden Stelle ein  $\pm 1$  Eintrag vorhanden ist. Das ist definitionsgemäß für die Knoteninzidenzmatrix dann der Fall, wenn dieser Zweig auch an dem Knoten (=Zeile) von  $\mathbf{A}$  liegt. Das Vorzeichen der Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen ist immer negativ, da die jeweils miteinander multiplizierten Einträge unterschiedliche Vorzeichen aufgrund der Orientierung eines Zweiges zu den beiden an ihm liegenden Knoten. Für Elemente der Knotenadmittanzmatrix von RLC Netzwerken, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen gilt daher die einfache Bestimmungsregel: *Ein Eintrag  $Y_{ij}$  außerhalb der Hauptdiagonalen der Knotenadmittanzmatrix besteht aus der Admittanz, welche die Knoten  $i$  und  $j$  miteinander verbindet. Das Vorzeichen aller Admittanzen außerhalb der Hauptdiagonalen ist immer negativ.*

Es gilt  $\mathbf{Y}_n^T = (\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}\mathbf{Y}^T\mathbf{A}^T$ . Für den Fall, dass  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T$  erfüllt ist, also  $\mathbf{Y}$  symmetrisch ist, wird  $\mathbf{Y}_n^T = \mathbf{A}\mathbf{Y}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T = \mathbf{Y}_n$ . Fazit: *Besitzt ein Netzwerk eine symmetrische Admittanzmatrix  $\mathbf{Y}$ , so ist auch die Knotenadmittanzmatrix  $\mathbf{Y}_n$  symmetrisch.* Dies ist bei Netzwerken, die wie in unserem Beispiel aus RLC Elementen bestehen und somit ein  $\mathbf{Y}$  in Diagonal-Gestalt besitzen, immer der Fall.

Mit diesen beiden Regeln lässt sich die Knotenadmittanzmatrix eines beliebigen RLC Netzwerks rein formal durch Inspektion des in den Knoten nummerierten Netzwerks erstellen. Damit kann das Knotenpotenzialgleichungssystem 52 direkt aufgestellt werden. Der Quellstromvektor der rechten Seite enthält dabei für jeden Knoten die Summe der in diesen Knoten fließenden Ströme mit positivem Vorzeichen (Beweis als Übung).

- 11) *Verallgemeinerung für Netzwerke mit gesteuerten Quellen.* Zuvor wurden Netzwerke mit RLC Elementen betrachtet, die aufgrund der Diagonal-Gestalt der Admittanzmatrix  $\mathbf{Y}$  immer zu symmetrischen Knotenadmittanzmatrizen führen. Sind in dem Netzwerk gesteuerte Quellen, so ist dies in der Regel nicht mehr der Fall. Eine Ausnahme sind gekoppelte Induktivitäten, deren Einträge in die Knotenadmittanzmatrix immer symmetrisch erfolgen. Wählen wir die Bezeichnung "M" als Synonym für gekoppelte Induktivitäten so gilt die Aussage, dass Netzwerke aus RLCM Elementen immer eine symmetrische Knotenadmittanzmatrix besitzen. Beweis als Übung.

## 4 Spezielle Herleitung des Knotenpotenzialverfahrens

Die Herleitung des Knotenpotenzialverfahrens im vorangegangenen Kapitel war allgemein gehalten und bietet dadurch eine Basis für vielfältige Anknüpfungspunkte zu weiterführenden netzwerktheoretischen Betrachtungen. Setzt man einige dort ermittelte Erkenntnisse voraus (z.B. die Existenz einer eindeutigen Lösung, das Konzept eines Referenzknotens, oder das Konzept einer Impedanz/Admittanz), dann lässt sich das Knotenpotenzialverfahren als Lösung linearer zeitinvarianter Netzwerkgleichungen alternativ in sehr kompakter Form herleiten.

Wir betrachten dazu einen Ausschnitt aus einem beliebigen Netzwerk in Abb. 16.

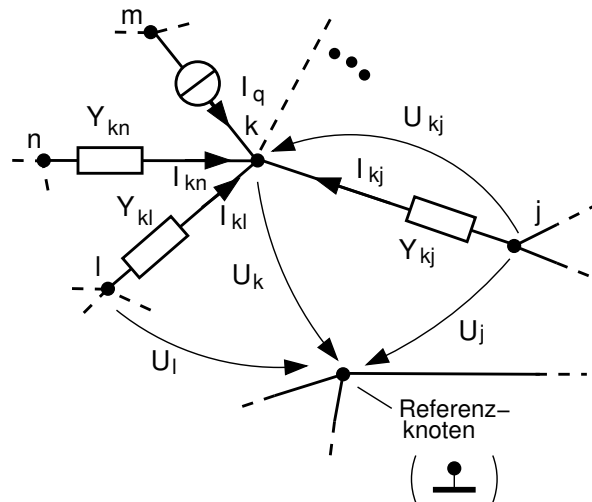


Abb. 16: Ausschnitt aus einem beliebigen Netzwerk mit einer beliebigen Wahl eines Referenzknotens.

In unserer Betrachtung enthält jeder Zweig des Netzwerks entweder eine Admittanz oder eine ideale Stromquelle. Man kann zeigen, dass sich jedes lineare Netzwerk unter Zuhilfenahme äquivalenter Umformungen (z.B. Norton-Thevenin-Äquivalenzumwandlung, Abb. 6) in dieser Form darstellen lässt.

Wir bilden die Strombilanz (KCL) für den Knoten  $k$

$$0 = I_{kj} + I_{kl} + I_{kn} + I_q + \dots \quad (57)$$

$$= (U_j - U_k)Y_{kj} + (U_l - U_k)Y_{kl} + (U_n - U_k)Y_{kn} + I_q + \dots \quad (58)$$

Die Punkte in der Gleichung stehen für weitere Zweige mit Admittanzen oder Stromquellen, die gegebenenfalls an Knoten  $k$  angeschlossen sind. Sortieren der Terme der Gleichung führt auf

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{(Y_{kj} + Y_{kl} + Y_{kn} + \dots)}_{\text{Summe aller Admittanzen}} & U_k - \underbrace{Y_{kj}U_j - Y_{kl}U_l - Y_{kn}U_n - \dots}_{\text{Koppeladmittanzen mit Potenzial des koppelnden Knotens}} & = \underbrace{I_q + \dots}_{\text{Summe der Quellströme in Knoten } k} \\
\text{am Knoten } k & & \\
& & (59)
\end{array}$$

Formuliert man diese Gleichung für sämtliche  $n + 1$  Knoten des Netzwerks (Referenzknoten ausgenommen), so ergeben sich  $n$  Gleichungen, die sich in Form des Gleichungssystems nach Gl. 52 mit  $\mathbf{Y}_n$  in der Struktur nach Gl. 56 darstellen lassen.

## 5 Lineare Netzwerke mit stationärer zeitharmonischer Anregung

Ist ein elektrisches Netzwerk linear, besitzen sämtliche darin betrachteten Elemente konstituierende Gleichungen mit einem linearen Strom-Spannungszusammenhang. In diesem Fall werden bei einer monofrequenten Anregung mit einer Frequenz<sup>6</sup>  $\omega$  sämtliche Spannungen und Ströme des Netzwerks diese Frequenz besitzen und sich untereinander nur in Amplitude und Phase unterscheiden.

Zur Verdeutlichung machen wir einen entsprechenden Ansatz für die konstituierende Gleichung eines linearen Leitwerts ( $G_j$  in einem Zweig  $j$ ) im *Zeitbereich* bei Anregung mit einer beliebigen Frequenz  $\omega$ . Der zeitharmonische Strom durch den Leitwert wird allgemein mit  $i_j = I_j \cos(\omega t + \varphi_{I_j})$  und die Spannung an dem Leitwert mit  $u_j = U_j \cos(\omega t + \varphi_{U_j})$  beschrieben. Es gilt dann die für die konstituierende Gleichung

$$i_j = G_j u_j, \quad (60)$$

$$I_j \cos(\omega t + \varphi_{I_j}) = G_j U_j \cos(\omega t + \varphi_{U_j}), \quad (61)$$

$$\Re\{ \underline{I}_j e^{j\omega t} \} = G_j \Re\{ \underline{U}_j e^{j\omega t} \} \quad (62)$$

$$\Re\{ \underline{I}_j e^{j\omega t} \} = \Re\{ G_j \underline{U}_j e^{j\omega t} \} \quad (63)$$

$$\underline{I}_j = G_j \underline{U}_j. \quad (64)$$

die darin definierten Größen

$$\underline{I}_j = I_j e^{j\varphi_{I_j}} \quad \text{und} \quad \underline{U}_j = U_j e^{j\varphi_{U_j}} \quad (65)$$

enthalten *keine* Zeitabhängigkeit und sind im Allgemeinen *komplexe Funktionen* in  $j\omega$ . Derartige Funktionen werden komplexe Wechselstromzeiger oder kurz *Phasoren* genannt. Sie beinhalten die Amplituden- und Phaseninformation der jeweiligen Größe. Das Ergebnis in Gl. 64 lässt sich aus der vorangegangenen Zeile nach folgender allgemeiner Überlegung erhalten. Darin seien  $\underline{X}$  und  $\underline{Y}$  zwei beliebige Phasoren in einer Zeitbereichs-Darstellung für die eine für alle

<sup>6</sup>Genauer müsste bei  $\omega$  von der Kreisfrequenz in Unterscheidung zur Frequenz  $f$  gesprochen werden. Dies wird zur Vereinfachung der Lesbarkeit im Folgenden nicht getan und soll daher fortan als implizit vereinbart gelten.

Zeiten  $t$  gültige Lösung gesucht ist

$$\Re\{\underline{X} e^{j\omega t}\} = \Re\{\underline{Y} e^{j\omega t}\} \quad \forall t, \quad (66)$$

$$\Re\{(\underline{X} - \underline{Y}) e^{j\omega t}\} = 0 \quad \forall t, \quad (67)$$

$$\Rightarrow \underline{X} = \underline{Y}. \quad (68)$$

Zwar lässt sich zu einem beliebigen  $\underline{X} - \underline{Y}$  immer eine bestimmte Zeit  $t$  finden zu der der Realteil des Produktes in der geschweiften Klammer von Gl. 67 zu Null wird, jedoch gibt es nur die nichttriviale Lösung  $\underline{X} = \underline{Y}$ , die für alle  $t$  gilt.

Analog zur Phasor-Darstellung der konstituierenden Gleichung eines Leitwertes lassen sich die Phasor Darstellungen für Induktivitäten und Kapazitäten herleiten. In Analogie zur Bildbereichsdarstellung der Laplace-Transformation in Gl. 43 können damit die Phasor Darstellungen

$$\begin{aligned} i_j &= G_j u_j & \Leftrightarrow & \underline{I}_j = G_j \underline{U}_j, \\ i_j &= C_j \frac{du_j}{dt} & \Leftrightarrow & \underline{I}_j = j\omega C_j \underline{U}_j \\ i_j &= \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau & \Leftrightarrow & \underline{I}_j = \frac{1}{j\omega L_j} \underline{U}_j, \end{aligned} \quad (69)$$

für den *Zeitbereich* der konstituierenden Gleichungen angegeben werden. Wie bei der Laplace-Transformation beschreiben wir diese Wirkungsfunktionen<sup>7</sup>  $\{G_j, j\omega C_j, \frac{1}{j\omega L_j}\}$  allgemein mit dem Begriff der komplexen Admittanz  $\underline{Y}_j(j\omega)$  oder kurz nur  $\underline{Y}_j$  oder wir verwenden deren Kehrwert die Impedanz  $\underline{Z}_j = \underline{Y}_j^{-1}$ .

Mit Hilfe der vorangegangenen Überlegungen kann die anhand der Laplace-Transformierten gezeigte Herleitung der algebraischen Lösung der Netzwerkgleichungen (vgl. Seiten ab S.22) einfach auf den Sonderfall der stationären zeitharmonischer Anregung mit Hilfe von Phasoren übertragen werden. Beginnend bei Gl. 47, die durch Laplace-Transformation aus Gl. 38 hervorging, verläuft auch die Rechnung in Phasorschreibweise, wobei mehrfach von der Identität aus Gl.66 bis 68 Gebrauch gemacht wird

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{A} \mathbf{i}_g \quad (70)$$

$$\mathbf{A} \Re\{\underline{\mathbf{I}} e^{j\omega t}\} = \mathbf{A} \Re\{\underline{\mathbf{I}}_g e^{j\omega t}\}, \quad (71)$$

$$\Re\{\mathbf{A} \underline{\mathbf{I}} e^{j\omega t}\} = \Re\{\mathbf{A} \underline{\mathbf{I}}_g e^{j\omega t}\}, \quad (72)$$

$$\mathbf{A} \underline{\mathbf{I}} = \mathbf{A} \underline{\mathbf{I}}_g, \quad (73)$$

$$\mathbf{A} \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{A} \underline{\mathbf{I}}_g, \quad (74)$$

$$\mathbf{A} \underline{\mathbf{Y}} (\underline{\mathbf{U}}_x + \underline{\mathbf{U}}_g) = \mathbf{A} \underline{\mathbf{I}}_g, \quad (75)$$

$$\mathbf{A} \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{U}}_x = \mathbf{A} \underline{\mathbf{I}}_g - \mathbf{A} \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{U}}_g, \quad (76)$$

$$\underbrace{\mathbf{A} \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{A}^T}_{=: \underline{\mathbf{Y}}_n} \underline{\mathbf{U}}_n = \underbrace{\mathbf{A} (\underline{\mathbf{I}}_g - \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{U}}_g)}_{=: \underline{\mathbf{I}}_{qn}}, \quad (77)$$

$$\underline{\mathbf{Y}}_n \underline{\mathbf{U}}_n = \underline{\mathbf{I}}_{qn}. \quad (78)$$

<sup>7</sup>Der Index  $j$  steht für einen beliebigen Zweig  $j$ , in dem sich das jeweilige Element befinden soll.

Anhand der Herleitungen ist zu sehen, dass die gesamten Gleichungen zur Netzwerkberechnung in Phasor Darstellung und im Bildbereich der Laplacetransformation eine identische Gestalt haben. Die jeweiligen Gleichungen können einfach durch die Substitution  $s \leftrightarrow j\omega$  ineinander überführt werden, wovon wir im Folgenden bei Bedarf Gebrauch machen werden. Beachten Sie dazu die folgenden Anmerkungen:

- Gemäß der Herleitung der Phasor Darstellung (vgl. Gl. 64) handelt es sich dabei nicht um eine Integraltransformation wie z.B. bei der Laplace- oder Fouriertransformation. Formal haben wir den Zeitbereich trotz einer dem Bildbereich der Laplacetransformation sehr ähnlichen Formulierung in Gl. 69 nicht verlassen.
- Da wir mit Hilfe der Phasor Darstellung den stationären Fall eines eingeschwingenen Netzwerks betrachten, sind auch keine Anfangswerte zu berücksichtigen. Die Strom- bzw. Spannungswerte sind zu allen Zeitpunkten durch ihren zeitharmonischen Verlauf bestimmt.
- Wegen der Ähnlichkeit zu den Darstellungen der Laplace-Transformation findet sich oft die bereits oben verwendete Formulierung, dass die Phasor Darstellung aus dem Bildbereich der Laplace-Transformation durch die Substitution  $s \rightarrow j\omega$  hervorgeht. Dies ist tatsächlich für alle Wirkungsfunktionen eines Netzwerks möglich, da diese ausschließlich aus algebraischen Kombinationen der konstituierenden Bauteilgleichungen bestehen<sup>8</sup>). Wird jedoch kein Verhältnis sondern die Zeitfunktion einer Wirkung allein betrachtet, beinhaltet die Laplacetransformierte im Allgemeinen noch zusätzlich den Einschwingvorgang und die Anfangsbedingungen. Dann ist eine Substitution  $s \rightarrow j\omega$  im Allgemeinen nicht möglich (vgl. dazu auch den nächsten Punkt).
- Natürlich kann ein zur Phasor Darstellung identisches Ergebnis mit etwas Aufwand auch im Bildbereich der Laplacetransformation erhalten werden. Dazu nimmt man eine zu  $t = 0$  beginnende zeitharmonische Anregung an (Anregung für  $t < 0$  ist Null) und wartet bis zu einem Zeitpunkt  $t \rightarrow \infty$ , bis zu dem der Einschwingvorgang nach dem Einschalten bei  $t = 0$  abgeklungen ist (Endwertsatz der Laplace-Transformation). Auf die Darstellung dieser Variante wurde hier zugunsten der klassischen Einführung von Phasoren verzichtet.

## 6 Lösung des Knotenpotenzial-Gleichungssystems und Überlagerungssatz

Wir wollen das Knotenpotenzial-Gleichungssystem aus Gl. 52

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{I}_{qn}$$

hinsichtlich der Knotenpotenziale in  $\mathbf{U}_n$  lösen. Die gleiche Lösung ergibt sich entsprechend den Darstellungen im vorangegangenen Kapitel für das

<sup>8</sup>Vergleiche hierzu auch den Aufbau einer Wirkungsfunktion durch Anwendung der Cramerschen Regel in Kapitel 6

Gleichungssystem nach Gl. 78 im Fall zeitharmonischer Anregung. Wir bleiben der Einfachheit wegen bei der Darstellung in der komplexen Frequenz  $s$ , d.h. im Bildbereich der Laplacetransformation. In ausgedehnter Form stellt sich diese Gleichung dar als

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} Y_{11} & Y_{12} & & Y_{1j} & & Y_{1n-1} & Y_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{qn} \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Die in  $\mathbf{Y}_n$  dargestellten senkrechten Striche separieren dabei die Spaltenvektoren der Matrix.

Wir lösen dieses Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel, da uns die daraus resultierende Darstellung des Ergebnisses einen bestimmten Einblick in die allgemeine Struktur der Lösungen dieses Systems gibt. Danach ergibt sich eine beliebige Spannung  $U_j$  des Lösungsvektors aus

$$U_j = \frac{\text{Det} \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} Y_{11} & Y_{12} & & I_{q1} & & Y_{1n-1} & Y_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & I_{qn} & & \cdot & \cdot \end{array} \right]}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)}. \quad (80)$$

Die Determinante des Zählers lässt sich nach den Elementen des Quellstromvektors entwickeln, der in die  $j$ -ten Spalte eingesetzt wurde. Mit der Adjunkten erster Ordnung  $D_{ij} = (-1)^{i+j} \text{Det}(\mathbf{Y}_n \setminus -\mathbf{i}, \mathbf{j})$ <sup>9</sup> lautet diese Entwicklung

$$U_j = \frac{\sum_{i=1}^n D_{ij} I_{qi}}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)} \quad (81)$$

$$= \underbrace{\frac{D_{1j}}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)}}_{Z_{j1}} I_{q1} + \underbrace{\frac{D_{2j}}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)}}_{Z_{j2}} I_{q2} + \dots + \underbrace{\frac{D_{nj}}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)}}_{Z_{jn}} I_{qn} \quad (82)$$

$$= \underbrace{Z_{j1} I_{q1}}_{U_{j1}} + \underbrace{Z_{j2} I_{q2}}_{U_{j2}} + \dots + \underbrace{Z_{jn} I_{qn}}_{U_{jn}}. \quad (83)$$

Eine Knotenspannung  $U_j$  setzt sich demnach zusammen aus der Überlagerung einzelner Teilspannungen  $U_{j1}, U_{j2} \dots U_{jn}$ . Jede darin enthaltene Teilspannung  $U_{ji}$  ergibt sich aus der mit einer *Wirkungsfunktion*  $Z_{ji}$  skalierten Wirkung eines Quellstroms  $I_{qi}$ . Für *Wirkungsfunktionen* im Bildbereich der Laplacetransformation, d.h. in der komplexen Frequenz  $s$ , wird insbesondere in der Regelungstechnik auch der Begriff *Übertragungsfunktion* verwendet. Je kleiner der Betrag einer Wirkungsfunktion, umso geringer ist der Beitrag der damit skalierten Ursache zur betrachteten Knotenspannung.

<sup>9</sup>Diese Kurzschreibweise soll bedeuten: Die Untermatrix von  $\mathbf{Y}_n$ , die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte hervorgeht.

Gleichung 83 liefert einen alternativen Ansatz zur Berechnung von Netzwerken mit mehreren Quellen. Bereits ohne genaue Kenntnis des Netzwerks lässt sich für ein Netzwerk mit  $n$  Quellen als erster Schritt direkt Gl. 83 hinschreiben. In einem zweiten Schritt können die Wirkungsfunktionen bestimmt werden. Dies kann nach Gl. 83 derart geschehen, dass alle Quellen bis auf eine zu Null gesetzt werden. Geschieht dies für die  $i$ -te Quelle so lautet Gl. 83

$$U_j = U_{ji} = Z_{ji} I_{qi} \Big|_{I_{ql=0}, l=1 \dots n \setminus i}. \quad (84)$$

und demnach ergibt sich die Wirkungsfunktion

$$Z_{ji} = \frac{U_j}{I_{qi}} \Big|_{I_{ql=0}, l=1 \dots n \setminus i}. \quad (85)$$

Der Vorteil dieser Berechnung liegt darin, dass in Netzwerken mit mehreren Quellen die Beiträge getrennt voneinander bestimmt und betrachtet werden können, was eine wesentliche Vereinfachung darstellt. Das resultierende Ergebnis ergibt sich aus der Überlagerung (Addition) der einzelnen Beiträge. Daher stammt der Name *Überlagerungssatz* oder *Superpositionsprinzip* dieser Methode. Natürlich gilt das Überlagerungsprinzip nur bei den eingangs den Betrachtungen zugrundegelegten *linearen* Netzwerken.

Anhand der Struktur der Lösung aus Gl. 82 lassen sich noch einige Aussagen über die Eigenschaften der Wirkungsfunktion machen. Da die Determinanten im Zähler wie im Nenner dieses Ausdrucks algebraische Funktionen der Wirkungsfunktionen aus der Knotenadmittanzmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}_n$  sind, ergeben sich aus der Berechnung der Determinanten Polynome in der komplexen Frequenz  $s$  (bzw. in  $j\omega$  bei der Beschreibung mit Phasoren), so dass gilt

$$Z_{ji} = \frac{D_{1j}}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots b_1 s + b_0}, \quad (86)$$

$$= Z_0 \frac{(s - s_{zn})(s - s_{zn-1}) \dots (s - s_{z1})}{(s - s_{nm})(s - s_{nm-1}) \dots (s - s_{n1})}. \quad (87)$$

Darin sind  $s_{z1} \dots s_{zn}$  die  $n$  Nullstellen des Zählerpolynoms und entsprechend  $s_{n1} \dots s_{nm}$  die  $m$  Nullstellen des Nennerpolynoms.  $Z_0$  ist eine reellwertige Konstante. Es lässt sich zeigen, dass bei *physikalisch realisierbaren Netzwerken* der Grad  $n$  des Zählerpolynoms kleiner als der des Nennerpolynoms ist, d.h.  $n < m$ . Eine einfache Überlegung stützt den hier nicht aufgeführten Beweis. Wäre  $n \geq m$  würde für  $s \rightarrow \infty$ , die Wirkungsfunktion gegen den Grenzwert  $a_n/b_n$  für  $m = n$  bzw.  $\rightarrow \infty$  für  $n > m$  streben. Dies würde einem Netzwerk mit unendlich großer Bandbreite entsprechen, wogegen physikalisch realisierbare Systeme eine endliche Bandbreite aufweisen.

## 7 Das Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm dient als Mittel zur Darstellung, Konstruktion und Analyse des Betrags- und Phasengangs, kurz des *Frequenzgangs*, von Wirkungsfunktionen in Phasor-Darstellung. Ausgangspunkt der Herleitung ist die Darstellung

einer beliebigen Wirkungsfunktion nach Gl. 87, die mittels  $s \rightarrow j\omega$  in die Phasendarstellung überführt wird

$$\underline{Z} = Z_0 \frac{(j\omega - s_{zn})(j\omega - s_{zn-1}) \dots (j\omega - s_{z1})}{(j\omega - s_{nm})(j\omega - s_{nm-1}) \dots (j\omega - s_{n1})}. \quad (88)$$

Darin haben wir zur Vereinfachung die allgemeinen Indizes  $ij$  weggelassen und verstehen, dass  $\underline{Z}$  eine allgemeine Darstellung einer beliebigen Wirkungsfunktion repräsentiert. Wir betrachten im folgenden Netzwerke, die *nur reellwertige Pol- und Nullstellen* aufweisen<sup>10</sup>. In der üblichen Formulierung werden diese Polstellen paradoxer Weise mit  $\omega$  bezeichnet, obwohl gerade  $\omega$  den Imaginärteil der komplexen Frequenz  $s = \sigma + j\omega$  bezeichnet. Somit wäre eigentlich die Wahl des  $\sigma$  als reellwertige Variable konsistenter gewesen. Wir lassen uns davon aber nicht einschüchtern und behalten die übliche Formulierung mit  $\omega$  bei. Damit besitzt die Wirkungsfunktion eines Netzwerkes mit reelwertigen Polen und Nullstellen die Form

$$\underline{Z} = Z_0 \frac{(j\omega - \omega_{zn})(j\omega - \omega_{zn-1}) \dots (j\omega - \omega_{z1})}{(j\omega - \omega_{nm})(j\omega - \omega_{nm-1}) \dots (j\omega - \omega_{n1})}, \quad (89)$$

$$= K_0 \frac{(1 - j\omega/\omega_{zn})(1 - j\omega/\omega_{zn-1}) \dots (1 - j\omega/\omega_{z1})}{(1 - j\omega/\omega_{nm})(1 - j\omega/\omega_{nm-1}) \dots (1 - j\omega/\omega_{n1})}. \quad (90)$$

Diese Form ist der Ausgangspunkt für die Näherungen, die bei der Konstruktion des Bode-Diagramms angewendet werden. Für jeden der darin enthaltenen Terme gilt allgemeinen

$$(1 - j\omega/\omega_i) = A_i e^{j\varphi_i} \quad (91)$$

mit

$$A_i = \sqrt{1 + (\omega/\omega_i)^2}, \quad \varphi_i = \arctan \frac{\omega}{-\omega_i} \quad (92)$$

wobei bei stabilen Netzwerken immer  $\omega_{ni} \leq 0$  und in der Regel auch  $\omega_{zi} \leq 0$  gilt (vgl. Kapitel über Stabilität). Als Fazit folgt, daß das Argument der arctan-Funktion und damit auch die Phase  $\varphi_i$  bei stabilen Netzwerken positive Werte annimmt.

Die Wirkungsfunktion  $\underline{Z}$  lässt sich mit dieser Darstellung in Euler-Form schreiben

$$\underline{Z} = K_0 \frac{A_{z1} A_{z2} \dots A_{zn} e^{j(\varphi_{z1} + \varphi_{z2} + \dots + \varphi_{zn})}}{A_{n1} A_{n2} \dots A_{nm} e^{j(\varphi_{n1} + \varphi_{n2} + \dots + \varphi_{nm})}} \quad (93)$$

wobei

$$|\underline{Z}| = |K_0| \frac{A_{z1} A_{z2} \dots A_{zn}}{A_{n1} A_{n2} \dots A_{nm}} \quad (94)$$

und

$$\arg(\underline{Z}) = \arg(K_0) + \varphi_{z1} + \varphi_{z2} + \dots + \varphi_{zn} - (\varphi_{n1} + \varphi_{n2} + \dots + \varphi_{nm}). \quad (95)$$

Darin ist wegen  $K_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \arg(K_0) \in \{0, \pi\}$ . Die beiden vorangegangenen Gleichungen werden zur Konstruktion des Frequenzgangs (Betrags- und Phasengang) im Bode-Diagramm verwendet.

<sup>10</sup>Diese einschränkende Annahme ist keine Voraussetzung zur Anwendung des Bode-Diagramms. Sie bewirkt jedoch deutliche Vereinfachungen in der Anwendung, z.B. bei der Analyse und Konstruktion von Frequenzgängen, wodurch ein effizienteres Arbeiten von Hand als mit dem Computer möglich wird



Für die Darstellung des Betragsgangs wird folgende Näherung eingeführt

$$A_i = \sqrt{1 + (\omega/\omega_i)^2} \approx \begin{cases} 1 & , \omega \leq |\omega_i|, \\ \omega/\omega_i & , \omega > |\omega_i|, \end{cases} \quad (96)$$

die offensichtlich mit dem Wert 1 bei  $\omega = \omega_i$  gegenüber dem exakten Wert  $\sqrt{2}$  den größten Fehler aufweist.

Die Darstellung des Betrags erfolgt im Bode-Diagramm immer in dekadisch logarithmierter und skaliert Form. Um dies auszudrücken wird die künstliche Einheit *Dezibel* oder kurz *dB* verwendet. Sie gibt das 10-fache des Verhältnisses des Betrags zweier *Leistungen* (z.B. für Ursache und Wirkung) an. Bezieht man die Berechnung der beiden Leistungen,  $\underline{S}_1 = \underline{U}_1 I_1^*$ ,  $\underline{S}_2 = \underline{U}_2 I_2^*$  auf einen gemeinsamen Referenzwiderstand so folgt

$$10 \log \left| \frac{\underline{S}_2}{\underline{S}_1} \right| = 10 \log \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right|^2 = 20 \log \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right| = 20 \log \left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|. \quad (97)$$

Entsprechend werden Wirkungsfunktionen aus Spannungs- und Stromverhältnissen in Dezibel mit dem 20-fachen des dekadischen Logarithmus berechnet. Es ist praktisch einige, in Tab. 7 aufgeführten, häufig auftretende Verhältnisse in ihrer Umrechnung in Dezibel auswendig zu kennen

Verhältnis a/b	1	1,12	$\sqrt{2}$	2	10
$20 \log a/b$	0 dB	1 dB	3 dB	6 dB	20 dB.

Die Darstellung des Betrags unserer allgemeinen Wirkungsfunktion nach Gl. 94 lautet in der logarithmierten Darstellung in dB

$$20 \log |\underline{Z}| = 20 \log |K_0| + 20 \log A_{z1} \dots + 20 \log A_{zn} - 20 \log A_{n1} \dots - 20 \log A_{nm}. \quad (98)$$

Wird für die darin enthaltenen  $A_i$  die Näherung gemäß Gl. 96 eingesetzt, ergibt sich

$$20 \log A_i \approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & , \omega \leq |\omega_i|, \\ \underbrace{20 \log \omega/\omega_i}_{x} \text{ dB} & , \omega > |\omega_i|, \end{cases} \quad (99)$$

Im Bode-Diagramm wird auf der Frequenz-Achse das Verhältnis der Frequenzen  $\omega/\omega_i$  ebenfalls in dekadischer Logarithmierung dargestellt. Der Term  $\log \omega/\omega_i =: x$  kann somit als logarithmische Parametrisierung der x-Achse aufgefasst werden. Ein Produktterm  $A_i$  nach Gl. 96 stellt sich damit wie in Abb. 17 gezeigt im Bode-Diagramm dar. Ein solcher Verlauf ergibt sich für jeden  $A_{zi}$  und  $A_{ni}$  Term in Gl. 98. Der Übergang von dem waagrechten Geradenabschnitt bei 0 dB in den mit 20 dB steigenden Geradenabschnitt ergibt sich bei der in der jeweiligen  $A_i$  Näherung enthaltenen Frequenz  $\omega_i$ . Der Gesamtverlauf des Betrages von  $\underline{Z}$  ergibt sich gemäß Gl. 98 einfach aus der Addition der einzelnen Geradenabschnitte aller  $A_i$ -Verläufe. Dabei sind bitte die Minus-Zeichen vor den Nenner-Termen  $A_{ni}$  zu beachten und die Addition der  $20 \log |K_0|$  Terms nicht zu vergessen.

Auch der Phasengang von  $\underline{Z}$  wird über einfache Geradenabschnitt-Näherungen im Bode-Diagramm dargestellt. Dazu wird jeder  $\varphi_i$ -Term in Gl. 95

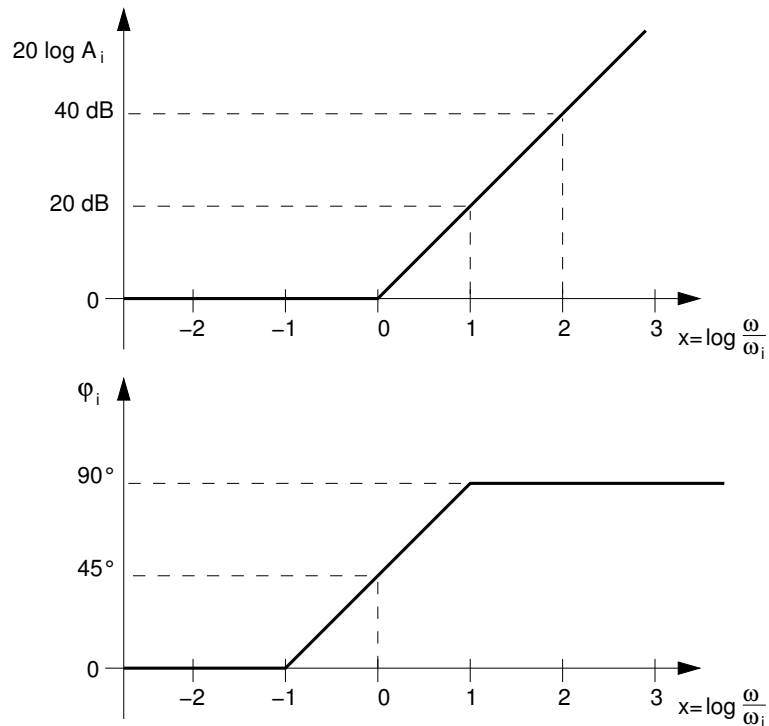


Abb. 17: Bode-Diagramm Näherungen. Oben: Verlauf eines Betrags-Terms  $A_i$  in Form eines waagrechten Geradenabschnitts bis zur Frequenz  $|\omega_i|$  und eines mit 20 dB pro Dekade steigenden Geradenabschnitts für Frequenzen größer als  $|\omega_i|$ . Unten: Die Geradenabschnitt Näherung des zugehörigen Phasenverlaufs nach Gl. 100 besitzt einen breiten Übergangsbereich von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$ , der bereits bei  $\frac{1}{10}|\omega_i|$  beginnt und sich bis  $10|\omega_i|$  erstreckt.

durch eine Näherung seiner Bestimmungsgleichung 92 dargestellt

$$\varphi_i = \arctan \frac{\omega}{-\omega_i} \approx \begin{cases} 0^\circ & , \omega \leq \frac{|\omega_i|}{10}, \\ 45^\circ x & , \frac{|\omega_i|}{10} < \omega < 10|\omega_i|, \\ 90^\circ & , \omega \geq 10|\omega_i|, \end{cases} \quad (100)$$

Die maximalen Fehler treten in dieser Näherung bei  $\omega_i/10$  und  $10\omega_i$  auf, wo die Näherung die Werte  $0^\circ$  und  $90^\circ$  anstelle der arctan Werte von ca.  $5,7^\circ$  und  $84,3^\circ$  annimmt.

Anmerkung: Die Fehler der Betrags- und Phasengangsnäherungen des Bode-Diagramms führen in der Regel zu keinen Einschränkungen in der Anwendung. Sie sind zum Einen bekannt und können daher als Abweichung vom genäherten Verlauf berücksichtigt werden. Zum Anderen wird das Bode-Diagramm vorwiegend vorteilhaft zur Konstruktion und Analyse verwendet, wobei es dabei um die prinzipielle Platzierung der  $\omega_i$  und um Fall-Szenarien geht und nicht um genaue Werte abzulesen. Ist Genauigkeit gefragt kann im Anschluß oder alternativ zur Verwendung des Bode-Diagramms das genaue Ergebnis mit einem Rechenprogramm oder Schaltungssimulator bestimmt werden.

Beispiel: Kompensierter Spannungsteiler.

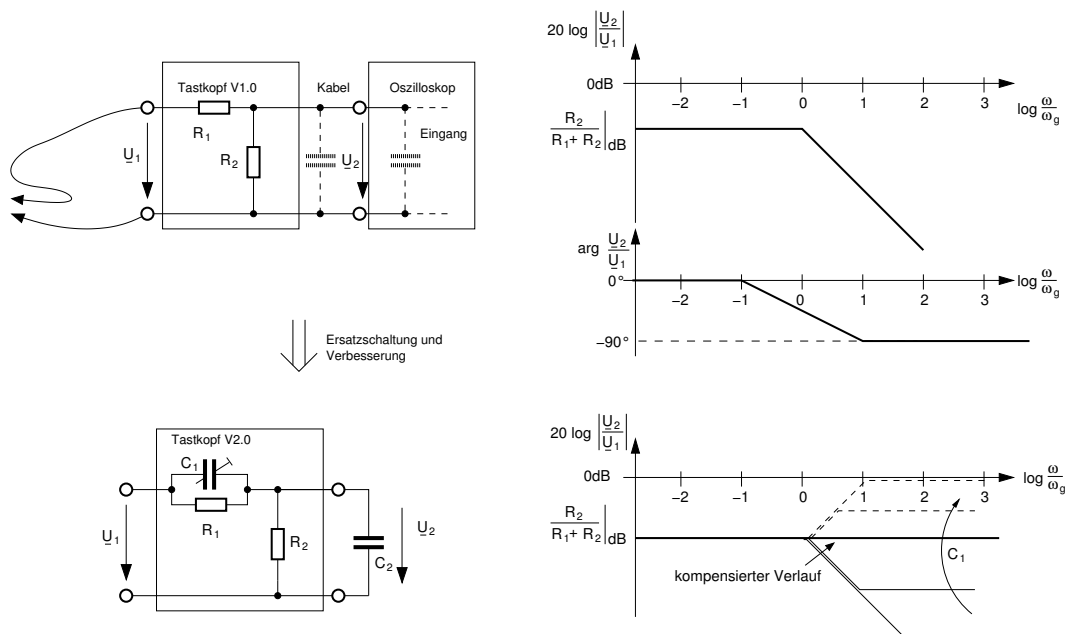


Abb. 18: Links oben: Einfacher Tastkopf aus Spannungsteiler  $R_1$ ,  $R_2$ , belastet durch eine Gesamtkapazität  $C_2$  resultierend aus Kabelkapazität (z.B. 100 pF/m und Eingangskapazität eines Oszilloskops (z.B. 10 pF). Rechts daneben der zugehörige Frequenzgang mit  $\omega_g := 1/(R_2 C_2)$ . Unten links: Optimierter Spannungsteiler durch einstellbare Zusatzkapazität  $C_1$ . Das Bode Diagramm unten rechts zeigt den zugehörigem Betragsgang, wobei für  $\omega_g$  immer die niedrigere der beiden Eckfrequenzen von Zähler und Nenner gewählt wurde.

Abbildung 18 oben zeigt einen einfachen Spannungsteiler als Tastkopf zur Messung hoher Spannungen (z.B. Tastkopf 1:10 mit  $R_1 = 9M\Omega$ ,  $R_2 = 1M\Omega$ ) Nachteil dieses Spannungsteilers ist, dass Frequenzanteile oberhalb  $\omega_g$  abgeschwächt werden wodurch das Messsignal auf dem Oszilloskop verzerrt, also falsch, dargestellt wird. In diesem Fall bringt eine zusätzlich über  $R_1$  angebrachter Kondensator  $C_1$  (vgl. Abb. 18 unten) bei geeigneter Wahl der Kapazität eine Kompensation des Abfalls, wodurch unter den hier getroffenen Annahmen ein idealer Spannungsteiler, d.h.  $\frac{U_2}{U_1}$  ist frequenzunabhängig, entsteht. Anhand des Frequenzgangs dieses Spannungsteilers

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega \frac{C_1 + C_2}{G_1 + G_2}} \quad (101)$$

lässt sich für diesen Fall der sog. *Pol-Nullstellen Kompensation* ein Wert von  $C_1 = C_2 R_2 / R_1$  ermitteln.

Grundsätzlich sind durch entsprechende Wahl von  $C_1$  auch ab  $\omega_g$  ansteigende Frequenzgänge (sog. Frequenzanhebung) einstellbar. Beispiele für Betragsverläufe mit steigendem  $C_1$  sind in Abb. 18 rechts unten dargestellt. Dabei lässt sich z.B. durch Anwendung der Näherungen des Bodediagramms auf den Betragsgang nach Gl. 98 relativ einfach abschätzen, dass keine Werte größer als

0 dB angenommen werden können. Dazu betrachten wir Frequenzen, die größer sind als die größte Eckfrequenz im Zähler und Nenner. Für diesen Frequenzbereich können die Zähler- und Nennerterme mit der Näherung für  $\omega > |\omega_i|$  nach Gl. 99 vereinfachen, so dass der Frequenzgang in der logarithmischen Darstellung nach Gl. 98 lautet (zur einfacheren Darstellung wurde anstelle  $20 \log y$  die Schreibweise  $(y)_{dB}$  verwendet)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{dB} &= \left(\frac{G_1}{G_1 + G_2}\right)_{dB} + (\omega R_1 C_1)_{dB} - \left(\omega \frac{C_1 + C_2}{G_1 + G_2}\right)_{dB}, \\
 &= \left(\frac{G_1}{G_1 + G_2}\right)_{dB} + (\omega R_1 C_1)_{dB} - \left(\frac{G_1}{G_1 + G_2}\right)_{dB} - \left(\omega \frac{C_1 + C_2}{G_1}\right)_{dB}, \\
 &= (\omega)_{dB} + (R_1 C_1)_{dB} - (\omega)_{dB} - (R_1(C_1 + C_2))_{dB}, \\
 &= (R_1 C_1)_{dB} - (R_1(C_1 + C_2))_{dB}.
 \end{aligned}$$

Am letzten Ausdruck lässt sich ablesen, dass wegen  $C_1 \leq (C_1 + C_2)$  der Betragsgang maximal 0 dB annehmen kann.