

# Vorlesung zu den Grundlagen der Elektrotechnik II

Lineare stationäre elektrische Netzwerke  
M. Möller

---

In Bearbeitung

---

Ausdruck vom

20. Juli 2018

# 1 Allgemeine Definitionen zur Beschreibung elektrischer Netzwerke

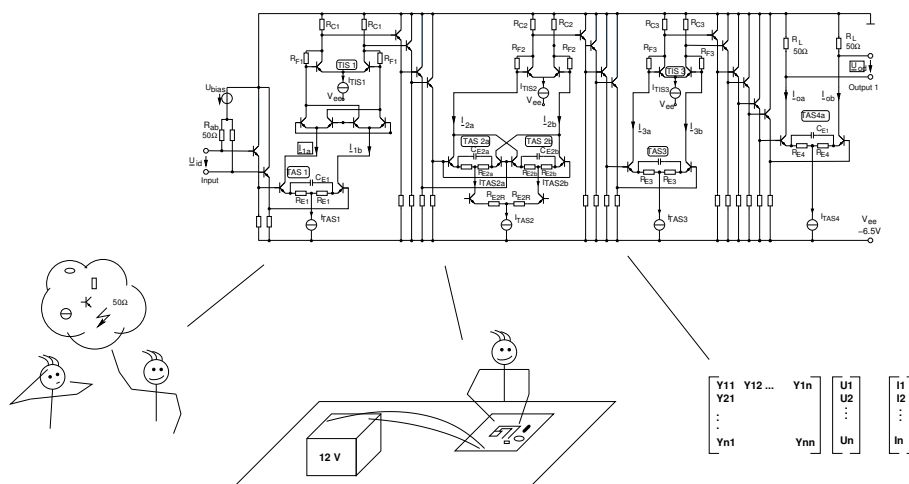


Abb. 1: Drei Anwendungen eines Schaltplans.

Schaltplan (engl. “schematic”): Grafische Darstellung einer elektrischen Schaltung in Form der symbolhaften Darstellung der elektrischen Elemente und ihrer Verschaltung (vgl. Abb.1). In dieser symbolischen Form dient der Schaltplan als Ausdrucksform in der Kommunikation des Schaltungsentwicklers. Darüber hinaus kann er sowohl als Vorlage für eine Realisierung einer Schaltung als auch als grafische Darstellung des jeweils zugrundeliegenden Gleichungssystems verstanden werden. Diese Variante wird auch zur Eingabe (“schematic entry” über GUI) und nachfolgenden Umwandlung in ein Matrix-Gleichungssystem bei der Schaltungssimulation verwendet.

## Strom(stärke):

Abb. 2 zeigt einen Abschnitt eines elektrischen Leiters in dem sich eine homogen über das Volumen verteilte elektrische Ladung (ein positiver Ladungsträger ist symbolisch in Abb. 2 dargestellt) in Richtung des eingezeichneten Stromflusses  $I$  bewegt. Betrachtet man eine Fläche  $A(t)$  durch die zu einem Zeitpunkt Ladungsträger fließen, dann erreichen diese Ladungsträger nach einer Zeit  $dt$  die um die Strecke  $ds$  in Flussrichtung verschobene Fläche  $A(t + dt)$ . Bei homogenen vorausgesetzter Ladungsverteilung ist somit in der Zeit  $dt$  die sich im Volumen  $A ds$  befindende Ladung  $dq(t)$  durch die Fläche  $A(t)$  geflossen. Hieraus definiert sich die Stromstärke

$$i(t) := \frac{dq(t)}{dt} \quad (1)$$

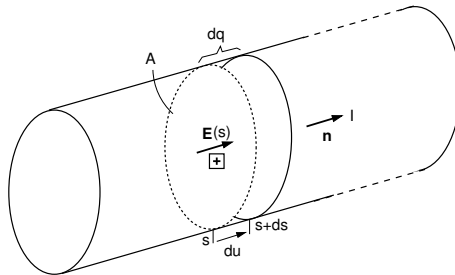


Abb. 2: Zur Definition der Stromstärke und der Spannung in und entlang eines elektrischen Leiters. Die inkrementelle Ladung  $dq$  befindet sich in dem Zylindervolumen aus den um die Strecke  $ds$  verschobenen Flächen  $A$ . Über der Strecke  $ds$  fällt die Spannung  $dU$  in Richtung der elektrischen Feldstärke ab. Der Stromfluss wird in Richtung der Kraftwirkung auf eine positive Ladung definiert. Negative Ladungen (Elektronen) fließen daher physikalisch in die entgegengesetzte Richtung.

darin ist  $i(t)$  ein allgemein zeitabhängiger Strom mit der Einheit Ampere (A) und  $q(t)$  eine i.A. zeitabhängige, durch die Querschnittsfläche eines elektrischen Leiters (oder Zweigs) fließende Ladung mit der Einheit Coulomb (C). Die Querschnittsfläche ist dabei so definiert, dass deren Flächennormale  $\mathbf{n}$  in Richtung der Stromstärke, genauer gesagt, in Richtung der Stromdichte zeigt. Zur Vorstellung der Ladung: ein Elektron trägt die Ladung  $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ .

Zur Unterscheidung und Erhöhung der Aussagekraft bei unterschiedlichen Arten und Darstellungsformen von Strömen wählen wir die Schreibweisen

- $i_{xy}(t)$  für allgemein zeitabhängige Ströme im Zeitbereich,
- $I_{xy}$  für zeitlich konstante Ströme (Gleichstrom),
- $\underline{I}_{xy}$  für stationäre und zeitharmonische Ströme (sinus- cosinus-förmig) in komplexer Wechselstromzeiger Darstellung (Phasoren),
- $I_{xy}(j\omega) = \mathfrak{F}\{i_{xy}\}$  für die Fourier-Transformierte eines allgemeinen zeitabhängigen Stromes  $i_{xy}(t)$ ,
- $I_{xy}(s) = \mathfrak{L}\{i_{xy}\}$  für die Laplace-Transformierte eines allgemeinen zeitabhängigen Stromes  $i_{xy}(t)$ .

Elektrisches Potenzial, Potenzialdifferenz, Spannung: Aus der Definition der Stromstärke entnehmen wir, dass diese auf bewegten, d.h. verschobenen Ladungen beruht. Betrachten wir elektrische Netzwerke makroskopisch (d.h. Vorgänge im Inneren der einzelnen Elementen werden nicht betrachtet), dann

läßt sich die Verschiebung der Ladungsträger über die Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke in dem Netzwerk beschreiben. Für eine Feldstärke  $\mathbf{E}$  am Ort einer Ladung  $dq$  gilt für die auf die Ladung wirkende Kraft

$$\mathbf{F}(s) = dq\mathbf{E}(s). \quad (2)$$

Wir betrachten für die weiteren Erläuterungen einen einfachen Stromkreis aus einer Quelle im *aktiven* Teil und einer Last im *passiven* Teil des Netzwerks in Abb. 3. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit nehmen wir zur Vereinfachung der Erläuterungen eine positive Ladung an. Für negative Ladungen kehren sich Polaritäten und Richtungen entsprechend um.

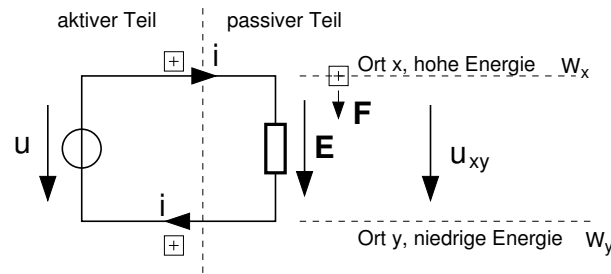


Abb. 3: Zur Definition der Energie und Kraft auf eine positive Ladung in einem Stromkreis. Das Element im passiven Teil ist dadurch gekennzeichnet, dass aufgrund der darin herrschenden Feldstärke sich eine Kraftwirkung auf eine sich darin befindende Ladung ergibt (Beispiel: elektrisches Widerstands-Bauelement).

Die Eigenschaften der Quelle im aktiven Teil bewirken ein elektrisches Feld mit der ortsabhängigen Feldstärke  $\mathbf{E}$  vom Ort (Knoten)  $x$  nach  $y$ . In der Quelle wirkt eine Elektro-Motorische-Kraft (EMK) und verschiebt eine Ladung  $dq$  des Stromkreises vom Ort  $y$  (*Ursprung, Referenzpunkt*) zum Ort  $x$  entgegen der Kraftwirkung der Feldstärke. Dadurch wird die Energie der Ladung von  $W_y$  auf  $W_x$  erhöht - ähnlich der Erhöhung der potenziellen Energie beim Anheben einer Masse gegen die Erdanziehungs-Kraft. Im passiven Teil der Schaltung wird diese Energie wieder auf den Ausgangswert  $W_y$  reduziert<sup>1</sup>. Dabei verliert die von der Kraftwirkung der Feldstärke verschobene Ladung auf einer Strecke  $ds$  von  $x$  nach  $y$  eine Energie von

$$dw_{dq} = -\mathbf{F}ds = -dq\mathbf{E}(s)ds \quad (3)$$

Den Quotienten

$$du := \frac{dw_{dq}}{dq} = -\mathbf{E}(s)ds \quad (4)$$

<sup>1</sup>Die potenzielle Energie wird dabei in eine andere Energieform, in der Regel in Wärme, umgewandelt.

definieren wir als inkrementelle Spannung  $du$ , die ein Maß für die Energieänderung auf dem Weg  $ds$  in Relation zur verschobenen Ladung ist.

In elektrischen Netzwerken interessiert uns in der Regel nicht die Spannung bei einer Verschiebung um  $ds$ , sondern die Spannungen zwischen zwei Orten (genauer: Punkten oder Knoten) im Netzwerk. Dafür laufen wir mit  $ds$  von dem Start- zu dem Endpunkt, in unserem Fall von  $x$  nach  $y$ , und summieren die inkrementellen Spannungen im Verlauf des Weges von  $x$  nach  $y$  auf

$$u_{xy} = \int_x^y du = \int_x^y \frac{dw_{dq}}{dq} = - \int_x^y \mathbf{E}(s) ds. \quad (5)$$

Aufgrund der konservativen Eigenschaften statischer und quasistatischer elektrischer Felder ist dabei der Verlauf des Weges von  $x$  nach  $y$  beliebig wählbar und hat keinen Einfluss auf den Wert der Spannung (vgl. Vorlesungen GDE1 oder TET1).

An den Stellen, an denen wir im Folgenden eine physikalische Interpretation oder Definition der Spannung benötigen, werden wir genau diesen, auf der Feldstärke basierenden Ausdruck verwenden und ggf. noch eine für die jeweiligen Betrachtungen geeignete Zeitabhängigkeit zulassen, wodurch gilt

$$u_{xy}(t) := - \int_x^y \mathbf{E}(t, s) ds = \int_y^x \mathbf{E}(t, s) ds. \quad (6)$$

Durch einen Pfeil vom Ausgangs- zum Endpunkt der betrachteten Ladungsverschiebung (hier von  $x$  nach  $y$ ) wird in elektrischen Netzwerken der Spannung eine Richtung gegeben (vgl.  $u_{xy}$  in Abb. 3). Entsprechend den vorangegangenen Überlegungen zeigt dieser Pfeil in Richtung der elektrischen Feldstärke und zeigt an, dass ein in diese Richtung fließender positiver Ladungsträger seine Energie verringert.

Wählen wir eine beliebige Stelle im Netzwerk als Referenzpunkt (Referenzknoten) und legen diesen als Ausgangspunkt  $y$  aller Spannungs-Integrale fest, so sprechen wir bei den derart ermittelten Spannungen von *Potenzialen*. Im Sinne einer Energie-Betrachtung haben wir den Referenzpunkt als den Nullpunkt der Energie festgelegt und geben die Differenz der durch Ladungsverschiebung entstandenen potentiellen Energien der anderen Punkte gegenüber diesen Nullpunkt an. Wir sprechen allgemein von Potenzialdifferenz wenn wir einzelne, derart definierte Potenziale miteinander vergleichen. Daher ist *Potenzialdifferenz* ein anderer Ausdruck für *Spannung*.

Zur Unterscheidung und Erhöhung der Aussagekraft wählen wir die zuvor bereits bei den Strömen definierten Schreibweisen für die jeweiligen Arten und Darstellungsformen von Spannungen.

Elektrisches Bauelement: Eine reale oder virtuelle Anordnung mit mindestens zwei punktförmig definierten Anschlüssen, *Anschluss-Knoten*, in die Ströme hinein (heraus) fließen können und zwischen denen im Allgemeinen Spannungen anliegen. Den Zusammenhang zwischen Strömen und Spannungen beschreiben die *konstituierenden Gleichungen* (vgl. Kap. 3), des jeweiligen Bauelements. Sonderfall sind ideale Strom- oder Spannungsquellen, bei denen die Quellgröße konstant und die jeweils andere Größe beliebig (vom angeschlossenen Netzwerk bestimmt) ist. Für die grafische Darstellung werden Symbole verwendet, die meist genormt sind, jedoch z.T. unterschiedlichen Normen folgen.

Elektrisches Netzwerk, elektrische Schaltung: Verknüpfung von beliebigen (linear, nichtlinear, zeitabhängig, verteilt, konzentriert ...) elektrischen Bauelementen mittels Knoten.

Knoten: Theoretisches Konzept, das eine ideal leitende Verbindung zwischen den Anschlüssen von Bauelementen beschreibt, die dadurch gekennzeichnet ist, dass die *Spannung zwischen allen Anschlüssen an einem Knoten gleich Null ist*. Als theoretische Konzept genügt es, einen Knoten als punktförmige Verbindung anzunehmen. Auf zeichnerischer Ebene, beim Erstellen von Schaltplänen, ist dies jedoch nicht praktikabel, so daß zum Verbinden der Bauelemente ein Knoten eine grundsätzlich beliebige Form annehmen kann. In der Praxis genügen zur Darstellung eines Knotens meist Striche zwischen den zu verbindenden Bauelementen und gegebenenfalls ein oder mehrere Punkte, die diese Striche zu einem gemeinsamen Knoten verknüpfen.

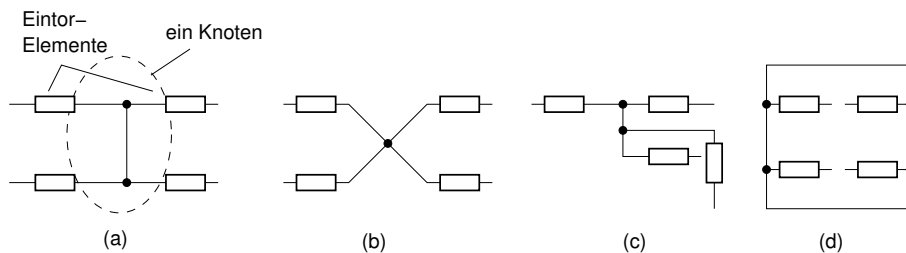


Abb. 4: Vier Beispiele zu möglichen Ausführungen des selben Knotens, der vier Eintor-Elemente ideal elektrisch leitend miteinander verbindet. In der Funktion und Berechnung sind alle Varianten identisch, wobei einzelne ideale Verbindungen der jeweiligen Realisierung eines Knotens durchaus unterschiedliche und zum Teil undefinierte (Abb.d)) Ströme führen.

Entsprechend kann ein Knoten als ein ganzes Netzwerk verteilter Knoten, die durch ideal leitende Verbindungen verbunden sind, identisch dargestellt

werden. Abbildung 4 zeigt vier Ausführungsbeispiele des selben Knotens, der vier Eintor-Elemente verbindet.



Abb. 5: Beispiel zur Verbindung von elektrischen Bauelementen auf einer Leiterplatte. An den Widerstandsbauelementen in der Abbildung der Oberseite sind die Anschlussdrähte zu sehen, die durch Bohrungen in der Leiterplatte auf die Rückseite (Abbildung unten) geführt werden und dort durch Lot (Zinn-Kupfer Eutektikum) mit den Leiterbahnen aus Kupfer verbunden. Die Leiterbahnen erscheinen in Dunkelgrün aufgrund eines darüber aufgetragenen grünen Lötstopp-Lacks). Die Rückseite der abgebildeten Leiterplatte zeigt somit die Knoten des elektrischen Netzwerks mit ihren Verbindungen (ebenfalls noch Teil der Knoten) zu den Bauelementen auf der Oberseite. Quelle Abbildung Wikipedia

In der (physikalischen) Realisierung wird ein Knoten in der Regel durch eine elektrisch leitfähige Verbindung aus einem Material mit hinreichend hoher Leitfähigkeit hergestellt. Dabei bedeutet “hinreichend”, dass die Leitfähigkeit der Verbindung so groß (deren elektrischer Widerstand so klein) im Vergleich zu der Leitfähigkeit (dem Widerstand) der damit verbundenen Bauelemente ist, dass sie demgegenüber vernachlässigt werden kann. Als Material mit in der Regel hinreichend hoher Leitfähigkeit für Verbindungen wird meist Kupfer in Form von Leitungen oder Flächen (Leiterbahnen auf Leiterplatten) eingesetzt. Der elektrische Kontakt wird durch Quetschverbindungen, Verpressen oder insbesondere auf Leiterplatten durch Verlöten hergestellt (vgl. Abb. 5).

Je nach Anwendung eignen sich z.B. auch Aluminium oder Stahl (z.B. Fahrzeugkarosserie). Oft besitzt auch der Anschluss der zu verbindenden Bauelemente ein Stück nahezu ideal leitende Verbindung als Zuführung zu dem eigentlichen Bauelement. Dieser Anschluss wird dann formal mit zu dem Knoten gerechnet.

Zweig: In Form einer “gerichteten Strecke” (Geradenabschnitt) (Graphentheorie: *gerichtete Kante*) symbolisierte Verbindung zwischen zwei Anschluss-Knoten eines Bauelementes, durch die ein Strom fließt und über die eine Spannung abfällt. Strom- und Spannungsrichtung werden im Allgemeinen per Konvention gleich gerichtet gewählt (sogenanntes “Verbraucher-Zählfeilsystem”). Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung eines Zweiges wird durch die konstituierenden Gleichungen des Bauelementes bestimmt. Diese beschreiben die speziellen Eigenschaften des Bauelementes und erfüllen immer auch die Kirchhoffschen Gleichungen. Bei Bauelementen mit nur zwei Anschlüssen sind Zweigstrom und -spannung identisch mit Spannung und Strom des Bauelementes. Bei Bauelementen mit mehr als zwei Anschlüssen ist der Zweig-Begriff im Allgemeinen abstrakt zu verstehen. Damit ist gemeint, dass zwischen den Anschluss-Knoten beliebige Zweige so definiert werden können, dass die Kirchhoffschen Knoten- und Spannungsregeln (KCL, KVL, vgl. Gl. 7, 8) an den Anschluss-Knoten des Bauelementes erfüllt werden. In der Regel ist es am einfachsten die Definition so zu wählen, dass sie den gegebenen *konstituierenden Gleichungen* entsprechen. Ein Beispiel dazu zeigt die nachfolgende Abbildung 6.

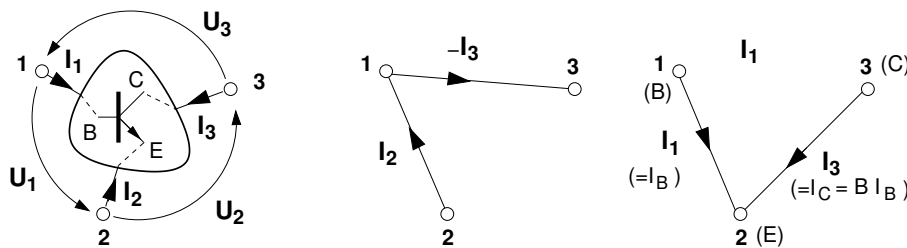


Abb. 6: Links: Dreipol, z.B. Bipolar-Transistor. Mitte und Rechts: Zwei Varianten der Zweigdefinition. Es genügen aufgrund KCL und KVL zwei Zweige, um die jeweils drei möglichen Ströme und Spannungen eindeutig zu definieren. In der rechten Abbildung wurden zur besseren Anschaulichkeit die Zweige entsprechend der Zweige des Transferstrommodells des normal aktiven Bipolartransistors gewählt.

In der (physikalischen) Realisierung repräsentieren die Zweige in der Regel Bauelemente mit beabsichtigten elektrischen Eigenschaften, die zu einem gewünschten Verhalten in Form eines bestimmten Strom-Spannungs-Zusammenhangs an den Anschlüssen führen. Durch Verbindung der Bauelemente durch Knoten entsteht ein komplexes elektrisches Netzwerk, das so konstruiert wird, dass es eine geforderte Aufgabenstellung erfüllt (Signale verstärken, Motoren ansteuern, Daten übertragen ...). Daneben gibt es auch Bauelemente, die eine unerwünschte, aber nicht zu vermeidende



elektrische Wirkung beschreiben (modellieren). Man spricht in diesem Zusammenhang von parasitären oder nichtidealen Bauelementen oder Effekten. Sind diese Wirkungen hinsichtlich des erwünschten Verhaltens nicht zu vernachlässigen, müssen die, zur Modellierung dieser Wirkung benötigten Bauelemente, an der entsprechenden Stelle in dem elektrischen Netzwerk als zusätzliche Zweige berücksichtigt werden. Beispiele hierfür sind parasitärer Widerstand und Induktivität von Verbindungsleitungen (nicht ideale Knoten), magnetische oder kapazitive Verkopplung von Bauelementen.

Zählpfeil: Für die Bewegungsrichtung der Ladungsträger in einem Zweig zwischen zwei Knoten  $a$ ,  $b$  und die elektrische Feldstärke zwischen zwei beliebigen Knoten  $c$ ,  $d$  gibt es prinzipiell zwei mögliche Richtungen (von  $a$  nach  $b$  bzw.  $c$  nach  $d$  oder umgekehrt). Entsprechend haben die, mit der Bewegungsrichtung der Ladungsträger verknüpfte Stromstärke und die, mit der Feldstärke verknüpfte Spannung ebenfalls prinzipiell zwei mögliche Richtungen. Welche tatsächlich in dem konkreten Fall die Richtige ist kann in der Regel nur durch Rechnung mit den entsprechenden Bauelemente-Gleichungen (konstituierenden Gleichungen) und den physikalischen Gesetzen (Kirchhoffschen Gesetze), denen Spannungen und Ströme in einem Netzwerk unterliegen, ermittelt werden. Als Hypothese zu Beginn einer entsprechenden Rechnung werden die Richtungen von Spannungen oder Strömen mit Hilfe von Zählpfeilen definiert. Prinzipiell können beliebige Richtungen angenommen werden, wobei die, in den konstituierenden Gleichungen basierend auf physikalischen Gesetzmäßigkeiten formulierten Zusammenhänge der Richtung von Spannung und Strom an einem Bauelement beibehalten werden sollten, da diese weltweit als implizit vereinbart gelten (Ohmsches Gesetz lautet  $U = R I$  und nicht  $U = -R I$ ). Die Bedeutung des Zählpfeils liegt dabei einzig darin, dass er eine Vereinbarung darstellt, in welcher Richtung ein Strom oder eine Spannung mit positivem Vorzeichen in eine Gleichung eingeht. Ergibt die Rechnung einen positiven Wert dieser Größe, so stimmt deren Richtung mit der angenommenen Richtung des Zählpfeils überein.

Tor: Zwei Anschlüsse, deren Strom die Torbedingung erfüllt: Der Strom, der in den einen Anschluss hineinfließt, muss aus dem Anderen herausfließen.

Eintor(-Element): Jedes elektrische Netzwerk und damit auch jedes Bauelement mit nur zwei Anschlüssen erfüllt die Torbedingung (Beweis durch Kirchhoffsche Knotenregel, KCL).

Topologie (eines el. Netzwerks): Struktur der Verbindungen eines elektri-

schen Netzwerks in Form von Zweigen und Knoten, welche die Kirchhoffschen Spannungs- und Stromgleichungen (KVL, KCL) des Netzwerks erfüllen.

Graph (gerichtet) eines el. Netzwerks: Darstellung der Topologie des Netzwerks mit Definition der Strom- bzw. Spannungsrichtung an einem Zweig. Zur Identifikation werden Zweige und Knoten in der Regel durchgehend numeriert. Bei einem verbundenen Graphen kann jeder Knoten über eine beliebige Sequenz von Zweigen erreicht werden. Wir vereinbaren an dieser Stelle, im Folgenden ausschließlich Netzwerke mit verbundenen Graphen zu behandeln.

## 2 Kirchhoffsche Regeln, Elektrische Leistung

### 2.1 Kirchhoffsche Spannungs(umlauf)-Regel (KVL)

Aus den Maxwellschen Gleichungen folgt allgemein die Wegunabhängigkeit des Integrals für die Spannung  $U_{21}$  zwischen zwei beliebigen Punkten (Knoten) P1, P2:  $\int_{P1}^{P2} \vec{E} d\vec{s} = U_{21}$ . Übertragen auf ein elektrisches Netzwerk lässt sich diese Eigenschaft wie folgt definieren:

**KVL:** für alle in Form eines verbundenen Graphen darstellbare Netzwerke, für alle darin geschlossenen Umläufe über eine beliebige Sequenz von  $N$  Knoten gilt zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$ , dass die algebraische Summe aller  $N$  Knoten-zu-Knoten Spannungen  $u_n(t)$  entlang der geschlossenen Knoten-Sequenz gleich Null ist

$$\sum_{n=1}^N u_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (7)$$

Anmerkung:

- 1) Knoten-zu-Knoten Sequenz erfordert keinen Umlauf über Zweige.
- 2) Bei Umlauf über  $N$  Knoten sind  $N - 1$  Spannungen unabhängig, d.h. eine Spannung ist abhängig.
- 3) Gleichung 7 ist für allgemein zeitabhängige Spannungen formuliert und kann entsprechend in jede andere Art und Darstellungsform von Spannungen überführt werden. D.h. KVL gilt für Gleich- und Wechselspannungen, in Phasorenschreibweise sowie im Bildbereich der Fourier- und Laplace-Transformation.

### 2.2 Kirchhoffsche Knotenregel (KCL)

Aus den Maxwellschen Gleichungen folgt, dass der Gesamtfluss aus einer geschlossenen Hülle (in eine geschlossene Hülle) Null ist :  $\iint_{F(V)} \vec{J} d\vec{f} = 0$  (Kontinuitätsgleichung). Übertragen auf ein elektrisches Netzwerk lässt sich diese Eigenschaft wie folgt definieren:

**KCL:** für alle in Form eines verbundenen Graphen darstellbare Netzwerke, für alle darin definierbaren geschlossenen Hüllen<sup>2</sup> gilt zu jedem beliebigen

---

<sup>2</sup>genauer: Gaußsche Oberflächen, d.h. zweiseitige (Innen- und Außenseite), überschneidungsfreie, geschlossene Oberflächen.

Zeitpunkt  $t$ , dass die algebraische Summe aller  $N$  Zweigströme  $i_n(t)$  in die Hüllfläche hinein (aus der Hüllfläche heraus) gleich Null ist.

$$\sum_{n=1}^N i_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (8)$$

Anmerkung:

- 1) Geschlossene Hülle ist nicht auf Knoten beschränkt. Definition von Überknoten ist möglich.
- 2) Bei  $N$  Strömen in eine geschlossene Hülle sind  $N - 1$  Ströme unabhängig, d.h. ein Strom ist abhängig.
- 3) Gleichung 8 ist für allgemein zeitabhängige Ströme formuliert und kann entsprechend in jede andere Art und Darstellungsform von Strömen überführt werden. D.h. KCL gilt für Gleich- und Wechselströme, in Phasorenschreibweise sowie im Bildbereich der Fourier- und Laplace-Transformation.

## 2.3 Leistung im Zeitbereich

Momentan-, Augenblicksleistung: Wir definieren die Leistung in einem elektrischen Netzwerk über die an den Ladungsträgern verrichtete Arbeit. Dazu haben wir bereits in Gl. 3 einen Ausdruck für eine inkrementelle Verschiebung einer Ladung  $dq$  in einem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  um  $ds$  kennengelernt

$$dw_{dq} = \mathbf{F}ds = dq\mathbf{E}ds. \quad (9)$$

Die Summe der Arbeiten an den inkrementellen Ladungen  $dq$  längs eines Weges zwischen zwei Knoten an den Orten  $x, y$  ergibt sich damit zu

$$dw(t) = \int_x^y dw_{dq} = \int_x^y \mathbf{F}ds = \int_x^y dq\mathbf{E}ds = idt \int_x^y \mathbf{E}ds = u i dt. \quad (10)$$

Darin wurde die Größe  $dq = idt$  vor das Integral gezogen, da definitionsgemäß der Strom in einem Zweig (vgl. Definition "Tor" und "Eintor") und die Zeit in dem betrachteten Augenblick konstant sind. Durch die Bezeichnung  $dw(t)$  wird ausgedrückt, dass wir das Wegintegral zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  ermitteln (Augenblickswert). Diese Zeitabhängigkeit wurde zur verbesserten Übersichtlichkeit in Gl. 10 nicht explizit angegeben. Wollen wir

die über einen Zeitraum verrichtete Arbeit wissen, müssen wir noch das Zeitintegral  $W = \int_{t_1}^{t_2} dw(t)$  bilden, was durch die inkrementelle Formulierung von Gl. 10 in  $dw(t)$  formal ermöglicht wird.

Die letzten beiden Schritte in Gl. 10 wurden mit Hilfe der Definitionen von Spannung  $u(t)$  und Strom  $i(t)$  nach Gl. 1 und 6 zum Zeitpunkt  $t$  durchgeführt.

Mit diesen Augenblickswerten von Strom und Spannung ergibt sich definitionsgemäß die *Augenblicks-Leistung*

$$p(t) := \frac{dw}{dt} = u(t) i(t) \quad (11)$$

Spannung und Strom sind in dieser Berechnung in gleicher Richtung definiert worden. Ergeben sich *bei dieser Definition positive Werte* (z.B. bei einem Zweig mit einem Widerstand), so nimmt dieser Zweig eine Leistung auf im Sinne eines “Verbrauchers”. Der Term “Verbraucher” meint dabei, dass die verbrauchte Leistung bzw. Energie in eine andere Energieform umgewandelt wird und somit nicht mehr in elektrischen Größen vorliegt. Zum Beispiel wird im Fall eines Widerstandes diese Leistung in Wärme umgewandelt. Im allgemeinen Sprachgebrauch spricht man dann von *Verlustleistung*. Ergeben sich negative Leistungen, so gibt das Element des Zweiges eine Leistung ab und man spricht von einer Quelle. Nur Quellen können Leistung abgeben, jedoch nicht alle Quellen geben eine Leistung ab wie Abb. 7 zeigt.

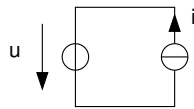


Abb. 7: Ein einfaches Beispiel zur Demonstration, dass Quellen sowohl Leistung aufnehmen als auch abgeben können. Hier hängt die Antwort welche der beiden Quellen Leistung abgibt bzw. aufnimmt davon ab, ob  $u$  bzw.  $i$  einen positiven oder negativen Wert besitzen. Für den Fall, dass beide Werte positiv sind, gibt die Stromquelle Leistung ab (da  $u i < 0$ ) und die Spannungsquelle nimmt Leistung auf (da  $u i > 0$ ).

Die über einen Zeitraum  $T$  (z.B. Dauer eines Ereignisses oder Periodendauer eines Signals) verrichtete Arbeit bzw. aufgewendete Energie ergibt sich mit Gl.11 zu

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dw(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} u(t) i(t) dt. \quad (12)$$

In einer graphischen Interpretation entspricht damit die in einem Zeitraum aufgenommene/abgegebene Energie der Fläche unter dem  $p(t)$  Verlauf (vgl. schraffierte Fläche in Abb. 8).

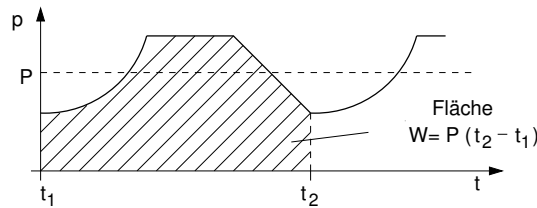


Abb. 8: Beispiel eines zeitabhängigen Verlaufs der Verlustleistung  $p(t)$  mit der Energie  $W$  als Fläche unter der Verlustleistungskurve nach Gl. 12.

Wenn wir diese Fläche  $W$  als den Flächeninhalt eines äquivalenten Rechtecks definieren, mit der Grundseite gleich der Länge des betrachteten Zeitintervalls  $t_2 - t_1$ , dann definiert die Höhe dieses Rechtecks den *Mittelwert der Verlustleistung*

$$P = \frac{W}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt. \quad (13)$$

Gesamtleistung eines Netzwerks: Es lässt sich einfach zeigen (z.B. über Tellegen Theorem), dass die Gesamtleistung in einem abgeschlossenen Netzwerk (Gaußsche Hülle umfasst das gesamte Netzwerk) zu jedem Zeitpunkt gleich Null ist. Für ein Netzwerk mit  $N$  Zweigen mit Zweigspannung  $u_n(t)$ , Zweigstrom  $i_n(t)$  und dem Augenblickswert der Zweigleistung  $p_n(t)$  in einem Zweig  $n$  gilt

$$\sum_{n=1}^N u_n(t) i_n(t) = \sum_{n=1}^N p_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (14)$$

Spannung und Strom sind in dieser Formulierung wieder definitionsgemäß in gleicher Richtung definiert so dass eine Verlustleistung einen positiven Wert besitzt. Geht man davon aus, dass Quellen eine Leistung abgeben (nicht immer der Fall) und ordnet die Summe in Gl. 14 so um, dass alle Verlustleistungsterme auf der einen Seite verbleiben und die restlichen Terme von Zweigen mit Quellen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens verschoben werden, so erhält man eine Leistungsbilanz der Form *abgegebene Leistung (durch Quellen) = aufgenommene Leistung (Verlustleistung)*. Die *abgegebene Leistung* hat dabei aufgrund der Verschiebung auf die andere Seite des Gleichheitszeichens ein *negatives Vorzeichen* erhalten. Dieses Vorzeichen kann als Umkehr des Spannungs- oder des Strompfeils interpretiert werden (sogenanntes *Erzeuger-Zählpfeilsystem*).

### 3 Konstituierende Modell-Gleichungen

Die konstituierenden Gleichungen eines Bauelements geben den Zusammenhang zwischen Spannungen und Strömen an den Anschlüssen/Klemmen eines elektrischen Bauelements an. Genauer gesagt geben sie die Strom/Spannungs-Zusammenhänge an einem *Modell, das die zu beschreibende Eigenschaften eines elektrischen Bauelements oder einer elektrischen Eigenschaft nachbildet* an (vgl. z.B. Transistormodell o.ä.). Dabei kann das Bauelement auch aus einer komplexen Zusammenschaltung mehrerer einzelnen Bauelemente bestehen (z.B. Operationsverstärker oder Mikrocontroller). Im Allgemeinen ist dieser Zusammenhang nichtlinear (nichtlineare Schaltung), kann aber durch Linearisierung in einem bestimmten Betriebspunkt (Arbeitspunkt) linearisiert werden. Dadurch ergeben sich einfachere Überlegungen für Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge und einfacher lösbare Gleichungssysteme.

Alle elektrischen Netzwerke und damit auch alle elektronischen Schaltungen werden durch

- den Schaltplan, der die Verknüpfungen der Bauelemente untereinander charakterisiert,
- die Bilanz-Gleichungen KCL, KVL, die getrennt voneinander jeweils nur für Ströme oder nur für Spannungen aufgestellt werden und
- die konstituierenden Gleichungen der Bauelemente, *durch die Spannungen und Ströme in der für jedes Bauelement charakteristischen Art miteinander verknüpft werden*

beschrieben.

Nachfolgend werden mit der Spannungs- und Stromquelle sowie Widerstand  $R$ , Induktivität  $L$ , Kapazität  $C$  und gekoppelten Induktivitäten  $M$ , kurz  $RLCM$  die konstituierenden Gleichungen der wichtigsten Bauelemente linearer elektrischer Netzwerke betrachtet.

#### 3.0.1 Elektrischer Widerstand

Ein elektrischer Widerstand (Formelzeichen  $R$ ) dient physikalisch zur Beschreibung der endlichen Leitfähigkeit eines elektrischen Leiters. Genaugenommen liegt eine endliche Leitfähigkeit in der Realität immer vor, da kein Bauelement eine unendlich hohe Leitfähigkeit (idealer Leiter  $R=0$ ) oder ein Leitfähigkeit gleich Null ( $R = \infty$ , idealer Isolator) besitzt. Zur Vereinfachung von Betrachtungen werden aber hinreichend kleine oder große Werte

durch diese Grenzwerte idealisiert. Eine nicht ideale Leitfähigkeit kann erwünscht (Bauelement "Widerstand") oder unerwünscht (z.B. Leitungs- oder Verlustwiderstände) sein. Durch die Leitfähigkeit bewirkt eine an den Leiter angelegte Spannung einen zur Leitfähigkeit proportionalen Stromfluss. Oder umgekehrt, ein Stromfluss durch den Leiter bewirkt das Auftreten einer Spannung entlang des Leiters. In der Schaltungstechnik werden Widerstände als Bauelemente zur Konstruktion elektrischer Netzwerke eingesetzt. Sie dienen dort meist zur Aufteilung und Verringerung von Strömen und Spannungen sowie zur Wandlung eines Stroms in eine Spannung und umgekehrt.

Wir betrachten zur Vereinfachung ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit im Folgenden elektrisch leitfähige Anordnungen als Widerstandsbauelemente ("Widerstände") mit zwei Anschlüssen (Eintor-Elemente).

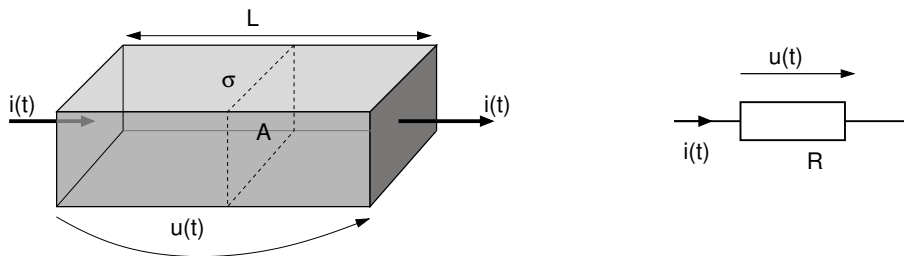


Abb. 9: Links: Material mit Leitfähigkeit  $\sigma$  mit homogenem Stromfluss  $i$  durch die Fläche  $A$  und Spannungsabfall  $u$  über die Länge  $L$ . Rechts: Entsprechendes Symbol des Widerstands  $R = \frac{L}{\sigma A}$ , das die daraus resultierende Verknüpfung zwischen  $u$  und  $i$  symbolisiert.

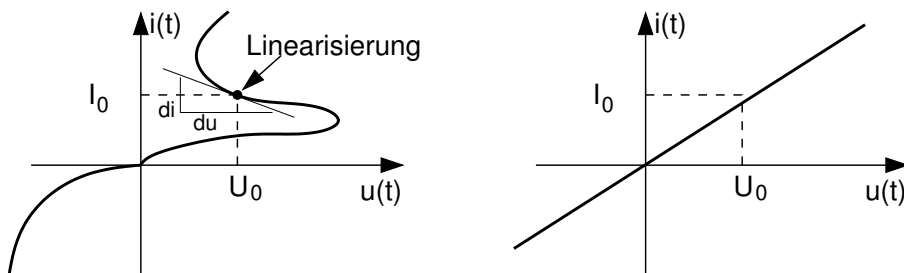


Abb. 10: Links: Kennline eines nichtlinearen, stromgesteuerten Widerstands. Als Beispiel für eine Linearisierung in einem Arbeitspunkt wurden  $U_0, I_0$  im Bereich der negativen Steigung gewählt. Rechts: Beispiel für einen linearen Widerstand.

Der Widerstand verknüpft Spannung und Strom in der allgemeinen zeit-unabhängigen Form  $u = u(i)$  bei stromgesteuerten bzw.  $i = i(u)$  bei spannungsgesteuerten Widerständen. Im Falle eines in der Regel für Widerstands-



Bauelemente beabsichtigten linearen Zusammenhangs ergibt sich die konstituierende Gleichung

$$u = R i, \quad R = \text{const.} \quad (15)$$

In Gleichungen, in denen  $R$  im Kehrwert auftritt, ist es zum Teil vorteilhaft, direkt mit dem entsprechend definierten Leitwert

$$G := \frac{1}{R} \rightarrow i = \frac{1}{R} u = Gu \quad (16)$$

zu arbeiten.

Bei nichtlinearen Widerständen kann bei hinreichend kleinen Aussteuerungen um einen Arbeitspunkt  $U_0, I_0$  auf der Kennlinie der Kleinsignal-Widerstand über  $r = \left. \frac{du}{di} \right|_{U_0, I_0}$  bestimmt werden.

In Erweiterung der physikalischen Bedeutung kann die konstituierende Gleichung des Widerstandes auch ganz allgemein zur Modellierung von Strom-/Spannungs-Zusammenhängen, die durch diese Gleichung beschreibbar sind, eingesetzt werden. Ein Beispiel dazu ist die Ersatzspannungs- oder -stromquelle in Kapitel 4.4.

### 3.0.2 Ideale Spannungsquelle

Eine (ideale) Spannungsquelle besitzt einen spezifischen, eindeutig vorgegebenen Spannungsverlauf  $u(t)$  über der Zeit (z.B.  $u(t) = \text{const.} = 1V$  (Gleichspannungs-Quelle) oder  $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ ,  $U_0 = \text{const.}$  (zeitharmonischer Verlauf)). Die Spannung hängt dabei *nicht* von dem Strom durch die Spannungsquelle ab. Der Strom  $i(t)$  durch die Spannungsquelle kann *beliebige und damit auch negative* Werte annehmen und ergibt sich ausschließlich über die konstituierende Gleichung des an das Tor der Spannungsquelle angeschlossenen Netzwerks. Zu jedem Zeitpunkt  $t = t_0$  gilt daher

$$u(t = t_0) = \text{const.} \quad \forall i(t_0) \quad (17)$$

Einen Sonderfall stellt die ideale Spannungsquelle dann dar, wenn ihre Quellspannung Null beträgt ( $u = 0$ ). Da in diesem Fall die Spannung zwischen den beiden Anschlüssen der Quelle gleich Null ist, stellen die beiden Anschlüsse definitionsgemäß den selben Knoten dar (vgl. Definition eines Knotens), d.h. die ideale Spannungsquelle mit der Spannung Null stellt einen Knoten in Form einer Verbindung der beiden Anschlüsse der Quelle. Man sagt dazu auch, dass die Spannungsquelle in diesem Fall einen "Kurzschluss" darstellt.

Dieser Sachverhalt wird auch durch den Begriff des Innenwiderstandes ausgedrückt, der bei einer Spannungsquelle verwendet wird um anzugeben,

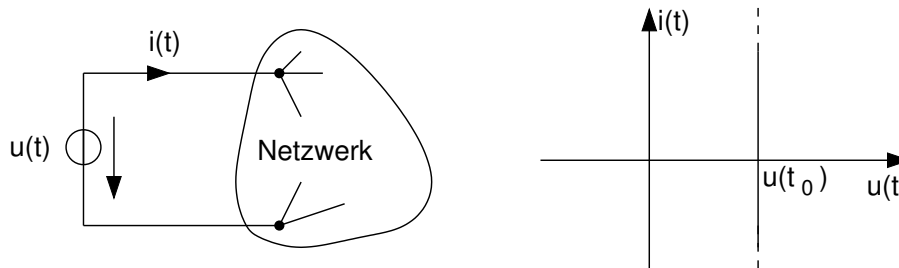


Abb. 11: Links: ideale Spannungsquelle mit beliebigem elektrischen Netzwerk als Last. Der Strom  $i(t)$  ergibt sich aus der konstituierenden Gleichung des Netzwerks. Rechts: Kennlinie einer idealen Spannungsquelle mit einem Zeitwert der Spannung  $u(t_0)$  bei beliebigen Strömen in das Netzwerk (Lastströme).

in welchem Maße sich die Spannung an den Klemmen der Spannungsquelle ändert, wenn ein Strom  $i$  in den Anschlüssen (dem Tor) der Spannungsquelle fließt. Der Innenwiderstand wird allgemein als sogenannte *Wirkungsfunktion* definiert in der Form

$$\text{Wirkung} = \text{Wirkungsfunktion} \times \text{Ursache}$$

und hier konkret

$$\text{Spannungsabfall} = \text{Innenwiderstand} \times \text{Strom}$$

formuliert.

Wir wissen aus der entsprechenden Überlegung zuvor, dass der Fall  $u(t_0) = 0$  dem eines Kurzschlusses zwischen den beiden Klemmen entspricht. Dies ist auch anhand der Kennlinie in Abb. 11 zu erkennen, für die sich in diesem Fall ein senkrechter Verlauf entlang der y-Achse ergibt. Dies entspricht der Kennlinie eines linearen Widerstands mit dem Wert Null und ist konsistent zu der Definition des Kurzschlusses zwischen den Anschlüssen für den Fall einer Quellspannung von Null. Das gleiche Ergebnis ergibt sich für den Zusammenhang zwischen infinitesimalen Strom- und Spannungsänderungen (Linearisierung) in einem beliebigen (Arbeits)-Punkt  $i = I_0$  auf der Kennlinie, d.h.  $\frac{du}{di}|_{I_0} = 0$ . Für einen Wert der Quellspannung von Null bzw. für das Verhältnis von Spannungs- zu Stromänderungen  $\frac{du}{di}$ , repräsentiert die ideale Spannungsquelle daher einen Kurzschluss zwischen ihren Anschlüssen.

### 3.0.3 Ideale Stromquelle

Hier gelten analog die Aussagen zur Spannungsquelle nur mit Strom und Spannung jeweils vertauscht. Eine (ideale) Stromquelle besitzt einen spezifischen, eindeutig vorgegebenen Stromverlauf  $i(t)$  über der Zeit (z.B.  $i(t) = \text{const.} = 1A$  (Gleichstrom-Quelle) oder  $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ ,  $I_0 = \text{const.}$  (zeithar-

monischer Verlauf)). Der Strom hängt dabei *nicht* von der Spannung über der Stromquelle ab. Die Spannung  $u(t)$  über der Stromquelle kann *beliebige und damit auch negative* Werte annehmen und ergibt sich ausschließlich über die konstituierende Gleichung des an das Tor der Stromquelle angeschlossenen gesamten Netzwerks. Zu jedem Zeitpunkt  $t = t_0$  gilt daher

$$i(t = t_0) = \text{const.} \quad \forall u(t_0) \quad (18)$$

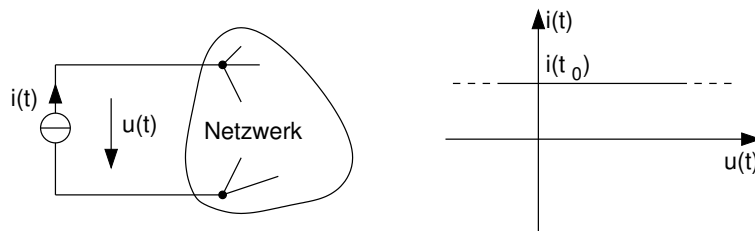


Abb. 12: Links: ideale Stromquelle mit beliebigem elektrischen Netzwerk als Last. Der Strom  $i(t)$  ergibt sich aus der konstituierenden Gleichung des Netzwerks. Rechts: Kennlinie einer idealen Stromquelle mit einem Zeitwert des Stroms  $i(t_0)$  bei beliebigen Spannungen an dem Netzwerk.

Innenwiderstand einer idealen Stromquelle: entsprechend der Überlegungen zur Spannungsquelle ergibt sich aufgrund des horizontalen Verlaufs der Kennlinie der Stromquelle ein Innenwiderstand von Unendlich. Für einen Wert des Quellstroms von Null bzw. für das Verhältnis von Spannungs- zu Stromänderungen  $\frac{du}{di}$ , repräsentiert die ideale Stromquelle daher einen Leerlauf zwischen ihren Anschlüssen.

### 3.0.4 Reale Strom- und Spannungsquelle

Bei einer realen Spannungsquelle führt ein Strom, der aus der Quelle fließt dazu, dass die zwischen den Klemmen der realen Quelle (am Quell-Tor) liegende Spannung sich im Maße des Stromflusses verringert; d.h. je *niederohmiger* (kleinerer Widerstandswert) die Last, umso kleiner ist die Klemmspannung. Oft besteht, wie in Abb. 13 links dargestellt, zwischen Stromfluss und Verringerung der Klemmspannung ein (näherungsweise) linearer Zusammenhang, so dass das in Abb. 13 Mitte gezeigte Modell einer realen Spannungsquelle mit konstantem Innenwiderstand anwendbar ist.

Die zu beobachtende Verringerung der Klemmspannung wird darin im Sinne der zuvor in Kap. 3.0.2 definierten Wirkungsfunktion durch den konstanten Widerstand  $R$  in Reihe zu einer idealen Spannungsquelle  $u_0$  modelliert. Bezüglich der Klemmgrößen  $u_x$  und  $i$  kann anstelle des in der Abbildung

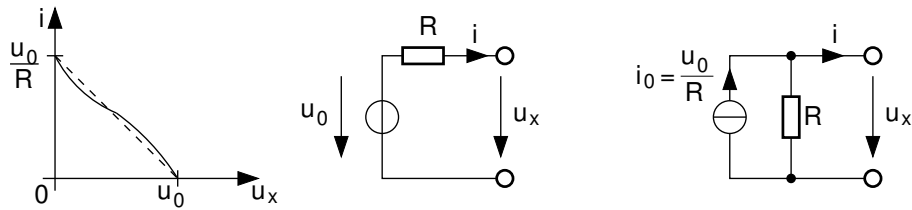


Abb. 13: Links: Reale Spannungsquelle bei der eine (näherungsweise) lineare Reduktion der Ausgangsspannung  $u_x$  bei steigendem Ausgangsstrom  $i$  beobachtet wird. Mitte: Schaltungsmodell einer realen Spannungsquelle mit den in der Abbildung links gezeigten Eigenschaften. Rechts: (Nur) bezüglich der Klemmgrößen  $u_x$  und  $i$  äquivalente Darstellung als reale Stromquelle (sog. Norton-Thévenin Äquivalenz-Umwandlung).

links gezeigten Modells auch die rechts abgebildete Variante verwendet werden, die sich einfach über Umformung der Netzwerkgleichungen der linken Schaltung aus Gl. 21 ergibt

$$u_x = u_0 - iR \quad (19)$$

$$i = \frac{1}{R}(u_0 - u_x) \quad (20)$$

$$= \underbrace{\frac{u_0}{R}}_{i_0} - \frac{u_x}{R} \quad (21)$$

Eine einfache Inspektion der rechten Schaltung zeigt, dass diese äquivalent mit der Gleichungszeile 21 ist.

Man erkennt in Abb. 13 links auch, dass eine reale Spannungs- oder Stromquelle eine Kennlinie hat, deren Steigung zwischen der einer idealen Spannungs- und einer idealen Stromquelle liegt.

Setzt man in den Ersatzschaltungen die ideale Quelle jeweils zu Null (d.h.  $u_0 = 0$  bzw.  $i_0 = 0$ ), dann wird die Quelle nur noch durch deren Innenwiderstand ( $0 \Omega$  (*Kurzschluss*) bei idealer Spannungsquelle,  $\infty \Omega$  (*Leerlauf*) bei idealer Stromquelle) repräsentiert. Es verbleibt daher in beiden Ersatzschaltbildern nur noch der Widerstand  $R$ , der somit definitionsgemäß den Innenwiderstand der realen Quelle darstellt.

### 3.0.5 Kapazität

Die elektrische Kapazität beschreibt das Vermögen einer Leiteranordnung, elektrische Ladung in Abhängigkeit von der angelegten Spannung zu generieren (genauer, zu separieren). Dies kann eine erwünschte Eigenschaft bei der Realisierung von Kondensatoren sein. Unerwünschte Kapazität wird oft

auch als *parasitäre Kapazität* bezeichnet und tritt grundsätzlich zwischen allen Leitern einer beliebigen Anordnung auf. Wir betrachten im Folgenden nur Kondensator-Bauelemente mit zwei Anschlüssen, d.h. in Form von Eintor-Elementen. Die Definition der Kapazität ergibt sich über die Definition des Stroms in Form der pro Zeit  $dt$  fließenden elektrischen Ladung  $dq$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}, \quad (22)$$

$$= \underbrace{\frac{dq}{du}}_{C(u)} \frac{du}{dt} \quad \text{mit} \quad C(u) := \frac{dq}{du}, \quad (23)$$

$$= C(u) \frac{du}{dt}. \quad (24)$$

$$(25)$$

Im Falle eines in der Regel bei Kondensator-Bauteilen beabsichtigten linearen Zusammenhangs zwischen Ladung und Spannung ergibt sich eine konstante Kapazität  $C = \frac{dq}{du} = \frac{q}{u}$ . Abbildung 14 zeigt das Symbol zur Kennzeichnung eines Zweiges mit einer Kapazität in einem Schaltplan.

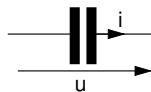


Abb. 14: Symbol zur Kennzeichnung einer Kapazität in Schaltplänen.

Weitere Anmerkungen zu Kapazitäten.

- Für eine mathematische Behandlung stellt die Spannung an einer Kapazität im Gegensatz zum Strom eine stetige und damit differenzierbare Größe dar. Dies ist ursächlich physikalisch begründet, da die Spannung über die Definitionsgleichung der Kapazität direkt proportional zur elektrischen Ladung ist, der sich als eine physikalische Größe nur stetig über der Zeit ändern kann. Im mathematischen Modell der Kapazität lässt sich die Stetigkeit z.B. anhand der Eigenschaften des Riemann-Integrals zeigen. Im Fall einer zeitlich konstanten Kapazität ergibt sich für ein infinitesimal kleines Zeitintervall um einen Zeitpunkt  $t$

$$du(t) = \frac{1}{C} i(t) dt, \quad (26)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{C} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} i(t) dt, \quad (27)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t + \varepsilon) - u(t - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{C} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} i(t) dt. \quad (28)$$

Ändert sich  $i(t)$  auf der rechten Seite zum Zeitpunkt  $t = 0$  stetig oder sprungförmig zwischen zwei endlichen Werten, so ist der Grenzwert der rechten Seite Null. Für die linke Seite bedeutet dies, dass der Strom sich in diesem Zeitraum stetig ändert, d.h.  $u(t + \varepsilon) = u(t - \varepsilon)$

- Der Strom durch eine Kapazität ist proportional der zeitlichen Änderung (Änderungsrate) der Spannung an der Kapazität. Je kleiner die Änderungsrate, umso kleiner ist der Strom. Im statischen Grenzfall ist die Spannung konstant (Gleichspannungs- Gleichstrom-Betrachtung) und es fließt kein Strom. In diesem Fall kann die Kapazität zur einfacheren Betrachtung aus dem Netzwerk entfernt werden, ohne dass sich Spannungen oder Ströme im Netzwerk ändern.

### 3.0.6 Induktivität

Die Induktivität beschreibt die Wirkung des Induktionsgesetzes hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Spannung und Strom an einer elektrischen Struktur (z.B. Bauelement oder Leiteranordnung). Diese Wirkung kann eine erwünschte Eigenschaft bei der Realisierung von Induktivitäts-, Spulen- oder Übertrager- oder Transformator-Bauelementen sein. Unerwünschte Induktivität wird oft auch als *parasitäre Induktivität* oder *induktive Verkopplung* bezeichnet und tritt grundsätzlich zwischen allen Leitern einer beliebigen Anordnung auf, in denen Ströme fließen können. Wir betrachten im Folgenden nur Induktivitäten als Bauelemente mit zwei Anschlüssen, d.h. in Form von Eintor-Elementen.

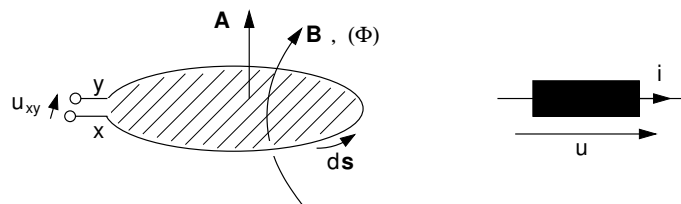


Abb. 15: Links: Beispiel einer Leiterschleife, die von einer magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$  durchsetzt wird, zur Verdeutlichung der Zusammenhänge der Größen des Induktionsgesetzes. Rechts: Schaltplan-Symbol einer Induktivität.

Abbildung 15 zeigt schematisch eine elektrische Struktur in Form einer Leiterschleife, die eine Fläche  $\mathbf{A}$  aufspannt und die von einer magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$  durchsetzt wird. Das Induktionsgesetz

$$-\oint_{\partial\mathbf{A}} \mathbf{E}d\mathbf{s} = \iint_{\mathbf{A}} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}d\mathbf{A} \quad (29)$$

kann mit Hilfe der in Gl. 6 definierten Spannung umgeschrieben werden zu

$$u_{xy} = \iint_{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} \quad (30)$$

wobei  $u_{xy}$  sich definitionsgemäß aus der Integration  $\mathbf{E}ds$  beginnend am Ort  $x$  in rechtshändiger Zuordnung<sup>3</sup> entlang des Randes  $\partial\mathbf{A}$  der Fläche  $\mathbf{A}$  bis zum Ort  $y$  ergibt. Dabei fallen mathematisch im Sinne des Umlaufintegrals die Punkte  $x \rightarrow y$  zusammen. Technisch sind diese Anschlüsse getrennt und bilden die Anschlüsse des im weiteren Verlauf mit Induktivität bezeichneten Elements. Das Integral auf der rechten Seite von Gl. 30 kann unter der Voraussetzung der Zulässigkeit der Vertauschbarkeit von Zeitableitung und Flächenintegration geschrieben werden als

$$\iint_{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} = \frac{d}{dt} : \iint_{\mathbf{A}} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \frac{d}{dt} \Phi. \quad (31)$$

Darin wird mit dem *magnetische Fluss*

$$\Phi := \iint_{\mathbf{A}} \mathbf{B} d\mathbf{A} \quad (32)$$

der Anteil von  $\mathbf{B}$  definiert, der durch die Fläche  $\mathbf{A}$  tritt. Damit lässt sich das Induktionsgesetz in einer für die nachfolgende Anwendung geeigneten vereinfachten Form

$$u(t) = \frac{d\Phi}{dt} \quad (33)$$

schreiben, wobei anstelle  $u_{xy}$  die allgemeiner klingende Bezeichnung  $u(t)$  gewählt wurde. Bei der Anwendung dieser vereinfachten Form ergibt sich die Richtung der Spannung entsprechend der zugrundeliegenden Integral-Darstellung aus dem *rechtshändigen Umlauf um den Fluss*  $\Phi$ , der die Fläche in Richtung der gewählten Flächennormale durchsetzt.

Gleichung 33 liefert uns eine Version des Induktionsgesetzes, die bereits eine Spannung enthält. Jedoch fehlt für eine komplette konstituierende Gleichung noch ein Ausdruck, der den Fluss  $\Phi$  durch die Stromstärke  $i$ , die durch die Struktur (hier die Schleife) fließt, ausdrückt. Explizit würde dies gehen mit Hilfe des Durchflutungssatzes  $\oint_{\partial\mathbf{A}} \mathbf{H} ds = \iint_{\mathbf{A}} \mathbf{J} d\mathbf{A}$ , der eine Verbindung zwischen Stromdichte  $|\mathbf{J}| = i/|\mathbf{A}|$  im Leiter und magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$ , aus der sich über  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  mit Gl. 32 der Fluss  $\Phi(i)$  ergibt. Je nach Ausführung der Struktur (gerader Leiter, Schleife, mehrfach gewundene Schleifen...) ergeben sich spezifische  $\Phi(i)$ -Zusammenhänge. Diese können formal in der

<sup>3</sup>Der Daumen der rechten Hand zeigt in Richtung von  $\mathbf{A}$  die Finger in Richtung  $ds$ .

folgenden Form einer konstituierenden Gleichung berücksichtigt werden

$$u(t) = \frac{d\Phi(i)}{dt}, \quad (34)$$

$$= \underbrace{\frac{d\Phi}{di}}_{L(i)} \frac{di}{dt} \quad \text{mit} \quad L(i) := \frac{d\Phi(i)}{di}, \quad (35)$$

$$= L(i) \frac{di}{dt}. \quad (36)$$

Dies ist die konstituierende Gleichung einer Induktivität  $L$ . Sie steht als Modell für alle Strukturen, in denen ein Stromfluss zu einem magnetischen Fluss durch die von der Struktur aufgespannte Fläche führt, wodurch eine Spannung zwischen den Anschlüssen der Struktur induziert wird. Der Quotient  $L(i) := \frac{d\Phi(i)}{di}$  wird als die *Induktivität* der Anordnung bezeichnet und berücksichtigt anhand seines  $\Phi(i)$  Zusammenhangs die spezielle Ausführung der jeweiligen Struktur. Abbildung 15 zeigt das zugehörige Symbol zur Kennzeichnung einer Induktivität in Schaltplänen. Im Falle eines in der Regel bei Induktivitäts-Bauteilen beabsichtigten *linearen* Zusammenhangs zwischen magnetischem Fluss und Strom ergibt sich eine konstante Induktivität  $L = \frac{d\Phi(i)}{di} = \frac{\Phi}{i} = \text{const.}$

Weitere Anmerkungen zu Induktivitäten.

- Für eine mathematische Behandlung stellt der Strom durch die Induktivität im Gegensatz zur Spannung eine stetige und damit differenzierbare Größe dar. Dies ist ursächlich physikalisch begründet, da der Strom über die Definitionsgleichung der Induktivität direkt proportional zum magnetischen Fluss ist, der sich als eine physikalische Größe nur stetig über der Zeit ändern kann. Im mathematischen Modell der Induktivität lässt sich die Stetigkeit wie zuvor bei der Kapazität z.B. anhand der Eigenschaften des Riemann-Integrals zeigen. Im Fall einer konstanten Induktivität ergibt sich für ein infinitesimal kleines Zeitintervall um einen Zeitpunkt  $t$

$$di = \frac{1}{L} u(t) dt, \quad (37)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} di = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{L} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} u(t) dt, \quad (38)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i(t + \varepsilon) - i(t - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{L} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} u(t) dt. \quad (39)$$



Ändert sich  $u(t)$  auf der rechten Seite zum Zeitpunkt  $t = 0$  stetig oder sprungförmig zwischen zwei endlichen Werten, so ist der Grenzwert der rechten Seite Null. Für die linke Seite bedeutet dies, dass der Strom sich in diesem Zeitraum stetig ändert, d.h.  $i(t + \varepsilon) = i(t - \varepsilon)$ .

- Die Spannung an einer Induktivität ist proportional der zeitlichen Änderung (Änderungsrate) des Stroms durch die Induktivität. Je kleiner die Änderungsrate, umso kleiner ist die Spannung. Im statischen Grenzfall ist der Strom konstant (Gleichspannungs- Gleichstrom-Betrachtung) und fällt keine Spannung an der Induktivität ab, d.h.  $u(t) = 0$ . In diesem Fall kann die Induktivität zur einfacheren Betrachtung in dem Netzwerk durch einen Kurzschluss ( $u(t) = 0$ ) ersetzt werden, ohne dass sich Spannungen oder Ströme im Netzwerk ändern.

### 3.0.7 Gekoppelte Induktivitäten (Übertrager)

Der magnetische Fluss, der von einem Leiter erzeugt wird, durchdringt nicht nur die von dem Leiter aufgespannte Fläche sondern auch die von allen anderen Leitern eines Netzwerks aufgespannten Flächen. Somit kann allgemein gesagt werden, dass grundsätzlich alle stromdurchflossenen Leiter eines elektrischen Netzwerks über deren magnetischen Flüsse miteinander gekoppelt sind. In den zu den Flächen gehörenden Leitern induziert der Fluß, wie zuvor bei den Überlegungen zur Induktivität, eine Spannung. Bei einem *Übertrager* und *Transformator* als elektrische Bauelemente wird diese Eigenschaft gezielt genutzt. Abb. 16 zeigt die grundsätzliche Wirkungsweise der magnetischen Kopplung anhand von zwei Leiterschleifen.

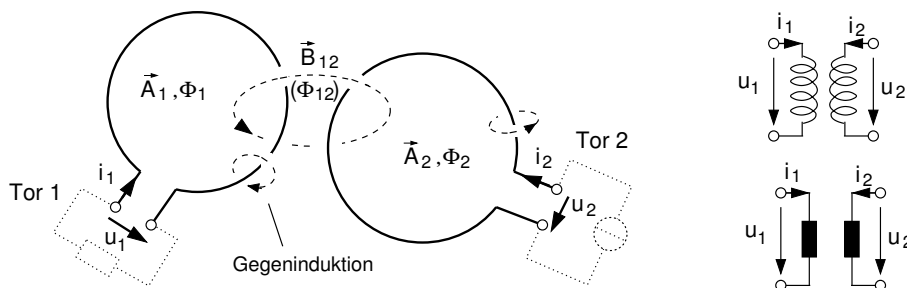


Abb. 16: Links: Zwei durch eine magnetische Flussdichte  $\vec{B}_{12}$  gekoppelte geschlossene Leiterschleifen. In diesem Beispiel wird an Tor 2 ein zeitveränderlicher Strom  $i_2$  eingeprägt und die dadurch an Tor 1 induzierte Spannung  $u_1$  betrachtet. Rechts: Zwei Schaltplan-Symbole zur Darstellung von verkoppelten Leiterschleifen, Übertragern oder Transformatoren.

Die darin eingetragenen Spannungs- und Stromrichtungen sind beliebig

gewählt worden, jedoch müssen die konstituierenden Gleichungen den Zusammenhang der Richtungen zwischen den beiden Toren durch entsprechende Vorzeichenwahl für die konkrete Anordnung abbilden. Dazu dienen die folgenden Überlegungen.

- Durch den in der Leiterschleife 2 fließenden zeitveränderlichen Strom  $i_2$  wird eine magnetische Flussdichte erzeugt, von der ein Teil  $\vec{B}_{12}$  die Fläche  $\vec{A}_1$  der Leiterschleife 1 durchdringt und dort einen Fluss  $\Phi_{12} = \int_{\vec{A}_1} \vec{B}_{12} d\vec{A}$  hervorruft.
- Aufgrund des Induktionsgesetzes wird in der ersten Schleife eine Spannung  $u_1$  induziert, die zu einem Strom  $i_1$  führt. Die aus  $i_1$  resultierende Flussdichte ist der verursachenden Flussdichte  $\vec{B}_{12}$  entgegen gerichtet (Gegeninduktion, vgl. Abb. 16). Der Strom  $i_1$  muss dafür entgegen der Richtung des Zählpfeils von  $i_1$  fließen. Die Richtung von  $u_1$  stimmt mit der eingezeichneten Richtung des Zählpfeils überein.
- Der magnetische Fluss in Schleife 1

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12} \quad (40)$$

setzt sich zusammen aus dem durch  $i_1$  erzeugten Fluss  $\Phi_{11}$  und dem Anteil  $\Phi_{12}$  des von  $i_2$  in Leiterschleife 2 erzeugten Flusses  $\Phi_2$ , der auch Leiterschleife 1 durchdringt. Das Vorzeichen von  $\Phi_{12}$  hängt von der konkreten Anordnung ab und soll im Folgenden für das Beispiel in Abb. 16 bestimmt werden.

- Aus dem Induktionsgesetz folgt mit Gl. 40

$$u_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_{11}}{dt} \pm \frac{d\Phi_{12}}{dt}, \quad (41)$$

$$= L_{11} \frac{di_1}{dt} \pm L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad \text{mit } L_{11} := \frac{d\Phi_{11}}{di_1}, \quad L_{12} := \frac{d\Phi_{12}}{di_2}. \quad (42)$$

- Da wir aus den Vorüberlegungen wissen, dass bei einem Stromfluss  $i_2$  in Schleife 2 in Richtung des Zählpfeiles die Richtung von  $u_1$  mit der in Abbildung gewählten Zählpfeil-Richtung übereinstimmt, gilt das ”+“ Zeichen.
- Entsprechende Überlegungen gelten bei Einspeisung eines Stromes in Schleife 1 und Betrachtung der induzierten Spannung in Schleife 2. Es

ergibt sich

$$u_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{d\Phi_{22}}{dt} \pm \frac{d\Phi_{21}}{dt}, \quad (43)$$

$$= L_{22} \frac{di_2}{dt} \pm L_{21} \frac{di_1}{dt} \quad \text{mit } L_{22} := \frac{d\Phi_{22}}{di_2}, \quad L_{21} := \frac{d\Phi_{21}}{di_1}. \quad (44)$$

Wobei ebenfalls das ”+“ Zeichen gilt.

Anmerkungen:

- $L_{11}$ ,  $L_{22}$  werden als Eigeninduktivitäten bezeichnet, da sie den Ursache- (eingepprägter Strom) Wirkungs- (induzierte Spannung) Zusammenhang für die selbe Schleife beschreiben. Dagegen werden  $L_{12}$ ,  $L_{21}$  als Gegen- oder Koppelinduktivitäten bezeichnet, da sie den Ursache-Wirkungs-Zusammenhang zwischen den beiden verkoppelten Schleifen beschreiben.
  - Man kann einfach z.B. mit dem Satz von Tellegen (Master Vorlesung Hochfrequenztechnik) zeigen, dass der nur aus passiven Elementen (Induktivitäten) bestehende Übertrager ein reziprokes Bauelement ist, für das immer  $L_{12} = L_{21}$  mit gleichen Vorzeichen gelten muss.
  - Zur Vereinfachung wird wegen der reziproken Eigenschaft oft auch mit der Gegeninduktivität (Mutual Inductance)  $M = L_{12} = L_{21}$  gearbeitet.
- Allgemein gelten für die beiden Tore zweier gekoppelter beliebiger Leiter und damit auch für Übertrager oder Transformatoren die konstituierenden Gleichungen

$$u_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}, \quad (45)$$

$$u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}. \quad (46)$$

Diese Gleichungen können leicht generisch auf eine beliebige Anzahl Tore (d.h. von gekoppelten Leitern) erweitert werden. Z.B. gilt für die Spannung an Tor 1 bei N gekoppelten Leitern

$$u_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} \pm L_{12} \frac{di_2}{dt} \pm L_{13} \frac{di_3}{dt} \dots L_{1N} \frac{di_N}{dt}. \quad (47)$$

### 3.0.8 Memristor

Der Memristor war lange Zeit seit seiner formalen Einführung<sup>4</sup> in 1971 ein theoretisches Artefakt, das sich rein aus der Beobachtung der Symmetrie der Beziehungen zwischen Strom, Spannung, elektrischer Ladung und magnetischem Fluss ergab (vgl. Abb. 17).

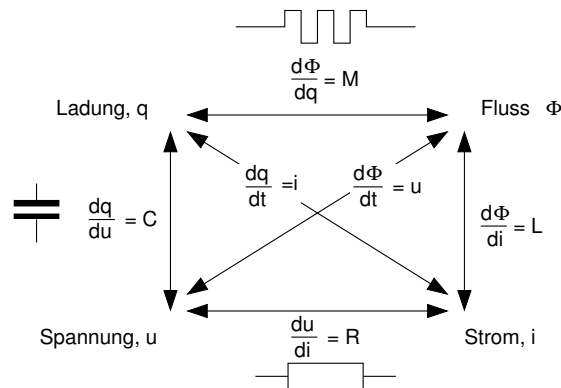


Abb. 17: Darstellung der Beziehungen zwischen Strom  $i$ , Spannung  $u$ , elektrischer Ladung  $q$  und magnetischem Fluss  $\Phi$  und der damit definierten Bauelemente.

Daraus postulierte Chua, dass es neben dem Widerstand (Verknüpfung von  $du/di$ ), der Kapazität (Verknüpfung von  $dq/du$ ) und der Induktivität (Verknüpfung von  $d\Phi/di$ ) auch ein Element geben müsste, das eine  $d\Phi/dq$  Verknüpfung herstellt. Dieses Element nannte er Memristor und die Stärke der Verknüpfung (Wirkungsfunktion) nannte er Memristanz  $M := d\Phi/dq$ . Diese sollte nicht mit der in dieser Veranstaltung häufig verwendeten Gegeninduktivität, die ebenfalls allgemein mit  $M$  bezeichnet wird, verwechselt werden. Spätestens seit 2007/2008 konnten erstmals auch memristive Bauelemente hergestellt werden, die durchaus Potenzial z.B. als energieeffiziente Informationsspeicher haben könnten. Der Memristor wird wegen der (noch?) geringen Bedeutung als grundlegendes Bauelement in dieser Veranstaltung nicht weiter betrachtet.

<sup>4</sup>Leon O. Chua, "Memristor - The missing circuit Element", IEEE Transactions on Circuit theory, no. 5, Sep. 1971

## 4 Einfache lineare elektrische Netzwerke bei statischer und quasistatischer Anregung

Ist die Änderungsrate der anregenden Spannungen und Ströme hinreichend gering, so ergeben sich an kapazitiven und induktiven Elementen im Netzwerk vernachlässigbar kleine Ströme bzw. Spannungen (vgl. Anmerkungen in den Kapiteln zu den konstituierenden Gleichungen). “Vernachlässigbar” bedeutet in diesem Zusammenhang, dass in der KCL Bilanz der Ströme in einen Knoten der Strom der Kapazität so gering ist, dass dessen Vernachlässigung die Werte der restlichen Ströme in einer für die geforderte Genauigkeit akzeptablen Höhe verändert. Entsprechendes gilt für die KVL Bilanz der Spannungen eines Umlaufs mit Induktivitäten. Gelten die Vernachlässigungen für alle Zweige mit Induktivitäten und Kapazitäten, so sprechen wir von einem quasistatischen Betrieb des Netzwerks. Die Kapazitäten können dann als Näherung durch Leerläufe die Induktivitäten durch Kurzschlüsse ersetzt werden. Im statischen Grenzfall, bei Gleichspannungs- bzw. Gleichstromanregung gilt diese Näherung exakt, da alle Spannungen an Induktivitäten und alle Ströme durch Kapazitäten gleich Null sind.

Wir sehen an dieser Überlegung, dass sich im statischen bzw. im quasistatischen Fall das Netzwerk durch den Wegfall von Kapazitäten und Induktivitäten vereinfacht, indem die Anzahl der Bauelemente und damit der Zweige reduziert wird. Die daraus resultierenden Widerstands-Netzwerke sind typisch für Anwendungen bei niedrigen Frequenzen. Ein Beispiel dazu ist das 50-Hz-Energieverteilungsnetz, bei dem in der Regel nur die resistiven (widerstandbehafteten) Spannungsabfälle entlang der Leitungen betrachtet werden. Finden auf diesem Netz aber schnelle Schaltvorgänge oder impulsartige Zustandsänderungen (z.B. Blitzeinschlag) statt, dann gilt die quasistatische Näherung nicht mehr und es müssen die Induktivitäten und Kapazitäten der Leitungen berücksichtigt werden ( $\rightarrow$  Leitungstheorie, Wanderwellen).

Wir wollen zunächst einige einfache Gesetzmäßigkeiten elektrischer Netzwerke ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit anhand von Widerstandsnetzwerken herleiten. Wie wir später sehen werden, lassen sich die erzielten Ergebnisse ohne zusätzlichen Aufwand direkt auch für RLCM Netzwerke anhand von Phasoren oder im Bildbereich der Laplace- oder Fourier-Transformation angeben.

### 4.1 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

Eine häufige auftretende Verknüpfung von Eitor-Elementen ist die Reihen- und die Parallelschaltung, die in Abb. 18 als Ausschnitt aus einem größeren

Netzwerk dargestellt ist. Dabei ergibt sich jeweils wieder ein resultierendes Eintor-Element, das bezüglich der Spannung  $U$  und dem Strom  $I$  an den Knoten  $a, b$  das Verhalten der beiden verknüpften Elemente äquivalent beschreibt. Zur Reduktion der Komplexität wird daher häufig mit dem

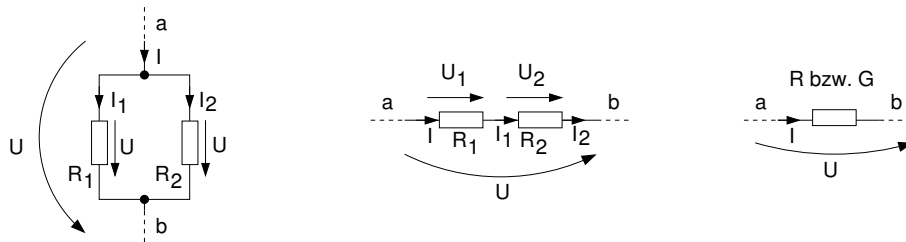


Abb. 18: Links: Parallelschaltung von zwei Widerständen. Mitte: Reihenschaltung von zwei Widerständen. Rechts: bezüglich der Knoten  $a, b$  äquivalenter Ersatzwiderstand.

äquivalenten Ersatzwiderstand gearbeitet, um das Netzwerk zu vereinfachen.

Dieser ergibt sich für die *Parallelschaltung* aus folgender Überlegung. Da beide Elemente jeweils an Knoten  $a$  und  $b$  angeschlossen sind, liegt die Spannung  $U$  von  $a$  nach  $b$  auch an den beiden Elementen an. Über die konstituierende Gleichung des Widerstandes ergibt sich  $I_1 = U/R_1 = UG_1$  und  $I_2 = U/R_2 = UG_2$  und mit KCL der Gesamtstrom  $I = I_1 + I_2 = (G_1 + G_2)U = GU$  mit  $G := G_1 + G_2$  als äquivalenter Leitwert, dessen konstituierende Gleichung den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an den Knoten  $a, b$  äquivalent beschreibt. Der äquivalente Widerstand ist damit

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{G_1 + G_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (48)$$

Der Vergleich mit der äquivalenten Leitwert-Form zeigt, dass bei der Parallelschaltung die Leitwertform vorteilhafter im Sinne einer kürzeren Schreibweise ist.

Bei der *Reihenschaltung* werden beide Elemente vom selben Strom durchflossen und es gilt für die Spannungen an den Elementen  $U_1 = R_1 I$  und  $U_2 = R_2 I$ . Mit KVL folgt für die Gesamtspannung von Knoten  $a$  nach  $b$  der Ausdruck  $U = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2)I = RI$  mit dem äquivalenten Ersatzwiderstand einer Reihenschaltung

$$R := R_1 + R_2. \quad (49)$$

Die vorangegangenen Überlegungen lassen sich leicht auf Reihen und Parallelschaltungen mit mehr als zwei Elementen erweitern, so dass allgemein für  $N$  in Reihe geschaltete Elemente gilt  $R = \sum_{n=1}^N R_n$  und für  $N$  in parallel geschaltete Elemente  $G = \sum_{n=1}^N G_n$ .

*Beispiel:* Abbildung 19 zeigt ein einfaches Bordspannungsnetz, in dem die Verbraucher durch die Widerstände  $R_2, R_3, R_5$  und der endliche Leitwert der Kabel-Verbindungen zu den Verbrauchern (im Idealfall Knoten) durch die Widerstände  $R_1, R_4$  modelliert wird. Zu bestimmen ist die Spannung  $U_x$ , mit der die Verbraucher  $R_2$  und  $R_3$  versorgt werden.

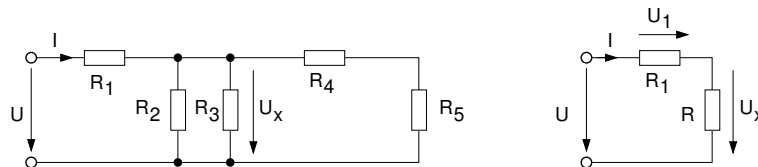


Abb. 19: Links: Modell eines Bordspannungsnetzes mit Batteriespannung  $U$ . Rechts: Äquivalentes Modell hinsichtlich der Spannung  $U_x$ .

Eine Inspektion des Schaltplanes zeigt, dass  $R_4$  und  $R_5$  in Reihe geschaltet sind. Der sich daraus ergebende äquivalente Widerstand liegt wiederum parallel zu  $R_2$  und  $R_3$ . Daraus ergibt sich ein äquivalenter Widerstand  $R = \frac{1}{1/(R_4+R_5)+1/R_2+1/R_3}$  über dem die Spannung  $U_x$  abfällt. Dies kann in Form eines vereinfachten äquivalenten Ersatzschaltbildes in Abb. 19 rechts dargestellt werden. Mit  $U_x$  an  $R$  ergibt sich direkt aus der konstituierenden Gleichung eines Widerstandes  $I = U_x/R$  und damit der Spannungsabfall  $U_1 = R_1 I$ . Mit Hilfe von KLV ergibt sich damit dann die gesuchte Spannung  $U_x = U - U_1$ .

## 4.2 Spannungs- und Stromteiler

Jeder Strom, der in einen Knoten einströmt, wird entsprechend KCL auf die anderen an den Knoten angeschlossenen Zweige aufgeteilt. Entsprechend wird jede Spannung, die in einen geschlossenen Umlauf von Zweigen eingespeist wird gemäß KVL auf Spannungen über die beteiligten Zweige aufgeteilt. Dieses einfache und fundamentale Prinzip haben wir bereits unbewusst bei der Behandlung der Reihen- und Parallelschaltung in Abb. 18 verwendet. Die dort dargestellte Parallelschaltung teilt den Gesamtstrom  $I$  in die beiden Teilströme  $I_1$  und  $I_2$  auf. Für  $I_1$  können wir mit den bereits bekannten

Zusammenhängen  $U = R_1 I_1 = R_2 I_2 = RI$  und  $R = \frac{1}{G_1 + G_2}$  direkt schreiben

$$I_1 = \frac{R}{R_1} I = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I. \quad (50)$$

Diese Stromteiler-Regel sagt, dass sich der Teilstrom in einem Zweig proportional zum Verhältnis des Leitwertes dieses Zweiges zum Gesamtleitwert  $G_1 + G_2$  der Parallelschaltung ergibt. Das Ergebnis lässt sich direkt auf eine beliebige Anzahl parallel geschalteter Zweige anwenden, wobei sich der Gesamtleitwert aus der Summe aller parallel geschalteten Leitwerte ergibt.

Für den Spannungsteiler ergeben sich dem Strom am Stromteiler entsprechende Überlegungen für die Spannung. Hier gilt mit Abb. 18 Mitte,  $I = G_1 U_1 = G_2 U_2 = GU$  und  $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2}$  uns somit

$$U_1 = \frac{G}{G_1} U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U. \quad (51)$$

Es ergibt sich eine entsprechende Interpretation, wie bei der Stromteiler-Regel, wonach die Teilspannung  $U_1$  über einen Widerstand  $R_1$  proportional zum Verhältnis dessen Widerstandswertes zum Gesamtwiderstand  $R_1 + R_2$  der Reihenschaltung ist. Eine Erweiterung durch entsprechende Anpassung des Gesamtwiderstandes für eine beliebige Anzahl in Reihe geschalteter Widerstände ist, wie im Fall des Stromteilers, einfach durchführbar.

### 4.3 Stern-Dreieck Äquivalenz

Die Anordnung von Bauelementen in einer Stern- oder Dreieck-Konfiguration nach Abb. 20 gehört zu den grundlegenden irreduziblen (kanonischen) Netzwerkstrukturen. Diese, an den Knoten 1, 2, 3 an das umgebende Netzwerk angeschlossenen Dreipole, erlauben je nach umgebendem Netzwerk keine direkte Umformungen in Reihen- oder Parallelschaltung. Liegt ein solcher Fall vor, ist der Einsatz des hinsichtlich der Knoten 1, 2, 3 äquivalenten Dreipols in der jeweils anderen Konfiguration zielführend. Es ergeben sich dadurch wieder Reihen- und Parallelschaltungen mit den umgebenden Bauelementen, die entsprechend einfach berechnet werden können. Im Folgenden leiten wir die Beziehungen für die Äquivalenz zwischen beiden Darstellungen des Dreipols her.

Aufgrund KCL und KVL ist einer der drei Ströme  $I_1, I_2, I_3$  und eine der drei Spannungen  $U_{12}, U_{13}, U_{23}$  von den jeweils beiden anderen abhängig. Wir ersetzen daher willkürlich  $I_3 = -I_1 - I_2$  und  $U_{23} = U_{13} - U_{12}$  als abhängigen Strom bzw. Spannung und erhalten für die Stern-Schaltung in Abb. 20 die



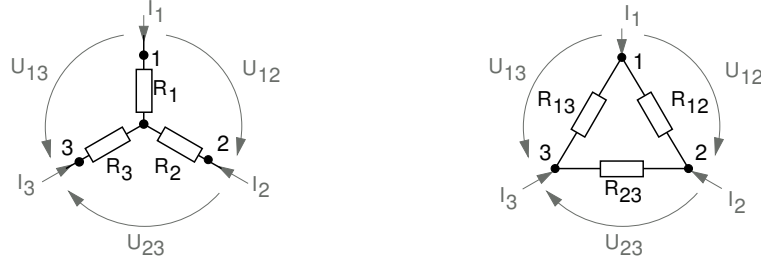


Abb. 20: Äquivalente Darstellung eines Dreipols (Knoten 1, 2, 3) durch Stern- (links) und Dreieck-Schaltung (rechts) .

Gleichungen

$$\begin{aligned} U_{12} &= R_1 I_1 - R_2 I_2, \\ U_{13} &= R_1 I_1 + R_3 (I_1 + I_2) \end{aligned} \quad (52)$$

oder in Matrix-Form

$$\begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & -R_2 \\ R_1 + R_3 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (53)$$

und für die Dreieck-Schaltung

$$\begin{aligned} I_1 &= U_{12} G_{12} + U_{13} G_{13}, \\ I_2 &= -U_{12} G_{12} + (U_{13} - U_{12}) G_{23} \end{aligned} \quad (54)$$

und in Matrix Form

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{12} & G_{13} \\ -G_{12} - G_{23} & G_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{13} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Damit die Stern- und Dreieck-Schaltungen äquivalent sind, müssen Ströme und Spannungen beim Austausch einer Schaltung durch die Andere unverändert bleiben. D.h. die beiden 2x2 Matrizen müssen Spannungsvektor  $(U_{12}, U_{13})^T$  und Stromvektor  $(I_1, I_2)^T$  in beiden Varianten identisch aufeinander abbilden. Das bedeutet, dass bei Einsetzen des Stromvektors aus Gl. 55 in Gl. 53 das Produkt der Matrizen die Einheitsmatrix ergeben muss

$$\begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & -R_2 \\ R_1 + R_3 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{12} & G_{13} \\ -G_{12} - G_{23} & G_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{13} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
R_1 G_{12} + R_2 (G_{12} + G_{23}) &= 1, \\
R_1 G_{13} - R_2 G_{23} &= 0, \\
R_1 G_{12} - R_3 G_{23} &= 0, \\
(R_1 + R_3) G_{13} + R_3 G_{23} &= 1.
\end{aligned} \tag{57}$$

Durch Einsetzen und Umformen ergibt sich nach kurzer Rechnung z.B.

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \tag{58}$$

und

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}. \tag{59}$$

Aufgrund der Symmetrie der Schaltungen ergeben sich die Äquivalenz-Beziehungen der anderen Bauelemente durch entsprechendes Vertauschen der Indizes. Die Regel zur Vertauschung ist einfach zu erkennen, wenn man sich die geometrische Anordnung der Elemente in den Gleichungen verdeutlicht. Demnach stehen in den Nennern die Summen der drei Widerstände des Dreiecks bzw. der drei Leitwerte des Sterns. Im Zähler steht jeweils das Produkt der am Knoten des zu berechnenden Elements in der anderen Konfiguration angeschlossenen Elemente der selben Form (Leitwert bzw. Widerstand) wie der jeweilige Nenner (z.B. liegen am Knoten 1 von  $R_1$  im Stern die beiden Widerstände  $R_{13}$  und  $R_{12}$ ).

*Beispiel: Brückenschaltung.* Die nachfolgend links abgebildete Brückenschaltung lässt sich durch Dreieck-Stern Umformung in die rechts dargestellte äquivalente Schaltung überführen. Die dadurch geänderte Topologie besteht nunmehr aus einfachen Reihen- und Parallelschaltungen. Damit kann zunächst die Spannung  $U_s$  über der Reihenschaltung aus  $R_{35} + R_4$  bzw.  $R_{15} + R_2$  (identisch, da an dem selben Knoten) berechnet werden. Sie ergibt sich, indem für die beiden parallel geschalteten Zweige  $(R_{35} + R_4) || (R_{15} + R_2) = R_x$  ein hinsichtlich der Knoten  $S$  und  $0$  äquivalenter Ersatzwiderstand  $R_x$  bestimmt wird. Da  $R_x$  in Reihe zu  $R_{13}$  liegt, kann die Spannungsteiler-Formel angewendet werden und liefert  $U_s = U \frac{R_{13}}{R_{13} + R_x}$ . Da  $U_s$  wiederum an den beiden Reihenschaltungen  $R_{35} + R_4$  und  $R_{15} + R_2$  anliegt, können  $U_2 = U_s \frac{R_2}{R_{15} + R_2}$  und  $U_4 = U_s \frac{R_4}{R_{35} + R_4}$  mit der Spannungsteiler-Formel berechnet werden. Die gesuchte Spannung  $U_5 = U_2 - U_4$  ergibt sich dann über KVL aus diesen beiden Spannungen.

#### 4.4 Ersatz-Spannungs und -Stromquelle

Mit Hilfe des im weiteren Verlauf hergeleiteten Überlagerungssatz lässt sich folgender Satz zeigen:

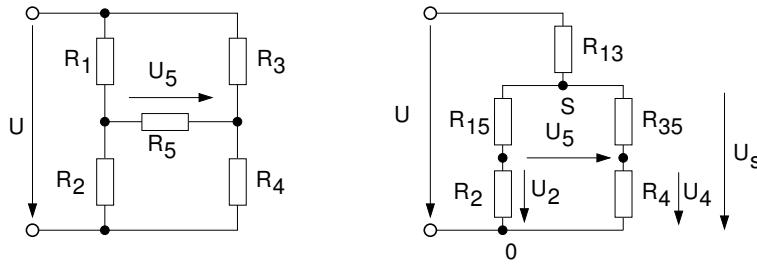


Abb. 21: Brückenschaltung (links) und eine äquivalente Umformung (rechts) .

*jedes lineare elektrische Netzwerk kann bezüglich eines beliebig wählbaren Tores des Netzwerks äquivalent in Form einer realen Spannungs- oder Stromquelle dargestellt werden.*

Die Möglichkeit der Wahl zwischen äquivalenter realer Spannungs- und Stromquelle wurde bereits in dem entsprechenden Kapitel zu realen Spannungs- und Stromquellen (vgl. z.B. Abb. 13) gezeigt. Somit bleibt zu zeigen, dass, wie in Abb. 22 dargestellt, unabhängig von der Komplexität des Netzwerks dieses immer durch eine derart einfache Ersatzschaltung aus einer Quelle und einem Widerstand beschrieben werden kann.

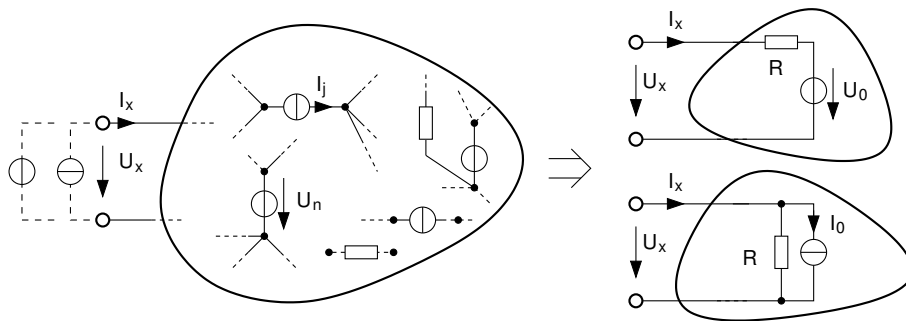


Abb. 22: Links: beliebiges lineares Netzwerk aus Widerständen und Quellen mit einem Tor an dem durch Beschaltung z.B. mit einer Spannungs- oder Stromquelle eine Spannung  $U_x$  und ein Strom  $I_x$  liegen. Rechts: hinsichtlich des Tores mit  $U_x, I_x$  äquivalente Ersatzschaltungen (Ersatzspannungs- und -stromquelle).

Um dies nachzuweisen verwenden wir die Methode des Überlagerungssatzes, nach der sich die Spannung  $U_x$  an dem betrachteten Tor allgemein in der folgenden Form darstellen lässt (Beweis folgt im entsprechenden Kapitel)

$$U_x = RI_x + \sum_{n=1}^N F_n U_n + \sum_{j=1}^J R_n I_n. \quad (60)$$

Darin sind  $U_n, I_n$  ideale Spannungs- und Stromquellen (Ursachen) im Netzwerk und  $F_n, R_n$  deren konstante (d.h. unabhängig von Strom und

Spannung) Wirkungsfunktionen, die deren jeweiligen Beitrag zur Wirkung  $U_x$  quantifizieren. Eine entsprechende Gleichung könnte auch für den Strom  $I_x$  formuliert werden, führt aber ohne weiteren Erkenntnisgewinn zu einer entsprechenden Ersatzstromquelle, die auch direkt durch äquivalente Umformung der im Folgenden ermittelten Ersatzspannungsquelle gewonnen werden kann. Somit genügt es unsere Betrachtungen im Folgenden anhand der Formulierung von  $U_x$  durchzuführen.

#### *Bestimmung des Innenwiderstandes der Ersatzquelle*

Nach Definition beschreibt der Innenwiderstand einer Quelle die Änderung der Spannung an den Anschlüssen (Tor) der Quelle aufgrund eines im Quellzweig fließenden Stromes. Bei einem linearen Netzwerk ist dieser Widerstand unabhängig von den Werten der Quellen im Netzwerk und kann daher besonders einfach für den Fall der *Quellgrößen gleich Null* bestimmt werden. Im allgemeinen Fall existieren in einem Netzwerk mehrere Spannungs- und Stromquellen. Setzen wir diese alle zugleich zu Null<sup>5</sup> und speisen von außen eine Spannung  $U_x$  oder einen Strom  $I_x$  ein, so beschreibt definitionsgemäß der Quotient  $\frac{U_x}{I_x}$  der linearen  $U_x/I_x$  Kennlinie den Innenwiderstand des Netzwerks. Übertragen auf Gl. 60 bedeutet diese Definition, dass alle  $U_n = 0, I_n = 0$ . Der sich damit direkt aus Gl. 60 ergebende Quotient  $U_x/I_x = R$  ist damit Innenwiderstand der Ersatzquelle.

Die vorangegangene Überlegung zeigt direkt eine *Methode zur Bestimmung des Innenwiderstandes*: in einem ersten Schritt werden alle Quellgrößen zu Null gesetzt, d.h. im Netzwerk werden alle Spannungsquellen durch Kurzschlüsse, alle Stromquellen durch Leerläufe ersetzt. Im zweiten Schritt wird der Eingangswiderstand  $R = \frac{U_x}{I_x}$  dieses Netzwerks bezüglich des gewählten Tores bestimmt.

#### *Bestimmung der Quellspannung der Ersatzquelle*

Wir betrachten Gl. 60 hinsichtlich der Frage, wie darin die Quellspannung einer Ersatzquelle enthalten ist. Da der erste Term  $RI_x$  den Beitrag des Innenwiderstandes repräsentiert, muss die Quellspannung durch die beiden Summenterme bewirkt werden. Dies ist unmittelbar nachzuvollziehen, wenn man sich die Bedeutung der darin enthaltenen Größen verdeutlicht. Da

---

<sup>5</sup>Achtung: Wird die Spannung bzw. der Strom einer (idealen) Spannungs- bzw. Stromquelle zu Null gesetzt, so repräsentiert die Quelle aufgrund ihres Innenwiderstandes von Null bzw. Unendlich einen Kurzschluss bzw. Leerlauf zwischen den Anschluss-Knoten der Quelle.

$U_n, I_n$  ideale Spannungs- und Stromquellen sind, deren Werte sich nicht durch Stromflüsse im Netzwerk ändern und  $F_x, R_n$  konstante Wirkungsfunktionen sind, repräsentieren die beiden Summenterme eine konstante Größe, genauer, eine konstante Spannung. Dies ist die Quellspannung der Ersatzquelle.

Deren Wert kann nach Gl. 60 bestimmt werden, indem das betrachtete Tor des Netzwerks extern nicht beschaltet wird (Leerlauf, Strom  $I_x = 0$ ). Dann repräsentiert  $U_x = \sum_{n=1}^N F_n U_n + \sum_{j=1}^J R_n I_n$  die Quellspannung der Ersatzspannungsquelle in Form einer Summe von Einzelbeiträgen der Spannungs- und Stromquellen des Netzwerks. Die Quellspannung kann damit nach einer einfachen Berechnungsvorschrift ermittelt werden, indem, beginnend mit  $n_1$ , alle Spannungs- und Stromquellen außer  $U_n = U_1$  zu Null gesetzt werden. Die sich in diesem Fall am Tor ergebende Teilspannung  $U_x|_{n=1}$  wird zu der Spannung  $U_x|_{n=2}$  summiert, wenn  $n = 2$  gesetzt wird, wobei alle Spannungs- und Stromquellen außer  $U_n = U_2$  zu Null gesetzt werden. So verfährt man bis  $n = N$ . Zu dieser Summe wird die Summe aller Beiträge des zweiten Summenterms über alle Stromquellen von  $j = 1 \dots J$  addiert, woraus sich schlussendlich die gesuchte Quellspannung der Ersatzquelle ergibt. Dieses hier angewandte Vorgehen ist die Methode des *Überlagerungssatzes*, deren Rechtfertigung im weiteren Verlauf noch hergeleitet wird.

*Beispiel:* Abbildung 23 zeigt die sich bei Ermittlung von Ersatzspannungsquelle und Innenwiderstand ergebenden Teilschaltungen eines beispielhaft gewählten Netzwerks. Als Besonderheit trägt darin die Spannungsquelle  $U_2$  nicht zur Torspannung  $U_x$  bei, da diese Quelle in Reihe zu einer idealen Stromquelle liegt, die den Zweigstrom vorgibt und deren Spannung unbestimmt ist. In der schematischen Anwendung des Überlagerungssatzes zeigt sich die nicht vorhandene Wirkung von  $U_2$  dadurch, dass bei der Ermittlung der entsprechenden Wirkung  $U_x|_{n=2}$  auf  $U_x$  in Teilabbildung (d) aufgrund des durch die Stromquelle geöffneten Zweiges von  $U_2$  kein Beitrag, d.h.  $U_x|_{n=2} = 0$ , ergibt. Des Weiteren ergeben sich für  $U_x|_{n=1} = U_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3}$  sowie  $U_x|_{j=1} = -I_1 R_1 \parallel R_3$  und  $U_x|_{j=2} = -I_2 R_1 \parallel R_3$  wodurch sich die Quellspannung der Ersatzquelle ergibt zu

$$U_0 = U_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3} - I_1 \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} - I_2 \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} (U_1 - R_1 (I_1 + I_2)). \quad (61)$$

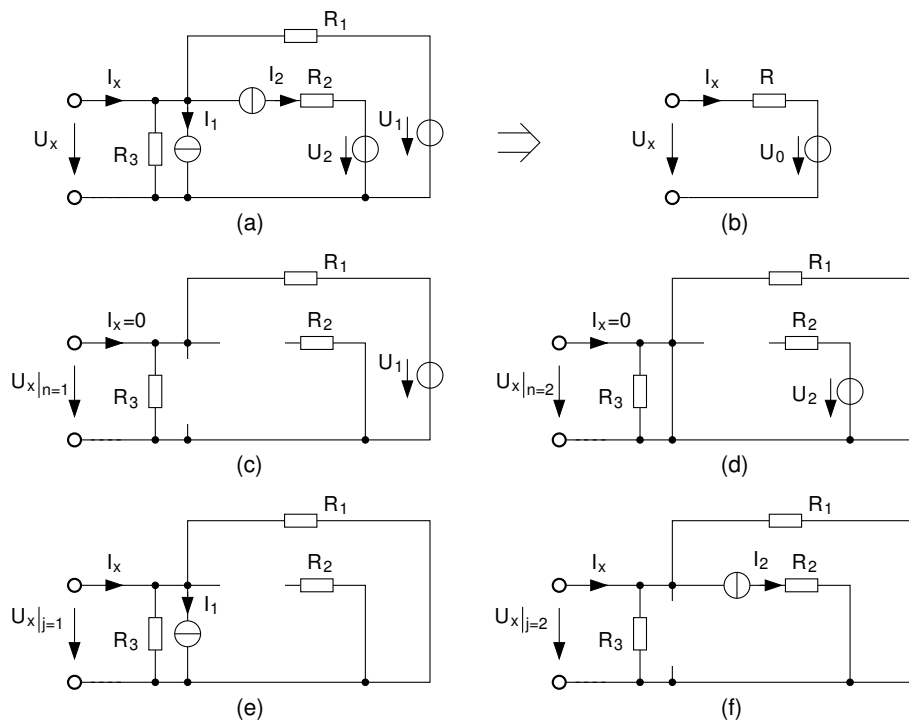


Abb. 23: (a) Original-Netzwerk, (b) äquivalente Ersatzspannungsquelle. Abbildungen (c)-(d) zeigen die sich bei der Berechnung der Summenelemente ergebenden Schaltungen, wenn jeweils alle Quellgrößen außer diejenige, deren Laufindex jeweils betrachtet wird, zu Null gesetzt werden. Entsprechend ergibt sich der Innenwiderstand  $R = R_1 \parallel R_3$  wenn alle Quellgrößen zu Null gesetzt werden.

## 5 Lineare Netzwerke mit stationärer zeitharmonischer Anregung

Wir definieren eine stationäre monofrequente bzw. zeitharmonische Anregung als Ausdrücke der Form

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u), \quad i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i). \quad (62)$$

Darin sind  $U, I$  die Amplituden der Anregung,  $\varphi_u, \varphi_i$  die jeweiligen Phasen und  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz<sup>6</sup> der Anregung mit der Frequenz  $f$  und der Periodendauer  $T = 1/f$ . Der Zusatz *stationär* bedeutet, dass das Netzwerk seit hinreichend langer Zeit in dieser Form angeregt wurde, so dass sich alle Vorgänge im Netzwerk in identischer Form periodisch mit der Frequenz  $f$  wiederholen. Der sogenannte *Einschwingvorgang*, bei dem sich Ströme und Spannungen im Netzwerk von einem Zustand *vor* Anlegen der Anregung in diesen sich gleichförmig wiederholenden Zustand begeben ist auf Null abgeklungen, d.h. er ist nicht mehr in den Strömen und Spannungen enthalten.

Derart idealisierte Anregungen existieren in der Realität in der Regel nicht. Jedoch lässt sich zeigen, dass jede physikalisch realisierbare Anregung als Überlagerung (d.h. als Summe) derartiger Anregungen aus verschiedenen diskreten Frequenzen (Fourier-Reihe) oder einem kontinuierlichen Frequenzband (Fourier-Integral), mit frequenzabhängigen Amplituden und Phasen dargestellt werden kann. Die Gesamtheit aller Summenterme über der Frequenz wird als *Spektrum* bezeichnet. Die Anwendbarkeit des Überlagerungssatzes in linearen Netzwerken erlaubt uns in diesem Fall das Netzwerk für jeden dieser Summenterme getrennt zu analysieren und das Ergebnis als Summe der Teilergebnisse darzustellen. Somit kann die Betrachtung eines Netzwerks bei monofrequenter Anregung in Form von Gl. 62 als die Berechnung des Netzwerks für eine beliebige Frequenz des Spektrums der Superposition betrachtet werden. Dabei meint der Begriff *beliebig*, dass die Variablen  $U, I, \varphi_u, \varphi_i$ , in Gl. 62 im allgemeinen Fall Funktionen in  $\omega$  darstellen und somit für alle Frequenzen des Spektrums eines Signals gelten.

Ist ein elektrisches Netzwerk linear, besitzen sämtliche darin betrachteten Elemente konstituierende Gleichungen mit einem linearen Strom-Spannungs-Zusammenhang. In diesem Fall werden bei einer monofrequenten harmonischen Anregung durch Spannungen oder Ströme mit einer Frequenz  $\omega$  sämtliche Spannungen und Ströme des Netzwerks diese Frequenz besitzen und sich

---

<sup>6</sup>Sofern es nicht zu Konfusion führt, wird im Folgenden zur Vereinfachung der Lesbarkeit die Bezeichnung *Frequenz* sowohl für die Kreisfrequenz  $\omega$  als auch für die Frequenz  $f$  verwendet.

untereinander nur in Amplitude und Phase unterscheiden. Dies ist unmittelbar einzusehen, wenn wir uns die konstituierenden Gleichungen linearer RLC Netzwerke betrachten. Für die Spannungs-Strom Zusammenhänge an den jeweiligen Bauelementen gilt

$$\begin{aligned} u(t) &= R i(t) && \text{für Zweig mit Widerstand,} \\ u(t) &= L \frac{di(t)}{dt} && \text{für Zweig mit Induktivität,} \\ i(t) &= C \frac{du(t)}{dt} && \text{für Zweig mit Kapazität.} \end{aligned} \quad (63)$$

Setzen wir hier in die rechte Seite Spannungen und Ströme nach Gl. 62 ein, werden auch die Spannungen und Ströme der linken Seite einen zeitharmonischen Verlauf dieser Gestalt aufweisen, der sich von der rechten Seite nur in Amplitude und Phase unterscheidet<sup>7</sup>. Die Angabe, dass es sich um einen zeitharmonischen (hier Cosinus) Verlauf *der Frequenz*  $\omega$  handelt ist redundant, da er durch die gewählte Anregung vorgegeben wurde (d.h. bekannt ist) und wie anhand von Gl. 63 gezeigt, in allen Ausdrücken in der Form  $\cos(\omega t + \varphi)$  enthalten ist. Von dieser Redundanz sowie von lästigen trigonometrischen Umformungen mit Cosinus-Termen können wir uns durch die Einführung von *Phasoren* (auch *komplexe Wechsel- oder Drehstromzeiger* genannt) befreien, wodurch sehr effiziente (übersichtlich, einfach, aussagekräftig) Berechnungsmethoden möglich werden.

Die grundlegende Idee besteht darin, den zeitharmonischen Cosinus-Verlauf durch den Realteil einer komplexen Zahl darzustellen. Dazu bedient man sich der Eulerschen Gleichung zur Darstellung einer komplexen Zahl

$$\underline{z} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r e^{j\varphi}, \quad r, \varphi \in \mathbb{R}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (64)$$

woraus sich durch Realteil-Bildung

$$r \cos\varphi = \Re\{r e^{j\varphi}\} \quad (65)$$

ergibt. Die Winkel sind dabei im Bogenmaß (rad) anzugeben. Identifizieren wir darin  $r = U$  und  $\varphi = \omega t + \varphi_u$  aus Gl. 62 ergibt sich

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u) = \Re\{U e^{j(\omega t + \varphi_u)}\}, \quad (66)$$

$$= \Re\{U e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}\}, \quad (67)$$

$$= \Re\{\underline{U} e^{j\omega t}\}, \quad (68)$$

---

<sup>7</sup>Dies ist für den Widerstand direkt abzulesen und ergibt sich für L und C durch Ableiten nach der Zeit und Ersetzen der aus der Cosinus- hervorgehenden Sinus-Funktion durch eine entsprechend in der Phase verschobene Cosinus-Funktion.



mit dem komplexwertigen *Phasor*  $\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$ , der die Amplitude und Phase der Spannung enthält. Entsprechend kann der zeitharmonische Strom dargestellt werden durch

$$i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i) = \Re\{\underline{I} e^{j\omega t}\} \quad (69)$$

mit dem komplexwertigen *Phasor*  $\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$ , der die Amplitude und Phase des Stroms enthält.

Verwenden wir in den konstituierenden Gleichungen der Bauelemente zeitharmonische Spannungen und Ströme in der zuvor gezeigten äquivalenten Euler-Schreibweise, so ergibt sich für einen Widerstand  $R \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u(t) &= R i(t), \\ U \cos(\omega t + \varphi_u) &= R I \cos(\omega t + \varphi_i), \\ \Re\{\underline{U} e^{j\omega t}\} &= R \Re\{\underline{I} e^{j\omega t}\}, \\ \Re\{\underline{U} e^{j\omega t}\} &= \Re\{R \underline{I} e^{j\omega t}\}, \\ \Re\{(\underline{U} - R \underline{I}) e^{j\omega t}\} &= 0 \quad \forall t, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\underline{U} = R \underline{I}. \quad (71)$$

Darin konnte, weil Gl. 70 für alle Zeiten  $t$  erfüllt sein muss, im Schritt auf Gl. 71 die redundante Zeitabhängigkeit  $e^{j\omega t}$  aus der konstituierenden Gleichung eliminiert werden. Die Phasoren-Darstellung der konstituierenden Gleichung 71 erinnert in dieser Form stark an die einfache Darstellung  $U = R I$  bei Gleichspannungsnetzen, wobei als wesentlicher Unterschied hier grundsätzlich  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  komplexwertig sind. Das Verhältnis zwischen Strom und Spannung  $\underline{U}/\underline{I} = R$  ist jedoch stets reellwertig.

Mit der gleichen Vorgehensweise erhalten wir für den Zusammenhang von Spannung und Strom in Phasor-Schreibweise an einer Kapazität  $C \in \mathbb{R}$  über deren konstituierende Gleichung

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{d}{dt} u(t), \\ I \cos(\omega t + \varphi_i) &= C \frac{d}{dt} U \cos(\omega t + \varphi_u), \\ \Re\{\underline{I} e^{j\omega t}\} &= C \frac{d}{dt} \Re\{\underline{U} e^{j\omega t}\}, \\ &= \Re\{\underline{U} C \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\}, \\ &= \Re\{\underline{U} j\omega C e^{j\omega t}\}, \\ \Re\{(\underline{I} - j\omega C \underline{U}) e^{j\omega t}\} &= 0 \quad \forall t, \end{aligned} \quad (72)$$

$$\underline{I} = j\omega C \underline{U}, \quad (73)$$

wobei das Verhältnis  $\underline{I}/\underline{U} = j\omega C$  rein imaginär ist. Für eine Induktivität  $L \in \mathbb{R}$  ergibt sich entsprechend die konstituierende Gleichung in Phasor-Schreibweise

$$\begin{aligned}
 u(t) &= L \frac{d}{dt} i(t), \\
 U \cos(\omega t + \varphi_u) &= L \frac{d}{dt} I \cos(\omega t + \varphi_i), \\
 \Re\{\underline{U} e^{j\omega t}\} &= L \frac{d}{dt} \Re\{\underline{I} e^{j\omega t}\}, \\
 &= \Re\{\underline{I} L \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\}, \\
 &= \Re\{\underline{I} j\omega L e^{j\omega t}\}, \\
 \Re\{(\underline{U} - j\omega L \underline{I}) e^{j\omega t}\} &= 0 \quad \forall t, & (74) \\
 \underline{U} &= j\omega L \underline{I}, & (75)
 \end{aligned}$$

worin das Verhältnis  $\underline{U}/\underline{I} = j\omega L$  wie bei der Kapazität rein imaginär ist.

Auch gekoppelte die konstituierende Gleichungen gekoppelter Induktivitäten lassen sich in dieser Weise in Phasor-Schreibweise überführen. Für zwei gekoppelte Induktivitäten nach Gl. 46 ergibt sich entsprechend

$$\underline{U}_1 = j\omega L_{11} \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2, \quad (76)$$

$$\underline{U}_2 = \pm j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_{22} \underline{I}_2. \quad (77)$$

Auch hier sind die Beziehungen zwischen Strömen und Spannungen rein imaginär.

Wir wissen, dass ein elektrisches Netzwerk vollständig beschrieben ist durch die Kirchhoffschen Gleichungen KVL, KCL und die konstituierenden Gleichungen der (Bau)Elemente in den Zweigen des Netzwerks. Daher fehlt an dieser Stelle nur noch die Phasor-Darstellung der Kirchhoffschen Gleichungen, um Netzwerke vollständig mit Phasoren berechnen zu können.

Bei zeitharmonischer Anregung des Netzwerks ergibt sich für die Umlauf-

Spannungen in KVL nach Gl. 7

$$\sum_{n=1}^N u_n(t) = 0, \quad \forall t \quad (78)$$

$$\sum_{n=1}^N \Re\{\underline{U}_n e^{j\omega}\} = 0 \quad \text{mit } \underline{U}_n = U_n e^{j\varphi_{u_n}}, \quad \forall t \quad (79)$$

$$\Re\left\{\sum_{n=1}^N \underline{U}_n e^{j\omega}\right\} = 0, \quad \forall t \quad (80)$$

$$\Re\left\{e^{j\omega} \sum_{n=1}^N \underline{U}_n\right\} = 0, \quad \forall t \quad (81)$$

$$\sum_{n=1}^N \underline{U}_n = 0. \quad (82)$$

und entsprechend für die Knoten-Ströme in KCL nach Gl. 8

$$\sum_{n=1}^N i_n(t) = 0, \quad \forall t \quad (83)$$

$$\sum_{n=1}^N \Re\{\underline{I}_n e^{j\omega}\} = 0 \quad \text{mit } \underline{I}_n = I_n e^{j\varphi_{i_n}}, \quad \forall t \quad (84)$$

$$\Re\left\{\sum_{n=1}^N \underline{I}_n e^{j\omega}\right\} = 0, \quad \forall t \quad (85)$$

$$\Re\left\{e^{j\omega} \sum_{n=1}^N \underline{I}_n\right\} = 0, \quad \forall t \quad (86)$$

$$\sum_{n=1}^N \underline{I}_n = 0. \quad (87)$$

Damit sind sowohl die konstituierenden RLCM Gleichungen als auch KCL und KVL in Phasor-Schreibweise formuliert und die Netzwerkberechnung kann entsprechend dem Vorgehen bei Gleichstrom-Netzwerken erfolgen.

*Insbesondere können alle zuvor ermittelten Ergebnisse für Gleichstromnetzwerke direkt übernommen werden indem für die Gleichspannungen und -ströme und die konstituierenden Gleichungen jeweils Phasoren eingesetzt werden. Die weitere Rechnung erfolgt dann mit komplexen anstatt mit reellen Größen.*

Wir fassen abschließend zur Übersichtlichkeit die Ergebnisse in Phasor-Schreibweise zusammen

$$\begin{array}{ll}
 \text{KVL} & \sum_{n=1}^N \underline{U}_n = 0, \\
 \text{KCL} & \sum_{n=1}^N \underline{I}_n = 0, \\
 \text{Widerstand} & \underline{U} = R \underline{I}, \\
 \text{Kapazität} & \underline{I} = j\omega C \underline{U}, \\
 \text{Induktivität} & \underline{U} = j\omega L \underline{I}, \\
 \text{Gekoppelte Induk-} & \left( \begin{array}{c} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} j\omega L_{11} & \pm j\omega M \\ \pm j\omega M & j\omega L_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{array} \right). \\
 \text{tivitäten} &
 \end{array} \tag{88}$$

## 6 Impedanz und das Konzept der Wirkungsfunktion

Gegenüber den zuvor behandelten Widerstandsnetzwerken treten bei der Beschreibung von RLCM-Netzwerken in Phasor-Schreibweise grundsätzlich komplexwertige Beziehungen zwischen Spannung und Strom auf. Während bei reinen LCM Netzwerken sich rein imaginäre Strom-/Spannungsverhältnisse ergeben, führt die Hinzunahme von Widerständen zu komplexwertigen Strom-/Spannungsverhältnissen mit Real- und Imaginärteil. Dies ist leicht einzusehen, wenn wir als Beispiel nochmals die Reihen- und Parallel-Schaltung aus Abb. 18 betrachten, wobei in Abb. 24 einer der Widerstände durch eine Induktivität ausgetauscht wurde. Für die Parallel-

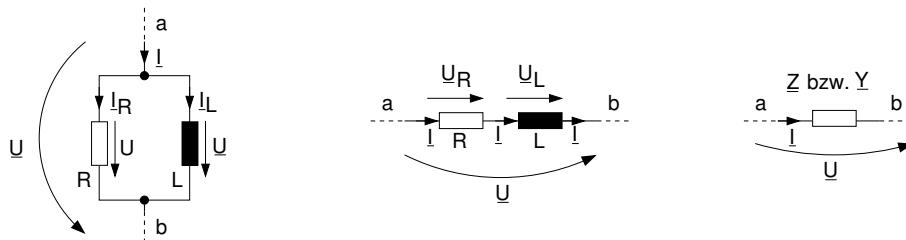


Abb. 24: Links und Mitte: Parallel- und Reihenschaltung von einem Widerstand und einer Induktivität. Rechts: bezüglich der Knoten  $a, b$  äquivalente Ersatz-Impedanz.

Schaltung ergibt sich mit den gleichen Überlegungen wie im Fall zweier Widerstände mit den jeweiligen konstituierenden Gleichungen  $\underline{I}_R = \underline{U}/R$  und  $\underline{I}_L = \underline{U}/(j\omega L)$  und mit KCL der Gesamtstrom  $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L = \underline{U}(1/R + 1/(j\omega L)) = \underline{U} \frac{j\omega L + R}{j\omega L R}$ . Das selbe Ergebnis hätten wir erhalten, wenn wir direkt im Ergebnis der Parallelschaltung nach Gl. 48 die Substitution

$R_1 \rightarrow R$  und  $R_2 \rightarrow j\omega L$  vorgenommen hätten. Für die Reihenschaltung erhalten wir entsprechend die konstituierende Gleichung der Gesamtschaltung  $\underline{U} = (R + j\omega L)\underline{I}$ .

Wie zuvor mit reinen Widerständen können wir auch in in diesem Fall mit gemischten R und L Bauelementen eine Ersatzgröße angeben, welche den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an der Gesamtschaltung angibt. Da wir im Allgemeinen beliebige Netzwerke aus RLCM Elementen behandeln wollen, führen wir den Begriff der *Impedanz*  $\underline{Z}$  ein, der uns allgemein den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Strom-Phasoren *an einem Tor* eines Netzwerks beschreibt

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = R + jX \quad \text{mit } R = \Re\{\underline{Z}\} \quad \text{und } X = \Im\{\underline{Z}\}. \quad (89)$$

Liegt an dem Tor ein reiner Widerstand, so ist  $\underline{Z} = R$ . Entsprechend bezeichnen wir den *Realteil von  $\underline{Z}$  als (Wirk)Widerstand oder Resistanz*. Ist dagegen ein reines L oder ein C angeschlossen, so ist der Realteil gleich Null und es gilt  $\underline{Z} = jX = j\omega L$  mit  $X = \omega L$  bzw.  $\underline{Z} = jX = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$  mit  $X = \frac{1}{\omega C}$ . Wir bezeichnen allgemein den *Imaginärteil  $X$  von  $\underline{Z}$  als Reaktanz* (oder auch als *Blindwiderstand*).

Manchmal ist es aus rein mathematischer Sicht vorteilhaft mit dem Kehrwerten dieser Größen zu arbeiten um kleinere Ausdrücke mit einer geringeren Anzahl von Brüchen zu erhalten. Der Kehrwert der Impedanz wird mit der *Admittanz*  $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}}$  über das Strom zu Spannungsverhältnis an einem Tor definiert. Der Realteil  $\Re\{\underline{Y}\} = G$  wird als *(Wirk)Leitwert oder Konduktanz*, entsprechend dem Kehrwert des Widerstandes bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass außer im Falle reellwertiger Admittanzen bzw. Impedanzen (d.h. reiner Widerstandsnetzwerke) immer  $G \neq \frac{1}{R}$  gilt

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \quad \text{mit } \Re\{\underline{Y}\} = G = \frac{R}{R^2 + X^2}. \quad (90)$$

Der *Imaginärteil von  $\underline{Y}$  wird als Suszeptanz* (teilweise auch als *Blindleitwert*) bezeichnet. Neben der rein mathematischen Verwendung als Kehrwert der Impedanz dient der Begriff der Admittanz auch zur Definition von Wirkungskfunktionen, die den Strom in ein Tor in das Verhältnis zu der an das Tor angelegten Spannung (Ursache) setzen.

An dieser Stelle ist es angebracht den Begriff der Impedanz, den wir als Verhältnis von Spannung zu Strom an einem Tor eines Netzwerks eingeführt haben, genauer zu definieren; entsprechende Überlegungen gelten auch für den Begriff der Admittanz. Warum dies notwendig ist, soll ein Blick auf Abb. 25 erläutern. Würden wir hier für das Tor von Netzwerk 1 die Impedanz

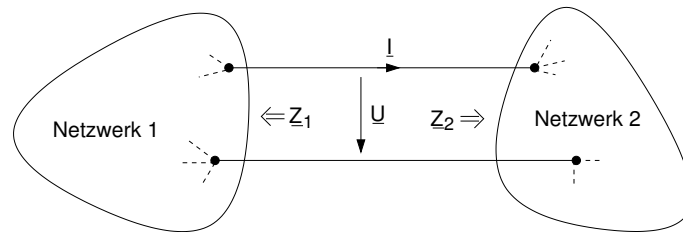


Abb. 25: Zwei über ein Tor mit Spannung  $U$  und Strom  $I$  verbundene Teilnetzwerke.

$Z_1 = \frac{U}{I}$  und für Netzwerk 2  $Z_2 = \frac{U}{I}$  als Verhältnis von Spannung und Strom an dem jeweiligen Tor bestimmen, so folgt daraus allgemein  $Z_1 = -Z_2$ . Dies würde bedeuten, dass die Impedanz der beiden Netzwerk-Tore, bis auf das unterschiedliche Vorzeichen, identisch ist. Dies kann jedoch allgemein nicht stimmen, da wir keinerlei Annahmen über den Inhalt der beiden Netzwerke gemacht haben und somit frei über die Impedanz an deren jeweiligen Tor bestimmen können. Worin liegt hier der Fehler?

Der Fehler liegt darin, dass wir bei der Bestimmung der Impedanz nicht zwischen *Ursache und Wirkung* unterschieden haben. Eine der beiden Größen  $U$  oder  $I$  ist die Ursache, die jeweils andere Größe ergibt sich über die konstituierende Gleichung des Netzwerk-Tores als daraus resultierende Wirkung. Wenn wir eine Größe als *Ursache* bezeichnen, bedeutet das implizit, dass diese Größe in die Schaltung eingepreßt (vorgegeben) wird und die daraus resultierende Wirkung in Form der jeweils anderen Größe auftritt. Das Einprägen (Vorgeben) einer Größe können wir schaltungstechnisch durch das Anlegen einer Quelle symbolisieren. Legen wir eine Spannungsquelle an ein Tor, so prägen wir dort eine Spannung ein. Der Strom, der abhängig von der angelegten Spannung in das Tor fließt, wird durch die konstituierende Gleichung des Tores in Form der Impedanz des Tores bestimmt. Entsprechendes gilt für das Anschließen einer Stromquelle. Diese Verhältnisse sind zum besseren Verständnis in Abb. 26 verdeutlicht. In der linken Abbildung

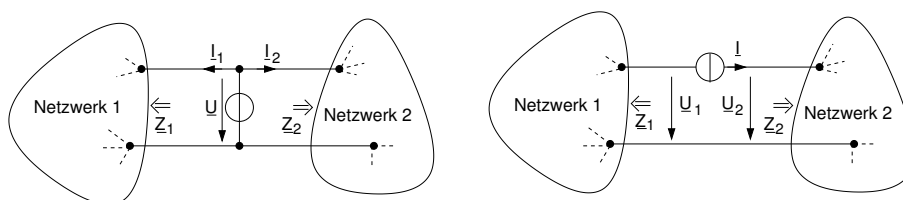


Abb. 26: Einprägung (Vorgabe) von Spannung (links) und Strom (rechts) an den Toren von zwei Teilnetzwerken zur Bestimmung der Torimpedanzen im Sinne einer Wirkungsfunktion.

wird die Spannung  $U$  an beiden Toren eingepreßt (vorgegeben). Diese Spannung *verursacht* an den Torimpedanzen  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$  der beiden Teilnetzwerke die Eingangsströme  $\underline{I}_1 = \underline{U}/\underline{Z}_1$  bzw.  $\underline{I}_2 = \underline{U}/\underline{Z}_2$ , die sich als Wirkung einstellen. Alternativ kann auch, z.B. wie in Abb. 26 rechts gezeigt, ein Strom  $\underline{I}$  in beide Tore eingepreßt werden. Dieser Strom *verursacht* an den Torimpedanzen  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$  der beiden Teilnetzwerke die Spannungen  $\underline{U}_1 = -\underline{Z}_1\underline{I}$  bzw.  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\underline{I}$ , die sich als Wirkung einstellen. In beiden Fällen ist das Verhältnis von Spannung und Strom an den Torimpedanzen der beiden Teilnetzwerke  $\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_1}{-\underline{I}}$  und  $\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}}$ .

Die gleichen Überlegungen können anstelle von Impedanzen auch für alle anderen konstituierenden Gleichungen (d.h. Strom-/Spannungszusammenhänge an Bauelementen, Toren oder Mehrpolen) angestellt werden. Alle konstituierenden Gleichungen zeichnen sich generell durch die Form

$$\text{Wirkungsfunktion} = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ursache}} \quad (91)$$

aus. Natürlich kann rein mathematisch zu einer Wirkungsfunktion nach Gl. 91 auch die inverse Funktion gebildet werden, die bei den hier betrachteten linearen Netzwerken immer eindeutig existiert. Zu der rein mathematisch gebildeten Inversen existiert dann auch eine Wirkungsfunktion, bei der die zuvor als Wirkung betrachtete Größe als Ursache eingepreßt wird. Dies haben wir z.B. in Abb. 26 durch Einprägen einer Spannung (links) und alternativ eines Stromes (rechts) getan. Die Spannungseinprägung führt nach Gl. 91 auf eine Admittanz während die Stromeinprägung auf eine Impedanz als Wirkungsfunktion führt. Beide *Funktionen* sind im Sinne der mathematischen inversen Funktion äquivalent.

Auf Ebene des betrachteten Netzwerks existiert jedoch ein fundamentaler Unterschied aufgrund der zur Einprägung verwendeten unterschiedlichen Quellen. Dies wird unmittelbar einsichtig, wenn wir das Netzwerk ohne Anregung, d.h. Quellspannung bzw. Quellstrom gleich Null betrachten. Dadurch stellt der Zweig der Spannungsquelle ein Kurzschluss (Spannungsquelle mit Spannung Null) zwischen den beiden Anschlüssen der Tore her, wogegen im Zweig der Stromquelle ein Leerlauf (Stromquelle mit Strom Null) entsteht, wodurch die Verbindung der beiden Netzwerke aufgetrennt wird. Wir haben es also mit zwei unterschiedlichen Netzwerken zu tun, wobei der Unterschied allein durch die Wahl der Anregung (Ursache) in Form einer Spannungs- und Stromquelle entstanden ist. Dagegen zeigt die Berechnung der Torimpedanzen, dass diese durch die Wahl der Anregung nicht beeinflusst werden. Somit wären beide Varianten zur Bestimmung der Torimpedanzen der beiden Teilnetzwerke geeignet, jedoch ist das Gesamtnetzwerk in den beiden Fällen

unterschiedlich und weist somit unterschiedliche Eigenschaften auf. Dies ist ein wesentlicher Punkt, den es bei der Wahl einer geeigneten Anregung zur Analyse von Netzwerkeigenschaften zu beachten gilt.

Fazit:

- Zur Bestimmung einer Wirkungsfunktion muss eine Ursache in Form einer Quellgröße eingepreßt (vorgegeben) werden. Die Quellgröße kann dabei durch eine ideale oder reale Spannungs- oder Stromquelle oder auch eine Ersatz-Spannungs- oder -Stromquelle, die ein komplettes Netzwerk repräsentiert, dargestellt werden.
- Die Wahl der Ursache (welche Art der Quelle) bestimmt das resultierende Gesamtnetzwerk.
- Liegen mehrere unabhängige Quellen im Netzwerk vor, so sind diese, bis auf die Quelle der gewählten Ursache, auf Null zu setzen, um definitionsgemäß die Wirkungsfunktion bestimmen zu können. Ausgenommen davon sind gesteuerte Quellen und Quellen zur Einstellung eines gewünschten Betriebszustandes des Netzwerkes (z.B. Betriebsspannungsquellen).

*Übungsbeispiel:* Zeigen Sie, wie durch Einfügen der Stromquelle  $\underline{I}$  in das Netzwerk die Torimpedanz  $\underline{Z}_1$  ermittelt werden kann und dass für  $\underline{I} = 0$  die Quelle aus dem Netzwerk so verschwindet, dass wieder das Original-Netzwerk vorliegt.

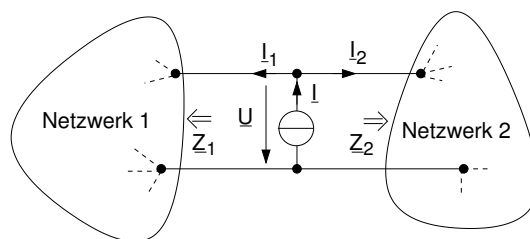


Abb. 27: Netzwerk bestehend aus zwei über ein Tor verbundenen Teilnetzwerke, in das eine Stromquelle  $\underline{I}$  zur Bestimmung der Torimpedanz  $\underline{Z}_1$  eingefügt wurde.

## 7 Zeiger, Ortskurven und Frequenzgang

### 7.1 Zeiger

Die komplexen Größen in der Phasoren-Darstellung lassen sich anschaulich in Form eines Zeigers in der komplexen Ebene darstellen. Betrachten wir z.B.



eine Impedanz  $\underline{Z} = R + jX$ , dann stellt  $R$  den Realteil und  $X$  den Imaginärteil von  $\underline{Z}$  dar, wobei, wie in Abb. 28 links gezeigt, Real- und Imaginärteil - ähnlich Vektoren - in der komplexen Ebene als Zeiger interpretiert werden können. Dabei markiert  $\underline{Z}$  einen Punkt in der komplexen Ebene, der über die

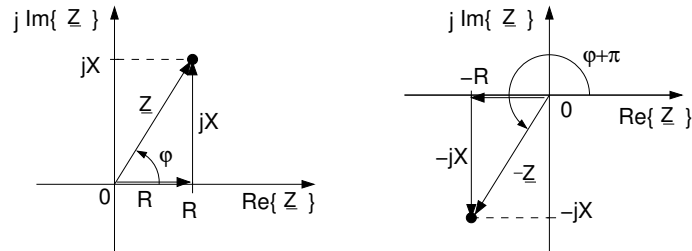


Abb. 28: Links: Zeiger-Darstellung einer Impedanz  $\underline{Z} = R + jX$  in der komplexen Ebene. Rechts: Darstellung der um  $180^\circ$  gedrehten Impedanz  $-\underline{Z}$ . Bei der Berechnung des Winkels von  $\underline{Z}$  und  $-\underline{Z}$  besitzen das Argument der Arcus-Tangens-Funktion in beiden Fällen den selben Wert, wodurch es zu einer Mehrdeutigkeit in der Berechnung des Winkels kommt.

Addition der Zeiger  $R + jX$  erreicht werden kann. Daraus konstruiert sich ein rechtwinkliges Dreieck, für das allgemein gilt

$$\underline{Z} = R + jX, \quad \text{Zeiger} \quad (92)$$

$$|\underline{Z}|^2 = Z = R^2 + X^2, \quad \text{Betrag, Zeiger-Länge} \quad (93)$$

$$|\underline{Z}| \leq R + X, \quad \text{Dreiecks-Ungleichung} \quad (94)$$

$$R/|\underline{Z}| = \cos \varphi \quad (95)$$

$$X/|\underline{Z}| = \sin \varphi \quad (96)$$

$$X/R = \tan \varphi \quad (97)$$

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} + n\pi \quad n \in \{0, 1\} \quad (98)$$

Darin berücksichtigt der Term  $n\pi$  in Gl. 98 die Mehrdeutigkeit der arctan-Funktion wegen der Doppeldeutigkeit der Argumente  $\frac{X}{R} = \frac{-X}{-R}$  die keine Unterscheidung des Winkels zwischen  $\underline{Z}$  und  $-\underline{Z}$ , die jeweils um  $180^\circ$  gedreht zueinander liegen, zulässt (vgl. Abb. 28 links und rechts).

## 7.2 Ortskurve

Einen großen Vorteil hat die Zeiger-Darstellung dann, wenn der Zeiger von einem oder mehreren Parametern abhängt. Dies ist generell dann der Fall, sobald eine konstituierende Gleichung eine Frequenzabhängigkeit besitzt. Die Spitze des Zeigers beschreibt dann abhängig von der Frequenz eine Kurve in

der komplexen Ebene, die wir als *Ortskurve* bezeichnen. Wir betrachten dazu als Beispiel in Abb. 29 die Impedanz  $\underline{Z} = \underline{Z}(j\omega) = R + j\omega L$  der Reihenschaltung aus einem Widerstand  $R$  und einer Induktivität  $L$  im Frequenzbereich  $\omega = 0 \dots \infty$ . Der Zeiger  $\underline{Z}(j\omega)$  der Impedanz beschreibt über der Frequenz

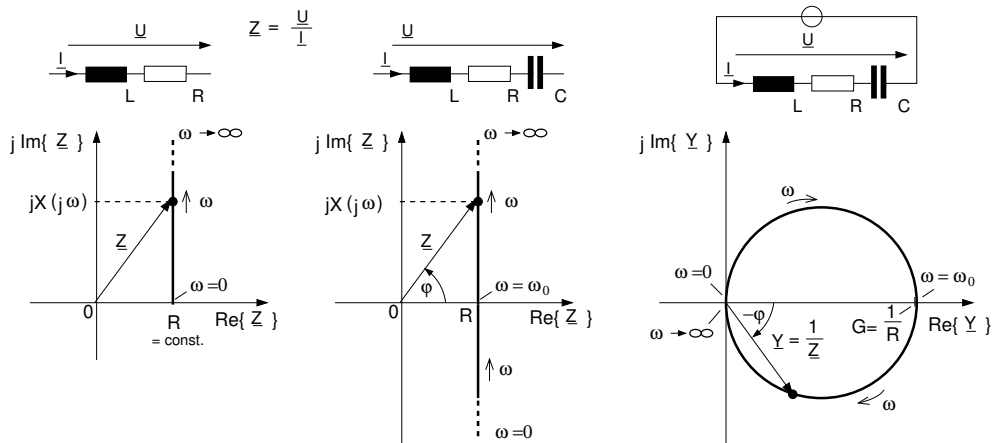


Abb. 29: Links: Ortskurve des Zeigers  $\underline{Z} = R + j\omega L$  über der Frequenz  $\omega$ . Mitte: Ortskurve für  $\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ . Rechts: Ortskurve der Admittanz  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$  zur Impedanz in der mittleren Darstellung.

einen senkrechte Gerade parallel zur imaginären Achse, die bei  $\omega = 0$  auf der reellen Achse bei dem Wert  $R$  liegt. Aus der Betrachtung des Verlaufs können direkt, ohne Analyse der Gleichung von  $\underline{Z}(j\omega)$ , einige offensichtliche Aussagen getroffen werden:

- Alle Werte von  $\underline{Z}(j\omega)$  für  $\omega = 0 \dots \infty$  liegen im ersten Quadranten.
- Die Winkel  $\varphi = \arg(\underline{Z}(j\omega))$  gehen von  $0^\circ \dots 90^\circ$ .
- Je größer  $\omega$  wird, umso mehr nähert sich der Winkel  $90^\circ$  und umso länger wird  $\underline{Z}$ , wobei die Länge von  $\underline{Z}$  mit zunehmender Frequenz von dem Imaginärteil bestimmt wird (d.h. der Realteil wird vernachlässigbar).
- Im Grenzfall  $\omega \rightarrow \infty$  ist  $\varphi \rightarrow 90^\circ$  und  $|\underline{Z}|$  (die Länge des Zeigers) wird allein durch den Imaginärteil bestimmt.

Aufgrund der letztgenannten immer gültigen Eigenschaft hinsichtlich des Betrags ist man versucht für  $\omega \rightarrow \infty$  auch die Schlussfolgerung  $\underline{Z} \rightarrow j\omega L$  und damit  $\underline{Z} \approx j\omega L$  aufzustellen. In vielen Fällen führt dies auch zu richtigen Ergebnissen. Jedoch muss formal beachtet werden, dass für  $\omega \rightarrow \infty$  der Realteil nicht verschwindet, sondern, unbeeinflusst vom Imaginärteil, seinen konstanten Wert  $R$  behält. Dieser tritt als maßgebliche Größe z.B. bei der Stabilität

(Neigung zur Oszillation) einer Schaltung oder bei einer Kompensation des Imaginärteils in Erscheinung.

Eine einfache Überlegung zur Kompensation zeigt der Fall in Abb. 29, Mitte, wo noch eine Kapazität in Reihe zur bisherigen RL-Reihenschaltung geschaltet wird. Hierdurch entsteht ein sogenannter (RLC) Reihenschwingkreis, den wir in einem folgenden Kapitel noch genauer untersuchen werden. Die resultierende Impedanz des Schwingkreises

$$\underline{Z}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R|_{\omega=\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (99)$$

besitzt einen Imaginärteil, der bei der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  verschwindet und es verbleibt nur der Realteil  $R$ . Wäre zuvor in der RL-Reihenschaltung im Bereich der Frequenz  $\omega_0$  die Näherung  $\underline{Z} \approx j\omega L$  durchgeführt worden (z.B. weil  $R = 10\Omega$ ,  $\omega_0 L = 10K\Omega$ ), wäre nach Hinzufügen der Kapazität die Impedanz gleich Null (idealer Kurzschluss) anstelle des Wertes von  $R$  gewesen, was je nach Fragestellung zu falschen Ergebnissen führen kann. Fazit: In der Regel kann eine Näherung einer komplexen Zahl nur hinsichtlich ihres Betrages durchgeführt werden, da dann Real- und Imaginärteil als reellwertige Zahlen (Quadrate von Imaginär- und Realteil) miteinander verglichen und ggf. gegeneinander vernachlässigt werden können.

Betrachten wir die Ortskurve des Reihenschwingkreises in Abb. 29 Mitte. Wir sehen, dass durch Hinzunahme der Kapazität die Impedanz nun auch den vierten Quadranten durchläuft. In diesem Bereich dominiert der  $\frac{1}{\omega C}$  Term gegenüber dem  $\omega L$  Term in Gl. 99 und bewirkt einen negativen Imaginärteil. Man spricht daher von einem *kapazitiven Verhalten*, wenn der Imaginärteil einer Impedanz negativ ist, d.h. in der unteren Halbebene der komplexen Zahlenebene liegt. Entsprechend liegt in der oberen Halbebene *induktives Verhalten* vor. Die Ortskurve zeigt auch direkt, dass bei der Resonanzfrequenz die Impedanz den kürzesten Zeiger besitzt. Berechnen wir den Strom  $\underline{I}$  durch den Schwingkreis unter der Annahme, dass dieser durch eine frequenzunabhängige Spannung  $\underline{U}$  angesteuert wird, ergibt sich

$$\underline{I} = \underline{U} \underline{Y} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \underline{U} \frac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (100)$$

Der Strom ergibt sich damit direkt über die Inversion der Impedanz  $\underline{Z}$ . Die Aufgabe besteht daher darin, die zugehörige invertierte Ortskurve in der komplexen Ebene zu bestimmen. Zwar liegen durch die komplex-konjugierte Erweiterung im zweiten Schritt von Gl. 100 der Real- und Imaginärteil getrennt voneinander vor, dennoch ist die Ortskurve dieser Gleichung nicht einfach ersichtlich. Durch Umformung kann man zeigen, dass diese

Darstellung zu einer Kreisgleichung gehört. Jedoch ist dies nicht notwendig. Einfacher ist es, einen Satz der konformen Abbildung, zu der auch die Inversion einer komplexen Größe gehört, zu verwenden.

*Die Inversion der Ortskurve eines Kreises ergibt wieder einen Kreis. Eine Gerade stellen dabei den Sonderfall eines Kreises mit unendlichem Radius dar.*

Damit kann a priori bei Vorliegen eines Kreises (oder einer Geraden) als Ortskurve die zugehörige Inverse als Kreis angegeben werden. Offen bleibt die Lage und die Parametrisierung<sup>8</sup> des Kreises. Bei deren Bestimmung hilft ein Blick auf die Euler-Darstellung einer komplexen Zahl. Wird diese invertiert, ergibt sich

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi}. \quad (101)$$

Demnach ergibt die Inversion eines komplexen Zeigers einen Zeiger mit dem Kehrwert des Betrages (d.h. aus einem langen (dem längsten) wird ein kurzer (der kürzeste) Zeiger und umgekehrt) und einem an der reellen Achse gespiegelten Winkel (Winkel mit entgegengesetzter Zählrichtung).

Wenden wir dies auf die Inversion der Ortskurve von  $\underline{Z}(j\omega)$  Abb. 29, Mitte, an, so ergeben sich einige einfache, charakteristische Punkte, die es erlauben, den invertierten Kreis zu bestimmen:

- die beiden längsten Zeiger in den Punkten im Unendlichen für  $\underline{Z}(\omega = 0)$  und  $\underline{Z}(\omega \rightarrow \infty)$  werden durch Inversion zu den kürzesten Zeigern mit der Länge Null.
- Die zugehörigen Phasen werden gespiegelt. Dadurch hat der Zeiger für  $\omega = 0$  einen Winkel von  $+90^\circ$  und der Zeiger für  $\omega \rightarrow \infty$  einen Winkel von  $-90^\circ$  nach der Inversion.
- Der kürzeste Zeiger vor der Inversion war  $\underline{Z}(j\omega_0) = R$  und wird zum längsten Zeiger mit der Länge  $G = \frac{1}{R}$  nach der Inversion.
- Die Ortskurve vor der Inversion liegt spiegelsymmetrisch zur reellen Achse, so dass zu jedem Punkt  $Ze^{j\varphi}$  in der einen Halbebene ein gespiegelter Punkt  $Ze^{-j\varphi}$  in der anderen Halbebene existiert. Anhand der Überlegung zur Inversion in der Euler-Darstellung (vgl. Gl. 101) ist offensichtlich, dass diese Eigenschaft nach der Inversion erhalten bleibt.

---

<sup>8</sup>Die Parametrisierung gibt an, bei welcher Frequenz welcher Punkt des Kreises angenommen wird.

Der invertierte Kreis muss daher auch spiegelsymmetrisch zur reellen Achse liegen.

Mit diesen Überlegungen kann die Inversion der Ortskurve in Abb. 29, rechts, konstruiert werden. Demnach startet der Zeiger der invertierten Impedanz  $\underline{Y}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(j\omega)}$  mit einem Winkel von  $+90^\circ$  beginnend bei  $\omega = 0$  im Ursprung, verläuft auf dem Kreis im Uhrzeigersinn zunächst im ersten Quadranten (induktives Verhalten), wird bei der Frequenz  $\omega_0$  reellwertig ( $\underline{Y}(j\omega_0) = G = \frac{1}{R}$ ) und läuft dann im vierten Quadranten (kapazitives Verhalten) in Richtung Ursprung, den er für  $\omega \rightarrow \infty$  mit einem Winkel von  $-90^\circ$  erreicht.

Gegenüber der analytischen Darstellung in Gl. 100 sind diese Eigenschaften direkt sichtbar. Auch ist unmittelbar zu erkennen, dass der Maximalwert, den der Imaginärteil über der Frequenz aufgrund der Kreisform der Ortskurve annehmen kann gleich dem Radius  $G/2$  des Kreises ist. Gleichung 100 ist dieses Ergebnis nur mit etwas mehr Mühe zu entlocken.

### 7.3 Frequenzgang

Anstelle einer Darstellung in der komplexen Ebene können der Betrag und Phase einer Größe auch getrennt in einzelnen Diagrammen in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt werden. Diese Art der Darstellung wird als *Frequenzgang* bezeichnet. Der Betrags-Verlauf über der Frequenz wird als *Betrags-(Frequenz)gang* und der entsprechende Phasenverlauf als *Phasen-(Frequenz)gang* bezeichnet. Der wesentliche Vorteil dieser Darstellung liegt in der expliziten Verfügbarkeit aller Frequenzpunkte auf der Abszisse (x-Achse), wogegen in der Ortskurven-Darstellung Frequenzpunkte nur mühsam über Markieren einiger charakteristischen Punkte auf dem Kurvenverlauf verfügbar sind.

Als Beispiel zeigt Abb. 30 den Frequenzgang der Admittanz  $\underline{Y}(j\omega) = \frac{I}{U}$  aus dem vorangegangenen Beispiel nach Abb. 29, rechts, bzw. nach Gl. 100.

## 8 Leistung in zeitharmonisch angeregten Netzwerken

In Kapitel 2.3 hatten wir mit Gl. 11 und Gl. 13 bereits zwei Formulierungen zur Berechnung der Augenblicks-Leistung und der mittleren Leistung an einem Tor eines Netzwerks mit der Spannung  $u(t)$  und dem Strom  $i(t)$  hergeleitet. Diese wollen wir im Folgenden auf lineare Netzwerke aus RLCM-Elementen anwenden und dafür einen Zusammenhang mit den zugehörigen

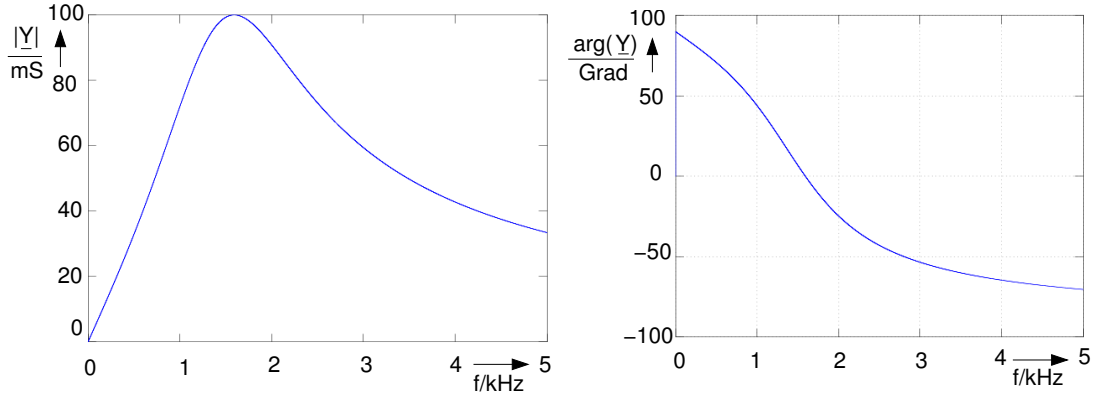


Abb. 30: Betrags- und Phasenfrequenzgang der Admittanz des Reihenschwingkreises nach Abb. 29, rechts, bzw. nach Gl. 100 mit  $R=10 \Omega$ ,  $L=1 \text{ mH}$  und  $C=10 \mu\text{F}$ .

Phasoren herstellen. Mit Gl. 11 ergibt sich

$$p(t) = u(t) i(t), \quad (102)$$

$$= \Re\{\underline{U}e^{j\omega t}\} \Re\{\underline{I}e^{j\omega t}\}, \quad \underline{U} = Ue^{j\varphi_U}, \underline{I} = Ie^{j\varphi_I} \quad (103)$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{U}e^{j\omega t} + \underline{U}^*e^{-j\omega t}) \frac{1}{2}(\underline{I}e^{j\omega t} + \underline{I}^*e^{-j\omega t}), \quad (104)$$

$$= \frac{1}{4}(\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t} + \underline{U}^*\underline{I} + \underline{I}^*\underline{U} + \underline{U}^*\underline{I}^*e^{-j2\omega t}), \quad (105)$$

$$= \frac{1}{2}\Re\{\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t} + \underline{U}\underline{I}^*\}, \quad (106)$$

$$= \Re\left\{\frac{\underline{U}\underline{I}^*}{2} \left(\frac{\underline{I}}{\underline{I}^*}e^{j2\omega t} + 1\right)\right\}, \quad (107)$$

$$= \Re\left\{\underline{S}(e^{j2(\omega t + \varphi_I)} + 1)\right\}, \quad \underline{S} := \frac{\underline{U}\underline{I}^*}{2}. \quad (108)$$

Wir bezeichnen darin mit  $\underline{S}$  die komplexwertige *Scheinleistung*

$$\underline{S} := \frac{\underline{U}\underline{I}^*}{2} = Se^{j\varphi} = \frac{UI}{2}e^{j\varphi} = P + jQ, \quad \text{mit } \varphi =: \varphi_U - \varphi_I, \quad (109)$$

worin  $U$  und  $I$  gemäß unserer Definition<sup>9</sup> der Phasoren die reellwertigen Amplituden der harmonischen Schwingungen sind (vgl. Gl. 62). Wir können,

<sup>9</sup>In der Literatur wird häufig auch die Darstellung von  $\underline{S}$  ohne Division durch Zwei angetroffen. Das beruht darauf, dass in diesen Fällen  $U$  und  $I$  nicht die Amplituden sondern die Effektivwerte von Spannung und Strom sind, für die  $U_{eff} = \frac{U}{\sqrt{2}}$  und  $I_{eff} = \frac{I}{\sqrt{2}}$  gilt (vgl. Kapitel 8.1).

wie in Gl. 109 gezeigt, der komplexen Größe  $\underline{S}$  formal einen Realteil  $P$ , die *Wirkleistung* und einen Imaginärteil  $Q$ , die *Blindleistung*, zuordnen

$$P = \Re\{\underline{S}\} = S \cos \varphi, \quad (110)$$

$$Q = \Im\{\underline{S}\} = S \sin \varphi, \quad (111)$$

deren Bedeutung wir im Folgenden diskutieren wollen. Dazu schreiben wir Gl. 108 in der Form

$$p(t) = \Re\{(P + j Q) \underline{Q}(t)\}, \quad \underline{Q}(t) := e^{j2(\omega t + \varphi_I)} + 1. \quad (112)$$

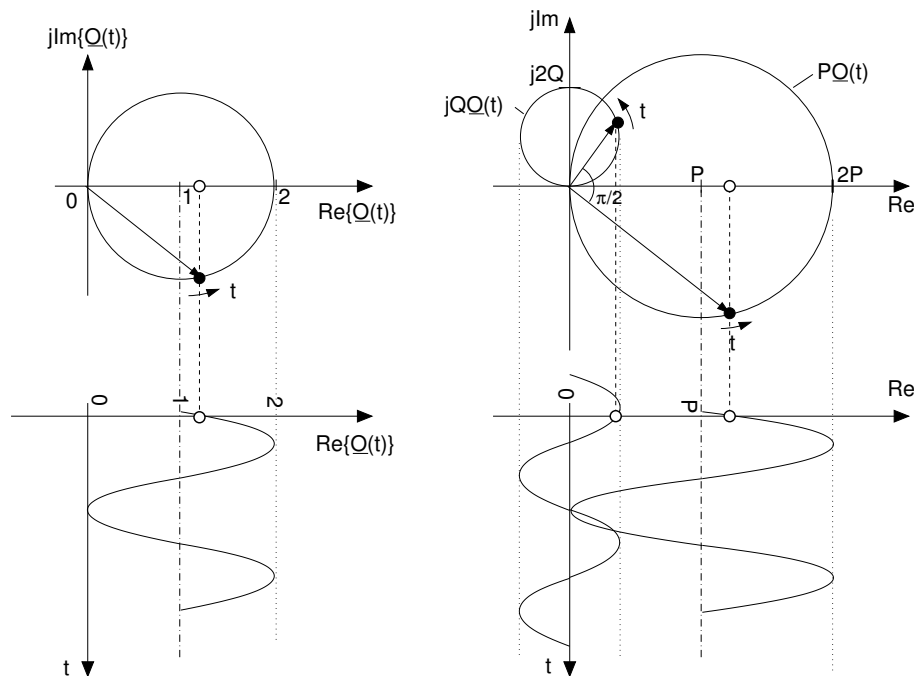


Abb. 31: Links: Ortskurve der Funktion  $\underline{Q}(t)$  (oben) und deren Projektion des Realteils über der Zeit (unten) mit einem Mittelwert von Eins, entsprechend dem Kreismittelpunkt. Rechts: Produkte  $PQ(t)$  und  $jQQ(t)$  aus Gl. 112 mit den entsprechenden Zeitverläufen.

Die in Gl. 112 definierte Funktion  $\underline{Q}(t)$  stellt entsprechend Abb. 31, links, einen um den Wert Eins nach rechts verschobenen Einheitskreis dar, der kontinuierlich mit der Frequenz  $2\omega$  über der Zeit im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird. Der dazu gehörende Realteil ergibt eine um den Winkel  $2\varphi_I$  verschobene Kosinus-Funktion. Der Realteil des Verlaufs von  $\underline{Q}(t)$  bewegt sich dabei um den *zeitlichen Mittelwert von Eins*. Bei der Multiplikation mit  $P$  in Gl. 112 wird der zeitabhängige Verlauf lediglich mit dem reellen Wert  $P$

skaliert, wodurch sich der Mittelwert  $P$  ergibt. Die Multiplikation von  $\underline{Q}(t)$  mit  $jQ$  skaliert den Kreis von  $\underline{Q}(t)$  entsprechend mit dem reellen Wert  $Q$  und dreht diesen Kreis noch zusätzlich um  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$ ) aufgrund der Multiplikation mit  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ . Der Mittelpunkt von  $jQ\underline{Q}(t)$  liegt dadurch auf der imaginären Achse (bei  $jQ$ ), wodurch der zeitliche Mittelwert des Realteils bei Null liegt (vgl. Abb. 31, rechts). Als Fazit gilt daher für den zeitlichen Mittelwert der Leistung<sup>10</sup>

$$\frac{1}{T} \int_T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_T \Re\{(P + jQ) \underline{Q}(t)\} dt \quad (113)$$

$$= \frac{1}{T} \int_T \Re\{P\underline{Q}(t)\} dt + \frac{1}{T} \int_T \Re\{jQ\underline{Q}(t)\} dt \quad (114)$$

$$= P. \quad (115)$$

Der Realteil der Scheinleistung, die Wirkleistung  $P = \Re\{\underline{S}\} = S \cos \varphi$  nach Gl. 110 stellt demnach den Mittelwert der Augenblicksleistung dar und gibt an, wieviel elektrische Leistung in eine andere Energieform (z.B. mechanisch oder thermisch) umgewandelt wird (sog. "Verlustleistung").

Der Mittelwert der Augenblickswerte der Blindleistung  $\Re\{jQ\underline{Q}(t)\}$  ist dagegen gleich Null. Dies bedeutet, dass im Mittel an dem betrachteten Tor genausoviel Leistung abgegeben wie aufgenommen wird. Im Verlauf über der Zeit wird während der halben Periodendauer mit positiven Werten von  $\Re\{jQ\underline{Q}(t)\}$  Leistung aufgenommen, die in der zweiten Hälfte der Periodendauer mit negativen Werten abgegeben wird. Auch wenn der Mittelwert dieser Leistung gleich Null ist, so muss die daran beteiligte Quelle die zusätzliche Leistung während der halben Periodendauer liefern und die Last inklusive der angeschlossenen Verdrahtung (Kabel, Leitungen etc.) diese Leistung entsprechend aufnehmen können.

Somit stellen sowohl Realteil  $P$  als auch der nicht in Wirkleistung umgesetzte Imaginärteil  $Q$  der Scheinleistung  $\underline{S}$  wichtige Parameter zur Beurteilung der von einem Tor eines Netzwerks aufgenommenen bzw. abgegebenen Leistung in einem Netzwerk dar.

Ein direktes Maß für den Anteil der Scheinleistung der in Wirkleistung umgesetzt wird, liefert der *Leistungsfaktor*  $\lambda$ , der das Verhältnis von Wirk- zu Scheinleistung nach Gl. 110 darstellt

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi \quad \text{mit } \varphi =: \varphi_U - \varphi_I. \quad (116)$$

Demnach ist der Anteil der Wirkleistung an der Scheinleistung umso größer,

---

<sup>10</sup>Der Mittelwert wird hier aufgrund des periodischen Verlaufs über eine Periodendauer des Signals gebildet.



je geringer der Unterschied zwischen den Phasen von Strom und Spannung an dem betrachteten Tor ist.

## 8.1 Effektivwert-Phasoren

Als Alternative zu den in Gl. 68 definierten Phasoren, deren Betrag die Amplitude der jeweiligen Größe darstellt, können auch die Effektivwerte durch Phasoren dargestellt werden. Die Bedeutung der Effektivwerte folgt aus der Darstellung der Scheinleistung nach Gl. 109 an einem Widerstand

$$\underline{S} := \frac{1}{2} \underline{U} \underline{I}^* = \frac{1}{2} R \underline{I} \underline{I}^* = \frac{1}{2} R I^2 = R \left( \frac{I}{\sqrt{2}} \right)^2 = R I_{eff} = P. \quad (117)$$

Darin wird mit

$$I_{eff} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad (118)$$

der *Effektivwert* des über der Zeit harmonisch verlaufenden Stromes bezeichnet. Würde man einen Gleichstrom mit dem Wert  $I_{eff}$  durch den Widerstand fließen lassen, würde dieser die gleiche Leistung  $P = R I_{eff}$  an dem Widerstand erzeugen. Entsprechende Überlegungen gelten für den Effektivwert der Spannung

$$U_{eff} = \frac{U}{\sqrt{2}}. \quad (119)$$

Fazit: *Der Effektivwert einer Größe (Spannung oder Strom) ist der Wert, der als Gleich-Größe an das Bauelement angelegt, die selbe Wirkleistung  $P$  wie der zugehörige zeitharmonische Verlauf erzeugt.*

Formal können basierend auf diesen Effektivwerten auch entsprechende Effektivwert-Phasoren definiert werden

$$\underline{U}_{eff} = \frac{\underline{U}}{\sqrt{2}}, \quad \underline{I}_{eff} = \frac{\underline{I}}{\sqrt{2}}. \quad (120)$$

Diese führen in Rechnungen, mit Ausdrücken, die auf Leistungen basieren, zu einfacherer Schreibweise, da der Faktor  $\frac{1}{2}$  bzw.  $\sqrt{2}$  entfällt.

## 9 Das Knotenpotenzial-Verfahren

Im Folgenden betrachten wir eine vereinfachte Herleitung des Knotenpotenzial-Verfahrens. Betrachtung von grundlegenden Aspekten zu Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sowie zur Formalisierung des Lösungsverfahrens, die als Basis für weiterführende theoretische Betrachtungen und die rechnergestützte Schaltungssimulation benötigt werden, sind Teil der weiterführenden Veranstaltungen *Elektrische Netzwerke* im vierten Semester. Setzt man einige dort ermittelte Erkenntnisse voraus (z.B. die Existenz einer eindeutigen Lösung oder das Konzept eines Referenzknotens), dann lässt sich das Knotenpotenzial-Verfahren als Lösung linearer zeitinvarianter Netzwerkgleichungen in der nachfolgenden sehr kompakten Form herleiten. Auch das Berücksichtigen von gesteuerten Quellen ist darin einfach möglich, wie in einem anschließenden Beispiel gezeigt wird.

Für die Anwendung des Knotenpotenzial-Verfahrens ist das zu behandelnde Netzwerk zunächst so umzuwandeln, dass *jeder Zweig des Netzwerks entweder eine Admittanz oder eine ideale Stromquelle enthält*. Man kann zeigen, dass sich jedes lineare Netzwerk unter Zuhilfenahme äquivalenter Umformungen (z.B. Äquivalenzumwandlung von Spannungs- in Stromquellen nach Abb. 13) in dieser Form darstellen lässt. Zudem wird *ein beliebiger Knoten des Netzwerks als Referenzknoten definiert*. Er dient zur Definition der Potentiale aller weiteren Knoten des Netzwerks, die zur systematischen Erfassung von  $1 \dots n$  durchnummeriert werden (d.h. das Netzwerk inklusive dem Referenzknoten besitzt  $n + 1$  Knoten).

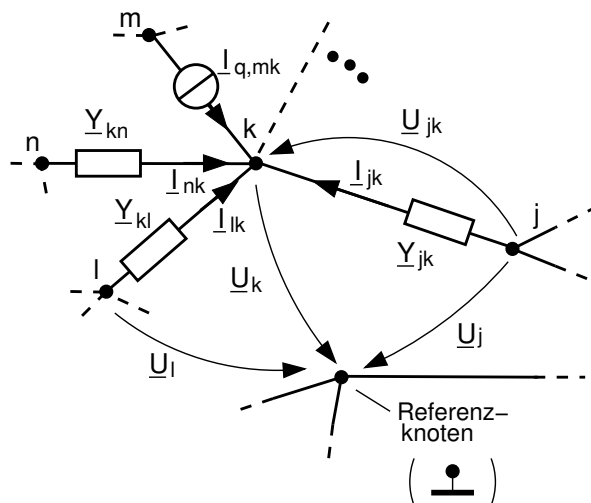


Abb. 32: Ausschnitt aus einem beliebigen Netzwerk mit einer beliebigen Wahl eines Referenzknotens.

Wir betrachten als Beispiel in Abb. 32 einen beliebigen Ausschnitt aus einem derart umgeformten Netzwerk und bilden die Strombilanz (KCL) für den Knoten  $k$

$$0 = \underline{I}_{jk} + \underline{I}_{lk} + \underline{I}_{nk} + \dots \underline{I}_{q,mk} + \dots \quad (121)$$

$$= (\underline{U}_j - \underline{U}_k)\underline{Y}_{jk} + (\underline{U}_l - \underline{U}_k)\underline{Y}_{lk} + (\underline{U}_n - \underline{U}_k)\underline{Y}_{nk} + \underline{I}_{q,mk} + \dots \quad (122)$$

Die Punkte in der Gleichung stehen für weitere Zweige mit Admittanzen oder Stromquellen, die gegebenenfalls an den Knoten  $k$  angeschlossen sind. Sortieren der Terme dieser Gleichung führt auf

$$\underbrace{(\underline{Y}_{kj} + \underline{Y}_{kl} + \underline{Y}_{kn} + \dots)}_{\substack{:= \underline{Y}_{kk}, \\ \text{Summe aller Admittanzen am Knoten } k}} \underline{U}_k - \underbrace{\underline{Y}_{kj}\underline{U}_j - \underline{Y}_{kl}\underline{U}_l - \underline{Y}_{kn}\underline{U}_n - \dots}_{\substack{\text{Koppeladmittanzen mit} \\ \text{Potenzial des koppelnden} \\ \text{Knotens}}} = \underbrace{\underline{I}_{q,mk} + \dots}_{\substack{:= \sum I_{qk} \\ \text{Summe} \\ \text{der Quellströme in} \\ \text{Knoten } k}} \quad (123)$$

Formuliert man diese Gleichung für sämtliche  $n$  Knoten des Netzwerks, mit Ausnahme des  $(n+1)$ -ten Referenzknotens<sup>11</sup>, so ergeben sich  $n$  Gleichungen mit  $n$  unbekanntem Potenzialen der Knoten (*Knotenpotenziale*) des Netzwerks, die sich in Form des nachfolgenden Gleichungssystems darstellen lassen

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{12} & -\underline{Y}_{13} & \dots & -\underline{Y}_{1n} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{23} & \dots & -\underline{Y}_{2n} \\ -\underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & -\underline{Y}_{33} & \dots & -\underline{Y}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\underline{Y}_{n1} & -\underline{Y}_{n2} & -\underline{Y}_{n3} & \dots & \underline{Y}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \underline{I}_{q1} \\ \sum \underline{I}_{q2} \\ \sum \underline{I}_{q3} \\ \vdots \\ \sum \underline{I}_{qn} \end{pmatrix}. \quad (124)$$

Darin stellt jede Zeile eine Strombilanzgleichung eines Knoten wie in Gl. 123 dar.

Dieses Gleichungssystem können wir auch kurz in der Form

$$\underline{\mathbf{Y}}_n \underline{\mathbf{U}}_n = \underline{\mathbf{I}}_{qn} \quad (125)$$

schreiben. Der Index  $n$  deutet dabei an, dass es sich um ein auf Knoten- (engl. *node*) Potenzialen basierendes Gleichungssystem handelt. Die Matrix  $\underline{\mathbf{Y}}_n$  wird als *Knotenadmittanz-Matrix* bezeichnet. Sie besitzt entsprechend den Überlegungen zu Gl. 123 auf der Hauptdiagonalen Einträge  $\underline{Y}_{kk}$  in Form

<sup>11</sup>Die Begründung hierzu wird in der Veranstaltung *Elektrische Netzwerke* gegeben.

der Summe aller Admittanzen, die direkt mit dem jeweiligen Knoten  $k$  verbunden sind. Die weiteren Einträge  $-Y_{kl}$  von  $\underline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{n}}$  sind die Admittanzen der jeweiligen Zweige, welche mit dem Knoten  $k$  verbunden sind. Sie werden mit einem negativen Vorzeichen versehen, eingetragen. Ist keine Admittanz zwischen den jeweiligen Knoten vorhanden, entspricht dies einer Admittanz von Null und entsprechend wird in diesem Fall  $Y_{kl} = 0$  eingetragen.

Die Einträge  $U_k$  des Spannungsvektors  $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}}$  sind die *Knotenpotenziale* des Netzwerkes, die sich auf den frei definierbaren Referenzknoten des Netzwerkes beziehen.

Der Quellen-Vektor  $\underline{\mathbf{I}}_{\mathbf{qn}}$  beinhaltet die Einträge aller idealen, unabhängigen Stromquellen des Netzwerkes (nach Umformung aller Netzwerk-Elemente in Zweigadmittanzen und Stromquellen), an dem jeweiligen Knoten angeschlossen sind. Speist diese Quelle entsprechend der angenommenen Zählpfeil-Richtung einen Strom in den Knoten ein, so wird deren Beitrag mit positivem Vorzeichen im Quellvektor eingetragen.

*Beispiel zum Aufstellen des Gleichungssystems für das Knotenpotenzial-Verfahren.*

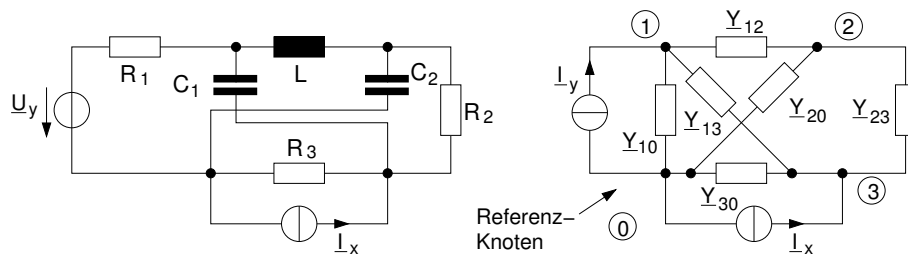


Abb. 33: Beispiel zum Aufstellen des Gleichungssystems für das Knotenpotenzial-Verfahren. Links: Original Schaltung. Rechts: Schaltung bei der alle (hier nur eine) Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen umgewandelt sind. Die Elemente, die in der Original Schaltung jeweils zwischen zwei Knoten  $k, l$  lagen, sind in einer entsprechenden Admittanz  $Y_{k,l}$  berücksichtigt.

Zum Aufstellen des Knotenpotenzial-Gleichungssystems sind alle Spannungs- in äquivalente Stromquellen umzuwandeln. Daher wird entsprechend den Überlegungen zu Gl. 21 aus der Spannungsquelle  $U_y$  mit dem Innenwiderstand  $R_1$  die Stromquelle  $I_y = \frac{U_y}{R_1}$  mit dem Innenwiderstand  $R_1$ , der durch  $Y_{10}$  berücksichtigt wird. Durch diese Umwandlung enthält das äquivalente Netzwerk in Abb. 33 rechts, wie gefordert, ausschließlich Quellen

in Form von Stromquellen. Für die Admittanzen darin gilt

$$\underline{Y}_{10} = 1/R_1 = G_1, \quad (126)$$

$$\underline{Y}_{12} = 1/(j\omega L), \quad (127)$$

$$\underline{Y}_{13} = j\omega C_1, \quad (128)$$

$$\underline{Y}_{20} = j\omega C_2, \quad (129)$$

$$\underline{Y}_{23} = 1/R_2 = G_2, \quad (130)$$

$$\underline{Y}_{30} = 1/R_3 = G_3. \quad (131)$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem in der Form

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_{10} + \underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{12} & -\underline{Y}_{12} & -\underline{Y}_{13} \\ -\underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{20} + \underline{Y}_{23} & -\underline{Y}_{23} \\ -\underline{Y}_{13} & \underline{Y}_{23} & \underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_y \\ 0 \\ \underline{I}_x \end{pmatrix}. \quad (132)$$

*Beispiel zum Einbau von allgemeinen Zweitoren (z.B. zwei gekoppelte Induktivitäten) in die Knotenadmittanzmatrix.*

Bei einem Zweitor hängt der Strom an einem Tor nicht nur von der Spannung an diesem sondern auch von der Spannung an dem anderen Tor ab. Ein Beispiel dazu kennen wir bereits in Form der gekoppelten Induktivitäten in Gl. 88. Diese Matrix-Gleichung beinhaltet jedoch *Impedanzen* der Form  $j\omega L$  wohingegen wir *Admittanzen* für den Einbau der entsprechenden Einträge in die Knotenadmittanz-Matrix benötigen. Daher invertieren wir als ersten Schritt dieses Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_{11} & \pm j\omega M \\ \pm j\omega M & j\omega L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (133)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_{11} & \pm j\omega M \\ \pm j\omega M & j\omega L_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}, \quad (134)$$

$$= \frac{1}{(j\omega)^2(L_{11}L_{22} + M^2)} \begin{pmatrix} j\omega L_{22} & \mp j\omega M \\ \mp j\omega M & j\omega L_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}, \quad (135)$$

$$= \frac{1}{j\omega(L_{11}L_{22} + M^2)} \begin{pmatrix} L_{22} & \mp M \\ \mp M & L_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}, \quad (136)$$

$$:= \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}. \quad (137)$$

Die letzte Zeile dieser Umformung stellt eine allgemeine lineare Beziehung zwischen den Strömen und Spannung in zwei Zweigen in Admittanz-Form dar. Damit können neben den hier als Beispiel betrachteten gekoppelten

Induktivitäten generell beliebige lineare Strom/Spannungs-Abhängigkeiten zwischen zwei miteinander verkoppelten Zweigen bzw. Toren berücksichtigt werden. Einen solchen allgemeinen Fall zeigt Abb. 34. Darin sind die Zweige

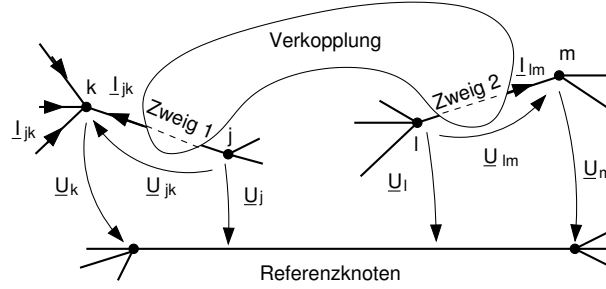


Abb. 34: Zur Definition der konstituierenden Gleichungen von zwei allgemein gekoppelten Zweigen mit den Spannungen und Strömen  $\underline{U}_{jk}$ ,  $\underline{I}_{jk}$  und  $\underline{U}_{lm}$ ,  $\underline{I}_{lm}$  für den Einbau in die Knotenadmittanzmatrix.

(Tore) 1 und 2 in der allgemeinen Form nach Gl. 137 miteinander verkoppelt. Zweig 1 soll an den Knoten j und k, Zweig 2 an den Knoten l und m in der dargestellten Weise angeschlossen sein. Die entsprechenden konstituierenden Gleichungen der beiden verkoppelten Zweige lauten nach Gl. 137 in Admittanz-Form

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_{jk} \\ \underline{I}_{lm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_{jk} \\ \underline{U}_{lm} \end{pmatrix} \quad (138)$$

Eine Matrix-Gleichung in dieser Admittanz-Form lässt sich einfach in die Knotenadmittanz-Matrix des Gleichungssystems einbauen, wenn anstelle der Zweigspannungen  $\underline{U}_{jk}$ ,  $\underline{U}_{lm}$  die entsprechenden Knotenpotenziale verwendet werden. Es ergeben sich damit aus Gl. 138 die beiden Gleichungen in ausgeschriebener Form

$$\underline{I}_{jk} = \underline{Y}_{11}(\underline{U}_j - \underline{U}_k) + \underline{Y}_{12}(\underline{U}_l - \underline{U}_m), \quad (139)$$

$$\underline{I}_{lm} = \underline{Y}_{21}(\underline{U}_j - \underline{U}_k) + \underline{Y}_{22}(\underline{U}_l - \underline{U}_m), \quad (140)$$

und daraus entsprechend der Richtung der Zählpfeile in Abb. 34 direkt die einzelnen Beiträge für die Knoten j, k, l, m

$$\text{Beitrag zu Knoten j:} \quad -\underline{I}_{jk} = -\underline{Y}_{11}\underline{U}_j + \underline{Y}_{11}\underline{U}_k - \underline{Y}_{12}\underline{U}_l + \underline{Y}_{12}\underline{U}_m,$$

$$\text{Beitrag zu Knoten k:} \quad \underline{I}_{jk} = \underline{Y}_{11}\underline{U}_j - \underline{Y}_{11}\underline{U}_k + \underline{Y}_{12}\underline{U}_l - \underline{Y}_{12}\underline{U}_m,$$

$$\text{Beitrag zu Knoten l:} \quad -\underline{I}_{lm} = -\underline{Y}_{21}\underline{U}_j + \underline{Y}_{21}\underline{U}_k - \underline{Y}_{22}\underline{U}_l + \underline{Y}_{22}\underline{U}_m.$$

$$\text{Beitrag zu Knoten m:} \quad \underline{I}_{lm} = \underline{Y}_{21}\underline{U}_j - \underline{Y}_{21}\underline{U}_k + \underline{Y}_{22}\underline{U}_l - \underline{Y}_{22}\underline{U}_m.$$

Diese Beiträge sind, wie in Gl. 122 für den Knoten k gezeigt, in den Strombilanz-Gleichung der jeweiligen Knoten der beiden Zweige zusätzlich

zu den Strömen der anderen an diese Knoten angeschlossenen Zweige zu berücksichtigen. Bei der Umformung dieser Gleichung in die Form zur Aufstellung der Knotenadmittanz-Matrix nach Gl. 123 tauchen diese Beiträge mit  $-1$  multipliziert auf der linken Seite der Bilanzgleichung auf (deren Ströme zeigen vom jeweiligen Knoten weg). Die daraus resultierenden Einträge der gekoppelten Zweige in  $\underline{Y}_n$  haben daher die folgende Gestalt

$$\underline{Y}_n \underline{U}_n = \begin{matrix} & j & k & l & m \\ \begin{matrix} j \\ k \\ l \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & -\underline{Y}_{12} & \cdots \\ \cdots & -\underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{12} & \cdots \\ \cdots & \underline{Y}_{21} & -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{22} & \cdots \\ \cdots & -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} & -\underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{22} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vdots \\ \underline{U}_j \\ \underline{U}_k \\ \underline{U}_l \\ \underline{U}_m \\ \vdots \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (141)$$

Die jeweils vier Einträge von  $\underline{Y}_{11}$  und  $\underline{Y}_{22}$  darin können, wie in Abb. 35 gezeigt, so interpretiert werden, als ob in den Zweigen 1 und 2 die Admittanzen  $\underline{Y}_{11}$  und  $\underline{Y}_{22}$  liegen. Für die beiden Vierer-Blöcke der Einträge  $\underline{Y}_{12}$

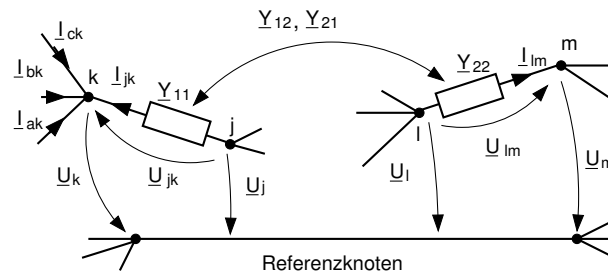


Abb. 35: Übliche und alternative Darstellung zu Abb. 34 für gekoppelte Zweige bzw. Tore in einem Netzwerk.

oberhalb und  $\underline{Y}_{21}$  unterhalb der Hauptdiagonalen gibt es keine ebenso einfache Entsprechung<sup>12</sup>, die man mit einem Element in einem Zweig des Netzwerks berücksichtigen könnte. Man behilft sich daher bei der Darstellung der durch diese Parameter ausgedrückten Verkopplung oft mit den in Abb. 35 dargestellten Pfeilen.

<sup>12</sup>Eine alternative Darstellung ergibt sich unter Zuhilfenahme spannungsgesteuerter Stromquellen, welche die entsprechenden Beiträge in der Strombilanz erzeugen.

## 10 Lösung des Knotenpotenzial-Gleichungssystems und Überlagerungssatz

Wir wollen das Knotenpotenzial-Gleichungssystem aus Gl. 125 hinsichtlich der Knotenpotenziale im Vektor  $\underline{\mathbf{U}}_n$  unter der Maßgabe eines nicht verschwindenden Quellstromvektors ( $\underline{\mathbf{I}}_{qn} \neq [\mathbf{0}]$ ) lösen<sup>13</sup>. Dazu bietet sich generell die formale Lösung durch Inversion von  $\underline{\mathbf{Y}}_n$  an

$$\underline{\mathbf{Y}}_n \underline{\mathbf{U}}_n = \underline{\mathbf{I}}_{qn}, \quad (142)$$

$$\underline{\mathbf{U}}_n = \underline{\mathbf{Y}}_n^{-1} \underline{\mathbf{I}}_{qn}, \quad (143)$$

worin die Inverse von  $\underline{\mathbf{Y}}_n$  und damit die Lösung des Knotengleichungssystems für den Fall existieren, dass  $\text{Det}(\underline{\mathbf{Y}}_n) \neq \mathbf{0}$  also  $\underline{\mathbf{Y}}_n$  eine reguläre Matrix ist, die somit keine linear abhängigen Zeilen oder Spalten besitzt. Für größere Gleichungssysteme ist die Matrix-Inversion eine sehr ineffiziente Form der Berechnung. Insbesondere im numerischen Bereich, bei der Schaltungssimulation werden daher bevorzugt Methoden der Matrix-Faktorisierung eingesetzt.

Unser Augenmerk hier richtet sich im Folgenden darauf, mehr über die allgemeine Struktur der Lösung dieses Gleichungssystems zu erfahren. Daher schrecken wir auch nicht vor der ebenfalls nicht effizienten Determinantenbildung zurück und formulieren das Ergebnis mit Hilfe der *Cramerschen Regel*, zu deren Anwendung wir  $\underline{\mathbf{Y}}_n$  in der Ausgangsgleichung in einzelne Spaltenvektoren unterteilen

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & & \underline{Y}_{1j} & & \underline{Y}_{1n-1} & \underline{Y}_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_j \\ \vdots \\ \underline{U}_n \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \underline{I}_{q1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{I}_{qn} \end{array} \right]. \quad (144)$$

Die in  $\underline{\mathbf{Y}}_n$  dargestellten senkrechten Striche separieren dabei die Spaltenvektoren der Matrix. Entsprechend der Cramerschen Regel ergibt sich eine beliebige Spannung  $U_j$  des zu bestimmenden Spannungsvektors aus dem

<sup>13</sup>Im Fall eines Netzwerks ohne unabhängige Quellen ist  $\underline{\mathbf{I}}_{qn} = [\mathbf{0}]$ . Dann existieren Lösungen wenn  $\underline{\mathbf{Y}}_n$  linear abhängige Zeilen oder Spalten besitzt, was identisch ist mit der Forderung  $\text{Det}(\underline{\mathbf{Y}}_n) = 0$ .



Ausdruck

$$\underline{U}_j = \frac{\text{Det} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & & \underline{I}_{q1} & & \underline{Y}_{1n-1} & \underline{Y}_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \underline{I}_{qn} & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}{\text{Det}(\underline{\mathbf{Y}}_n)}. \quad (145)$$

Darin ist in der, zum gesuchten Knotenpotenzial gehörenden Spalte  $j$ , der Admittanz-Vektor durch den Quellstrom-Vektor ausgetauscht worden. Die Determinante des Zählers lässt sich daher z.B. auch nach den Einträgen dieses Quellstromvektors entwickeln. Dies ist vorteilhaft, da dieser Vektor in der Regel nur wenige, von Null verschiedene Einträge besitzt. Mit der Adjunkten erster Ordnung  $D_{ij} = (-1)^{i+j} \text{Det}(\underline{\mathbf{Y}}_n \setminus -\mathbf{i}, |\mathbf{j}|)^{14}$  lautet diese Entwicklung

$$\underline{U}_j = \frac{\sum_{i=1}^n D_{ij} I_{qi}}{\text{Det}(\underline{\mathbf{Y}}_n)} \quad (146)$$

$$= \underbrace{\frac{D_{1j}}{\text{Det}(\underline{\mathbf{Y}}_n)}}_{\underline{Z}_{j1}} I_{q1} + \underbrace{\frac{D_{2j}}{\text{Det}(\underline{\mathbf{Y}}_n)}}_{\underline{Z}_{j2}} I_{q2} + \dots + \underbrace{\frac{D_{nj}}{\text{Det}(\underline{\mathbf{Y}}_n)}}_{\underline{Z}_{jn}} I_{qn} \quad (147)$$

$$= \underbrace{\underline{Z}_{j1} I_{q1}}_{\underline{U}_{j1}} + \underbrace{\underline{Z}_{j2} I_{q2}}_{\underline{U}_{j2}} + \dots + \underbrace{\underline{Z}_{jn} I_{qn}}_{\underline{U}_{jn}}. \quad (148)$$

Eine Knotenspannung  $\underline{U}_j$  setzt sich demnach zusammen aus der Überlagerung einzelner Teilspannungen  $\underline{U}_{j1}, \underline{U}_{j2} \dots \underline{U}_{jn}$ . Jede darin enthaltene Teilspannung  $\underline{U}_{ji}$  ergibt sich aus der mit einer *Wirkungsfunktion*  $\underline{Z}_{ji}$  skalierten Wirkung eines Quellstroms  $I_{qi}$ . Je kleiner der Betrag einer Wirkungsfunktion ist, umso geringer ist der Beitrag der damit skalierten Ursache zur Wirkung, d.h. der betrachteten Knotenspannung.

Gleichung 148 liefert einen alternativen Ansatz zur Berechnung von Netzwerken mit mehreren Quellen. Bereits ohne genaue Kenntnis des Netzwerks lässt sich für ein Netzwerk mit  $n$  Quellen als erster Schritt formal direkt Gl. 148 hinschreiben. In einem zweiten Schritt können die Wirkungsfunktionen bestimmt werden. Dies kann in Interpretation von Gl. 148 derart geschehen, dass *alle bis auf eine Quelle zu Null gesetzt* werden. Geschieht dies z.B. für die  $i$ -te Quelle so lautet Gl. 148

<sup>14</sup>Diese Kurzschreibweise soll bedeuten: Die Untermatrix von  $\underline{\mathbf{Y}}_n$ , die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte hervorgeht.

$$\underline{U}_j = \underline{U}_{ji} = \underline{Z}_{ji} \underline{I}_{qi} \quad \text{für } \underline{I}_{ql=0}, l = 1 \dots n \setminus i. \quad (149)$$

und daraus umgestellt nach der Wirkungsfunktion

$$\underline{Z}_{ji} = \left. \frac{\underline{U}_j}{\underline{I}_{qi}} \right|_{\underline{I}_{ql=0}, l=1 \dots n \setminus i}. \quad (150)$$

Der Vorteil dieser Berechnung liegt darin, dass in Netzwerken mit mehreren Quellen die Beiträge getrennt voneinander bestimmt und betrachtet werden können, was eine wesentliche Vereinfachung der Berechnung darstellt (vgl. abschließendes Beispiel). Das resultierende Ergebnis ergibt sich aus der Überlagerung (Addition) der einzelnen Beiträge. Daher stammt der Name *Überlagerungssatz* oder *Superpositionsprinzip* dieser Methode. Dies zeigt auch, dass das Überlagerungsprinzip nur bei den hier definierten *linearen* Netzwerken anwendbar ist, da nur in diesem Fall die Wirkungsfunktionen unabhängig von den Amplituden der Ursachen sind und sich bei der Überlagerung nicht ändern.

Wird zusätzlich zu dem Knotenpotenzial in Gl. 148 ein weiteres Knotenpotenzial ermittelt, so kann über die Differenz dieser beiden Potenziale eine Spannung zwischen zwei beliebigen Knoten im Netzwerk bestimmt werden. Über die konstituierende Gleichung des Zweiges zwischen diesen Knoten kann als Ergebnis auch der Strom in diesem Zweig bestimmt werden. Auch bei der Wahl der Quellen sind wir nicht auf die, für das Knotenpotenzial-Verfahren notwendigen, Stromquellen festgelegt, sondern können diese auch mit der uns bekannten Methode in Ersatzspannungsquellen umwandeln. Somit läßt sich der Überlagerungssatz allgemein formulieren:

*Eine Wirkung in Form einer beliebigen Spannung oder eines beliebigen Stroms in einem Netzwerk ergibt sich immer aus der mit der jeweiligen Wirkungsfunktion gewichteten Überlagerung (lineare Superposition) aller unabhängigen Quellen im Netzwerk.*

Damit läßt sich für jedes Netzwerk mit einer Anzahl von  $q$  Quellen direkt die allgemeine Beziehung angeben

$$\underline{W} = \underline{F}_1 \underline{Q}_1 + \underline{F}_2 \underline{Q}_2 + \dots + \underline{F}_q \underline{Q}_q \quad (151)$$

Darin sind  $\underline{Q}_1 \dots \underline{Q}_q$  die unabhängigen Spannungs- und Stromquellen des Netzwerks,  $\underline{F}_1 \dots \underline{F}_q$  die jeweiligen Wirkungsfunktionen und  $\underline{W}$  die Wirkung in Form einer beliebigen Spannung oder eines beliebigen Stroms im Netzwerk. Als einzige Aufgabe bleibt dann noch die Berechnung der einzelnen Wirkungsfunktionen mit der zuvor beschriebenen Methode.

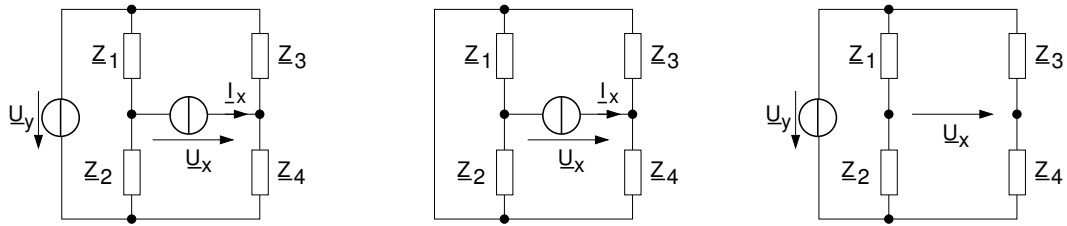


Abb. 36: Für die links dargestellte Schaltung soll die Spannung  $\underline{U}_x$  mittels Überlagerungssatz bestimmt werden. Mitte: Schaltung für den Fall  $\underline{U}_y = 0$ . Rechts: Schaltung für den Fall  $\underline{I}_x = 0$ .

Dazu ein *Beispiel*. Nach Gl. 151 können wir für die gesuchte Spannung  $\underline{U}_x$  in der Schaltung in Abb. 36 links direkt angeben

$$\underline{U}_x = \underline{Z}_x \underline{I}_x + \underline{F}_y \underline{U}_y \quad (152)$$

mit  $\underline{Z}_x$  und  $\underline{F}_x$  als die zu bestimmenden Wirkungsfunktionen. Darin ergibt sich der Beitrag  $\underline{Z}_x \underline{I}_x$  unmittelbar aus Abb. 36, Mitte, im Fall  $\underline{U}_y = 0$

$$\underline{Z}_x \underline{I}_x = \left. \frac{\underline{U}_x}{\underline{I}_x} \right|_{\underline{U}_y=0} \underline{I}_x = -(\underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \parallel \underline{Z}_4) \underline{I}_x. \quad (153)$$

Auch der zweite Beitrag  $\underline{F}_y \underline{U}_y$  lässt sich für  $\underline{I}_x = 0$  direkt aus Abb. 36, rechts, als Spannungsdifferenz der beiden Spannungsteilern aus  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$  und  $\underline{Z}_3, \underline{Z}_4$  ablesen

$$\underline{F}_y \underline{U}_y = \left. \frac{\underline{U}_x}{\underline{U}_y} \right|_{\underline{I}_x=0} \underline{U}_y = \left( \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 - \underline{Z}_4} \right) \underline{U}_y. \quad (154)$$

Damit lautet das gesuchte Ergebnis

$$\underline{U}_x = -(\underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \parallel \underline{Z}_4) \underline{I}_x + \left( \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 - \underline{Z}_4} \right) \underline{U}_y. \quad (155)$$

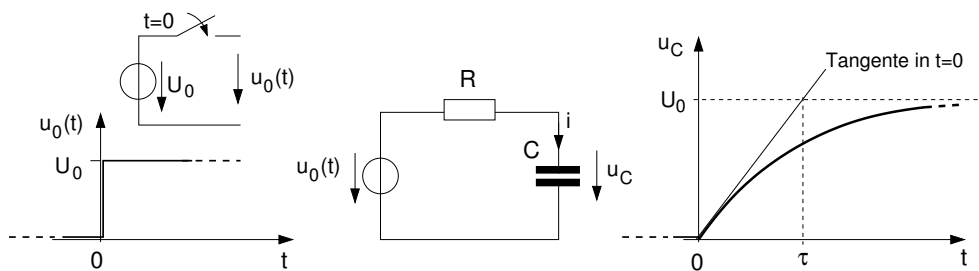


Abb. 37: Einschalt-Vorgang an einem RC-Glied. Links: Definition der Einschalt-Spannung, Mitte: zu berechnende Schaltung, rechts: Verlauf der Spannung am Kondensator.

## 11 Schaltvorgänge in einfachen RC- und RL-Netzwerken

Wir betrachten in Abb. 37 ein einfaches RC-Glied, das durch eine sich zu Zeitpunkt  $t = 0$  vom Wert Null auf den Wert  $U_0$  sprungförmig ändernde Quelle  $u_0(t)$  angesteuert wird. Als Randbedingung soll die Kapazität bis zum Zeitpunkt  $t \leq 0$  noch nicht geladen sein, d.h.  $u_C(t \leq 0) = 0$ . Diese Art der Ansteuerung entspricht einer Gleichspannungsquelle  $U_0$ , die über einen sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  schließenden Schalter an das RC-Glied angelegt wird. Das Netzwerk wird allgemein durch KVL und konstituierende Gleichungen von  $R$  und  $C$  beschrieben, wobei als Variable eine sich stetig ändernde Größe zu wählen ist um die Existenz der Ableitungen in der sich nachfolgend ergebenden Differenzialgleichung zu gewährleisten. In dem vorliegenden Beispiel wird daher die Spannung an der Kapazität gewählt<sup>15</sup>

$$Ri + u_C = u_0(t), \quad (156)$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_0(t), \quad (157)$$

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = u_0(t), \quad (158)$$

worin  $i, u_C$  zeitabhängig sind und die Zeitkonstante  $\tau := RC$  definiert wurde. Dies ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung, deren

<sup>15</sup>Physikalische Begründung für diese Wahl vgl. Kapitel 3.0.5. Mathematische Begründung: mit  $\epsilon > 0$  für ein Zeitintervall  $-\epsilon \leq t \leq \epsilon$ , um eine nicht stetige Stelle (hier Sprung) bei  $t = 0$  ergibt sich aus der konstituierenden Gleichung der Kapazität  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{C} \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} i(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_C(0 + \epsilon) - u_C(0 - \epsilon) \rightarrow 0$ . Der Grenzwert Null, und damit die Stetigkeit von  $u_C(t)$  in  $t = 0$  ergibt sich, da für die linke Seite der Gleichung im Sinne eines Riemann-Integrals gilt  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2\epsilon}{C} i(t) \rightarrow 0$ , für alle auch nicht stetigen Verläufe des Stroms  $i(t)$  im betrachteten Intervall  $-\epsilon \leq t \leq \epsilon$  solange  $i(t)$  endlich bleibt.

allgemeine Lösung sich aus dem homogenen (Anregung auf der rechten Seite gleich Null) und dem partikulären Teil zusammensetzt

$$u_C = u_{c,h} + u_{c,p}. \quad (159)$$

Der homogene Teil lässt sich formal durch die Methode der *Separation der Variablen* lösen

$$\tau \frac{du_{C,h}}{dt} + u_{C,h} = 0, \quad (160)$$

$$\frac{du_{C,h}}{u_{C,h}} = -\frac{1}{\tau} dt, \quad (161)$$

$$\int \frac{du_{C,h}}{u_{C,h}} = -\frac{1}{\tau} \int dt, \quad (162)$$

$$\ln u_{C,h} = \frac{-t}{\tau} + c, \quad (163)$$

$$u_{C,h} = ae^{-t/\tau}. \quad (164)$$

Einfacher ist es gleich den Ansatz nach Gl. 164 zu wählen, der sich immer als Lösung für diesen Typ der Differenzialgleichung ergibt.

Für die partikuläre Lösung eignet sich die Methode des *Ansatz vom Typ der rechten Seite*. Bei einer Betrachtung für  $t > 0$  gilt  $u_0(t > 0) = U_0 = \text{const.}$  und damit

$$u_{C,p} = U_0. \quad (165)$$

Dass dieser Ansatz die Differenzialgleichung identisch erfüllt lässt sich leicht durch Einsetzen in Gl. 158 überprüfen. Der Verlauf der Spannung an der Kapazität nach dem Einschaltvorgang zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist damit

$$u_C = u_{c,h} + u_{c,p} = ae^{-t/\tau} + U_0. \quad (166)$$

Darin ist der konstante Faktor  $a$  noch unbestimmt. Setzt man in dem Ergebnis  $t = 0$  um die eingangs definierte Randbedingung  $u_C(t = 0) = 0$  zu überprüfen ergibt sich unmittelbar  $a = -U_0$  und die fertige Lösung lautet

$$u_c = U_0(1 - e^{t/\tau}). \quad (167)$$

Der Verlauf dieses Einschaltvorgangs ist in Abb. 37 rechts dargestellt. Als Größen zur Charakterisierung dieses Vorgangs werden die Steigung  $du_C/dt = U_0/\tau$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  und der Endwert  $u_C(t \rightarrow \infty) = U_0$  verwendet.

Eine entsprechende Vorgehensweise kann zur Lösung aller Schaltvorgänge in RC- und RL-Netzwerken eingesetzt werden, die durch eine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung beschrieben werden. Auch andere Formen der Anregung sind möglich, indem die partikuläre Lösung entsprechend modifiziert wird.

*Beispiel: Einschalten einer zeitharmonischen Quelle.*

Wir haben in Kapitel 5 den für die Anwendung der Phasoren-Rechnung notwendigen Fall des stationären Betriebs eines elektrischen Netzwerks darüber definiert, dass “...das Netzwerk seit hinreichend langer Zeit in dieser Form angeregt wurde, so dass sich alle Vorgänge im Netzwerk in identischer Form periodisch mit der Frequenz  $f$  wiederholen. Der sogenannte *Einschwingvorgang*, bei dem sich Ströme und Spannungen im Netzwerk von einem Zustand *vor* Anlegen der Anregung in diesen sich gleichförmig wiederholenden Zustand begeben ist auf Null abgeklungen, d.h. er ist nicht mehr in den Strömen und Spannungen enthalten.”

Diesen Sachverhalt können wir im Rahmen dieses Kapitels anhand eines Beispiels betrachten. Dazu schalten wir zum Zeitpunkt  $t = 0$  anstelle des in Abb. 37 links dargestellten Sprungs von  $u_0(t)$  auf eine Gleichspannung  $U_0$  nun eine sinusförmige Quelle ein. Dies läßt sich mathematisch durch die Multiplikation der zuvor verwendeten Sprungfunktion  $u_0(t)$  mit einem sinusförmigen Verlauf beschreiben. Damit ergibt sich anstelle von Gl. 158 eine in der rechten Seite modifizierte Differenzialgleichung

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = u_0(t) \sin \omega t, \quad \forall t, \quad (168)$$

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0 \sin \omega t, \quad t > 0, \quad (169)$$

an deren Lösung wir für  $t > 0$  interessiert sind. Der Ansatz der homogenen Lösung ist aufgrund identischer homogener Differenzialgleichungen identisch mit Gl. 164

$$u_{C,h} = ae^{-t/\tau}. \quad (170)$$

Für die partikuläre Lösung eignet sich wieder der Ansatz vom Typ der rechten Seite, der im Allgemeinen bei Polynomen und zeitharmonischen Funktionen zur Lösung führt

$$u_{C,p} = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (171)$$

Darin sind mit  $A$  und  $\varphi$  Variablen zur Anpassung der Amplitude und Phase

an die Lösung eingeführt worden. Einsetzen in 169 liefert

$$\tau\omega A \cos(\omega t + \varphi) + A \sin(\omega t + \varphi) = U_0 \sin \omega t, \quad (172)$$

$$\Re\{\tau\omega A e^{j(\omega t + \varphi)}\} + \Re\{-jA e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \Re\{-jU_0 e^{j\omega t}\}, \quad (173)$$

$$\Re\{\tau\omega A e^{j(\omega t + \varphi)} - jA e^{j(\omega t + \varphi)} + jU_0 e^{j\omega t}\} = 0, \quad \forall t \quad (174)$$

$$\tau\omega A e^{j\varphi} - jA e^{j\varphi} + jU_0 = 0, \quad (175)$$

$$\Leftrightarrow \text{getrennt für } \Re: \quad \tau\omega A \cos \varphi + A \sin \varphi = 0, \quad (176)$$

$$\text{und } \Im: \quad \tau\omega A \sin \varphi - A \cos \varphi = -U_0, \quad (177)$$

aus den vorangegangenen beiden Gleichungen ergeben sich die beiden zu bestimmenden Parameter des partikulären Ansatzes

$$\varphi = -\arctan(\omega\tau), \quad (178)$$

$$A = \frac{U_0}{(1 + \omega^2\tau^2) \cos \varphi}, \quad (179)$$

$$A = \frac{U_0}{(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})}. \quad (180)$$

Darin wurde für den letzten Schritt Gl. 176 und die Identität  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  verwendet.

Die aus homogener und partikulärer Lösung zusammengesetzte Lösung lautet damit

$$u_C(t) = a e^{-t/\tau} + A \sin(\omega t + \varphi). \quad (181)$$

Für die Randbedingung  $u_C(t = 0^+) = 0$  ergibt sich nach Einsetzen von  $A$  und  $\varphi$  die Forderung

$$u_C(t = 0^+) = a + \frac{U_0}{(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})} \sin \varphi = 0 \quad (182)$$

und daraus durch Umstellen

$$a = -\frac{U_0}{(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})} \sin \varphi. \quad (183)$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$u_C(t) = \frac{U_0}{(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})} (\sin(\omega t + \varphi) - \sin \varphi e^{-t/\tau}). \quad (184)$$

Der zweite Term in der Klammer beschreibt offensichtlich den eingangs zitierten Einschwingvorgang, der nach hinreichend langer Zeit abgeklungen ist,

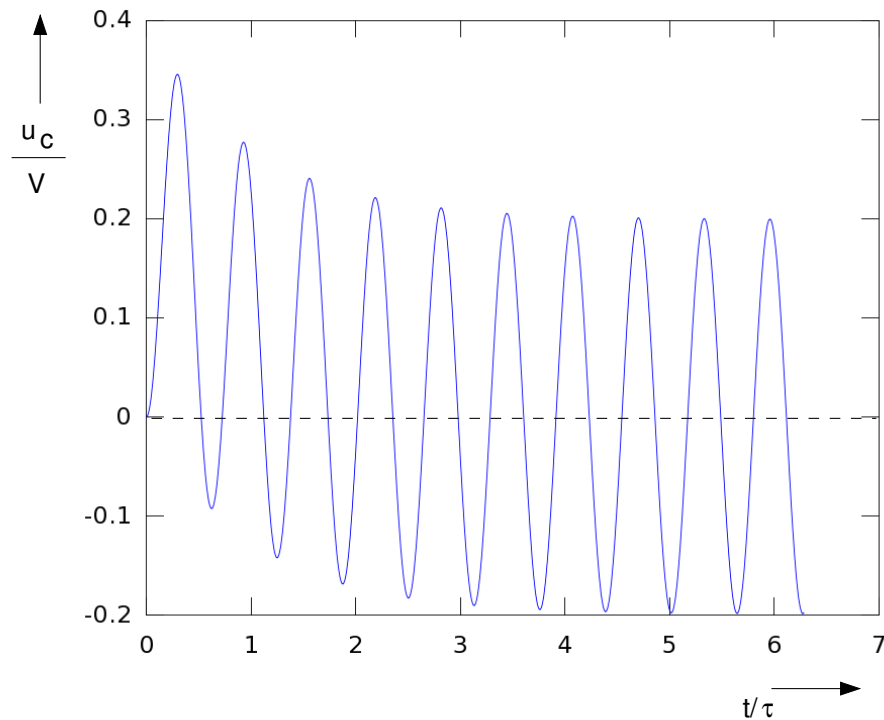


Abb. 38: Verlauf der Spannung  $u_C(t)$  an der Kapazität in Abb. 37 nach Einschalten der Sinus-Quelle zum Zeitpunkt  $t = 0$  für den Fall  $\omega\tau = 10$ .

so dass sich im Grenzfalle  $t \rightarrow \infty$  ein rein zeitharmonischer, sich mit der Frequenz  $\omega$  periodisch wiederholender Vorgang ergibt (*stationärer Zustand*), der auch als *eingeschwungener Zustand* bezeichnet wird

$$u_C(t \rightarrow \infty) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (185)$$

In der realen Anwendung kann ein eingeschwungener Zustand bereits dann als näherungsweise gegeben angenommen werden, wenn das Argument der e-Funktion in Gl. 184 hinreichend klein ist. Die Definition für *hinreichend* trifft der Anwender anhand der gewünschten Genauigkeit der Näherung. Ein Beispiel in Abb. 38 zeigt, dass für die Annahme eines eingeschwungenen Zustandes  $t > 3 \dots 5\tau$  in den meisten Fällen ausreichen wird.

Um die Konsistenz des eingeschwungenen Ergebnisses nach Gl. 185 mit der Phasor-Rechnung zu zeigen, berechnen wir  $u_C(t)$  über Phasor-Rechnung für den Fall sinusförmiger, *stationärer* Anregung, also für

$$u_0(t) = \Re\{\underline{U}_0 e^{j\omega t}\} = \Re\{-jU_0 e^{j\omega t}\}.$$



Für den Phasor von  $u_C(t)$  ergibt sich damit

$$\underline{U}_C = -jU_0 \frac{1}{1 + j\omega RC} = -jU_0 \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad \tau = RC, \quad (186)$$

der zeitabhängig formuliert

$$u_C(t) = \Re\{\underline{U}_C e^{j\omega t}\}, \quad (187)$$

$$= \Re\left\{-jU_0 \frac{1}{1 + j\omega\tau} e^{j\omega t}\right\}, \quad (188)$$

$$= \Re\left\{-jU_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{j(\omega t + \varphi)}\right\}, \quad \varphi = -\arctan(\omega\tau), \quad (189)$$

$$= \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \sin(\omega t + \varphi), \quad (190)$$

lautet. Dieser Ausdruck ist identisch mit Gl. 185 und zeigt somit die Konsistenz der Phasor-Rechnung mit der Berechnung des eingeschwungenen Zustandes über die Lösung der zugehörigen Differenzialgleichung.

## 12 Schaltvorgänge in einfachen RLC-Netzwerken

Zur Berechnung von Schaltvorgängen in einfachen RLC-Netzwerken kann prinzipiell die gleiche Vorgehensweise wie zuvor bei RC- und RL-Netzwerken angewendet werden. Dabei wird direkt der allgemeine Ansatz  $ae^{\lambda t}$  für die zu bestimmende, zweimal stetig zu differenzierende Größe gewählt. Es ergibt sich durch Einsetzen in die Differenzialgleichung eine *charakteristische Gleichung* in Form eines Polynoms zweiter Ordnung deren Lösungen  $(\lambda_1, \lambda_2)$  als Eigenwerte bezeichnet werden. Diese können je nach Dimensionierung des Netzwerks unterschiedlich und reell, identisch und reell oder unterschiedlich und komplex ausfallen. Daraus ergeben sich asymptotische sowie auch harmonisch oszillatorische Ergebnisse, die denen des Feder-Pendels in der Mechanik entsprechen.