

Vorlesungen zur Schaltungstechnik

Elektronische Schaltungen
und
Elektrische Netzwerke

In Bearbeitung, Stand 30.01.2017

M. Möller
Ausdruck vom

1. Juni 2017

1 Grundlagen

1.1 Definitionen zur Schaltungstechnik

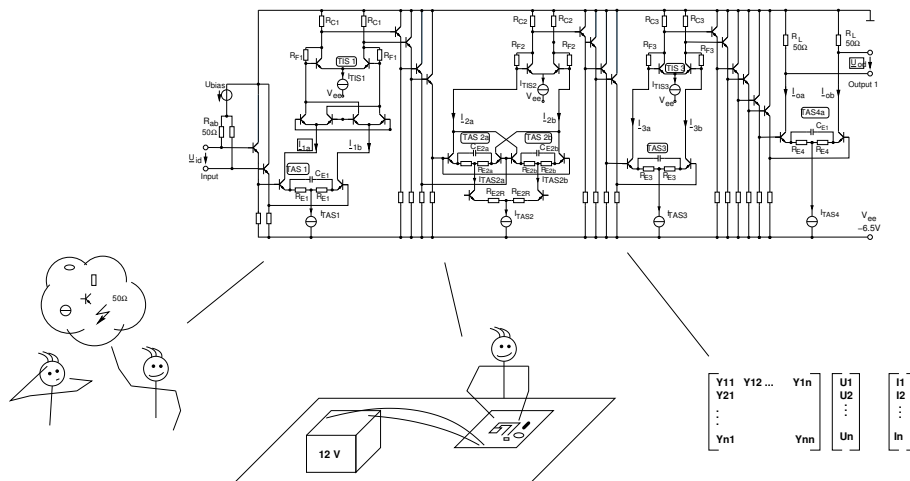


Abb. 1: Drei Anwendungen eines Schaltplans.

Schaltplan: Grafische Darstellung einer elektrischen Schaltung in Form der symbolhaften Darstellung der elektrischen Elemente und ihrer Verschaltung (vgl. Abb.1). In dieser symbolischen Form dient der Schaltplan als Ausdrucksform in der Kommunikation des Schaltungsentwicklers. Darüber hinaus kann er sowohl als Vorlage für eine Realisierung einer Schaltung als auch als grafische Darstellung des jeweils zugrundeliegenden Gleichungssystems verstanden werden. Diese Variante wird auch zur Eingabe ("schematic entry" über GUI) und nachfolgenden Umwandlung in ein Matrix-Gleichungssystem bei der Schaltungssimulation verwendet.

Elektrisches Bauelement: Eine reale oder virtuelle Anordnung mit mindestens zwei punktförmig definierten Anschlüssen, *Anschluss-Knoten*, in die Ströme hinein (heraus) fließen können und zwischen denen im Allgemeinen Spannungen anliegen. Den Zusammenhang zwischen Strömen und Spannungen beschreiben die *konstituierenden Gleichungen*, vgl. Kap. 1.2 des jeweiligen Bauelements. Sonderfall sind ideale Strom- oder Spannungsquellen, bei denen die Quellgröße konstant und die jeweils andere Größe beliebig (vom angeschlossenen Netzwerk bestimmt) ist. Für die grafische Darstellung werden Symbole verwendet, die meist genormt sind, jedoch z.T. unterschiedlichen Normen folgen.

Elektrisches Netzwerk, elektrische Schaltung: Verknüpfung von beliebigen (linear, nichtlinear, zeitabhängig, verteilt, konzentriert ...) elektrischen Bauelementen mittels ideal leitender ($R=0$, $Z=0$) Verbindungen, die aus den miteinander verbundenen Anschlussknoten der Bauelemente bestehen.

Knoten: Punktförmige ideal leitende Verknüpfung von mindestens zwei ideal leitenden Verbindungen. Ein Knoten kann in mehrere Knoten aufgespalten werden, solange die Aufspaltung mit idealen Verbindungen erfolgt. Entsprechend

können über ideale Verbindungen zusammenhängende Knoten zu einzelnen Knoten zusammengefasst werden.

Zweig: In Form eines “gerichteten Striches”, Graphentheorie : *gerichtete Kante* symbolisierte Verbindung zwischen zwei Anschluss-Knoten eines Bauelementes durch die ein Strom fließt und an der eine Spannung abfällt. Strom- und Spannungsrichtung werden per Konvention gleich gerichtet gewählt. Der Wert von Strom und Spannung eines Zweiges wird so gewählt, dass die konstituierenden Gleichungen des jeweiligen Bauelementes erfüllt sind. Bei Bauelementen mit nur zwei Anschlüssen sind Zweigstrom und -spannung identisch mit Spannung und Strom des Bauelementes. Bei Bauelementen mit mehr als zwei Anschlüssen ist der Zweig-Begriff im Allgemeinen abstrakt zu verstehen. Damit ist gemeint, dass zwischen den Anschluss-Knoten beliebige Zweige so definiert werden können, daß die Kirchhoffschen Knoten- und Spannungsregeln (KCL, KVL) an den Anschluss-Knoten des Bauelementes erfüllt werden. In der Regel ist es am einfachsten die Definition so zu wählen, dass sie den gegebenen *konstituierenden Gleichungen* entsprechen. Ein Beispiel dazu zeigt die nachfolgende Abbildung.

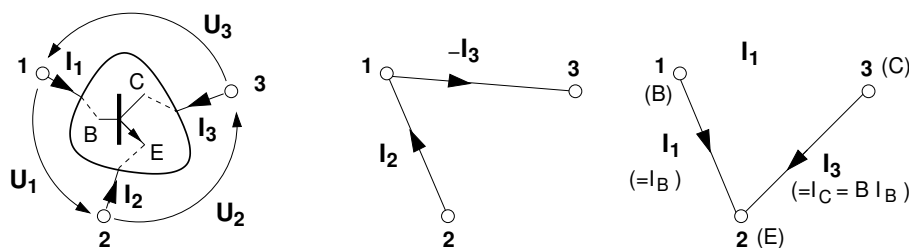


Abb. 2: Links: Dreipol, z.B. Bipolar-Transistor. Mitte und Rechts: Zwei Varianten der Zweigdefinition. Es genügen aufgrund KCL und KVL zwei Zweige, um die jeweils drei möglichen Ströme und Spannungen eindeutig zu definieren. In der rechten Abbildung wurden zur besseren Anschaulichkeit die Zweige entsprechend der Zweige des Transferstrommodells des normal aktiven Bipolartransistors gewählt.

Tor: Zwei Anschlüsse, deren Strom die Torbedingung erfüllt: Der Strom, der in den einen Anschluss hineinfließt, muss aus dem Anderen herausfließen.

Eintor(-Element): Jedes elektrische Netzwerk und damit auch jedes Bauelement mit nur zwei Anschlüssen erfüllt die Torbedingung (Beweis durch Kirchhoffsche Knotenregel, KCL).

Topologie (eines el. Netzwerks): Struktur der Verbindungen eines elektrischen Netzwerks in Form von Zweigen und Knoten, welche die Kirchhoffschen Spannungs- und Stromgleichungen (KVL, KCL) des Netzwerks befolgen.

Graph (gerichtet) eines el. Netzwerks: Darstellung der Topologie des Netzwerks mit Definition der Strom- bzw. Spannungsrichtung an einem Zweig. Zur Identifikation werden Zweige und Knoten in der Regel durchgehend numeriert. Bei einem verbundenen Graphen kann jeder Knoten über eine beliebige Sequenz von Zweigen erreicht werden. Wir vereinbaren an dieser Stelle, im Folgenden ausschließlich Netzwerke mit verbundenen Graphen zu behandeln.

Kirchhoffsche Spannungs(umlauf)-Regel (KVL): Aus Maxwellschen Gl. folgt allgemein die Wegunabhängigkeit des Integrals für die Spannung U_{21} zwischen zwei beliebigen Punkten (Knoten) P1, P2: $\int_{P1}^{P2} \vec{E} d\vec{s} = U_{21}$. Übertragen auf ein elektrisches Netzwerk lässt sich diese Eigenschaft wie folgt definieren:

Für alle in Form eines verbundenen Graphen darstellbare Netzwerke, für alle darin geschlossenen Umläufe über eine beliebige Sequenz von N Knoten gilt zu jedem beliebigen Zeitpunkt t , dass die algebraische Summe aller N Knoten-zu-Knoten Spannungen $u_n(t)$ entlang der geschlossenen Knoten-Sequenz gleich Null ist

$$\sum_{n=1}^N u_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (1)$$

Anmerkung:

- 1) Knoten-zu-Knoten Sequenz erfordert keinen Umlauf über Zweige.
- 2) Bei Umlauf über N Knoten sind $N - 1$ Spannungen unabhängig, d.h. eine Spannung ist abhängig.

Kirchhoffsche Knotenregel (KCL): Aus den Maxwellschen Gleichungen folgt dass der Gesamtfluss aus einer geschlossenen Hülle (in eine geschlossene Hülle) Null ist : $\iint_{F(V)} \vec{J} d\vec{f} = 0$ (Kontinuitätsgleichung). Übertragen auf ein elektrisches Netzwerk lässt sich diese Eigenschaft wie folgt definieren:

Für alle in Form eines verbundenen Graphen darstellbare Netzwerke, für alle darin definierbaren geschlossenen Hüllen¹ gilt zu jedem beliebigen Zeitpunkt t , dass die algebraische Summe aller N Zweigströme $i_n(t)$ in die Hüllfläche hinein (aus der Hüllfläche heraus) gleich Null ist.

$$\sum_{n=1}^N i_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (2)$$

Anmerkung:

- 1) Geschlossene Hülle ist nicht auf Knoten beschränkt. Definition von Überknoten ist möglich.
- 2) Bei N Strömen in eine geschlossene Hülle sind $N - 1$ Ströme unabhängig, d.h. ein Strom ist abhängig.

Gesamtleistung eines Netzwerks: Es lässt sich einfach zeigen (z.B. über Tellegen Theorem), dass die Gesamtleistung in einem abgeschlossenen Netzwerk (Gaußsche Hülle umfasst das gesamte Netzwerk) zu jedem Zeitpunkt gleich Null ist. Für ein Netzwerk mit N Zweigen mit Zweigspannung $u_n(t)$, Zweigstrom $i_n(t)$ und dem Augenblickswert der Zweigleistung $p_n(t)$ in einem Zweig n gilt

$$\sum_{n=1}^N u_n(t) i_n(t) = \sum_{n=1}^N p_n(t) = 0, \quad \forall t. \quad (3)$$

¹genauer: Gaußsche Oberflächen, d.h. zweiseitige (Innen- und Außenseite), überschneidungsfreie, geschlossene Oberflächen.

Anmerkung:

- 1) Spannung und Strom sind in dieser Bilanzgleichung gleich gerichtet definiert.
- 2) Ergeben sich *bei dieser Definition positive Werte* (z.B. bei einem Zweig mit einem Widerstand), so nimmt dieser Zweig eine Leistung auf. Im Fall eines Widerstandes wird diese Leistung in Wärme umgewandelt. Im allgemeinen Sprachgebrauch spricht man dann von *Verlustleistung*.
- 3) Ordnet man die Summe in Gl. 3 so um, dass alle Verlustleistungsterme auf der einen Seite verbleiben und die verbleibenden Terme auf die andere Seite des Gleichheitszeichens verschoben werden, so erhält man eine Leistungsbilanz der Form *abgegebene Leistung (durch Quellen) = aufgenommene Leistung (Verlustleistung)*.
- 4) Die *abgegebene Leistung* hat dabei aufgrund der Verschiebung auf die andere Seite des Gleichheitszeichens ein *negatives Vorzeichen* erhalten. Dieses Vorzeichen kann als Umkehr des Spannungs- oder des Strompfeils interpretiert werden.
- 5) Fazit als Regel: Zweige mit gleichgerichtet definierten Spannungs- und Strompfeilen nehmen Leistung auf, wenn das Produkt $u(t)i(t) > 0$ ist. Für $u(t)i(t) < 0$ gibt ein Zweig Leistung ab.
- 6) Vorsicht bei Zweigen mit einer Quelle. Diese geben zwar meist, wie der Name vermuten lässt, eine Leistung ab, jedoch ist dies nicht immer und schon garnicht per Definition der Fall. Eine (Spannungs- oder Strom)-Quelle kann sowohl Leistung abgeben als auch aufnehmen wie das abschließende Beispiel zeigt.

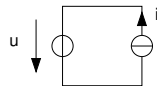


Abb. 3: Ein einfaches Beispiel zur Demonstration, dass Quellen sowohl Leistung aufnehmen als auch abgeben können. Hier hängt die Antwort welche der beiden Quellen Leistung abgibt bzw. aufnimmt davon ab, ob u bzw. i einen positiven oder negativen Wert besitzen. Für den Fall, dass beide Werte positiv sind, gibt die Stromquelle Leistung ab (da $u i < 0$) und die Spannungsquelle nimmt Leistung auf (da $u i > 0$).

1.2 Konstituierende Modell-Gleichungen

Die konstituierenden Gleichungen eines Bauelements geben den Zusammenhang zwischen Spannungen und Strömen an den Anschlüssen/Klemmen eines elektrischen Bauelements an. Genauer gesagt geben sie die Strom/Spannungszusammenhänge an einem Modell, das die zu beschreibende Eigenschaften eines elektrischen Bauelements nachbildet an (vgl. z.B. Transistormodell o.ä.). Dabei kann das Bauelement auch aus einer komplexen Zusammenschaltung mehrerer einzelnen Bauelemente bestehen (z.B. Operationsverstärker oder Mikrocontroller). Im Allgemeinen ist dieser Zusammenhang nichtlinear (nichtlineare Schaltung), kann aber durch Linearisierung in einem bestimmten Betriebspunkt (Ar-

beitspunkt) linearisiert werden. Dadurch ergeben sich einfachere Überlegungen für Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge und einfacher lösbare Gleichungssysteme.

Alle elektrischen Netzwerke und damit auch alle elektronischen Schaltungen werden durch

- den Schaltplan, der die Verknüpfungen der Bauelemente untereinander charakterisiert,
- die Bilanz-Gleichungen KCL, KVL, die getrennt voneinander jeweils nur für Ströme oder nur für Spannungen aufgestellt werden und
- die konstituierenden Gleichungen der Bauelemente, *durch die Spannungen und Ströme in der für jedes Bauelement charakteristischen Art miteinander verknüpft werden*

beschrieben.

Nachfolgend werden mit der Spannungs- und Stromquelle sowie Widerstand (R), Induktivität L , Kapazität C und gekoppelten Induktivitäten M , kurz $RLCM$ die konstituierenden Gleichungen der wichtigsten Bauelemente elektrischer Netzwerke betrachtet.

1.2.1 Spannungsquelle

Eine (ideale) Spannungsquelle besitzt einen spezifischen, eindeutig vorgegebenen Spannungsverlauf $u(t)$ über der Zeit (z.B. $u(t) = \text{const.} = 1V$ (Gleichspannungsquelle) oder $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$, $U_0 = \text{const.}$ (zeitharmonischer Verlauf)). Die Spannung hängt dabei *nicht* von dem Strom durch die Spannungsquelle ab. Der Strom $i(t)$ durch die Spannungsquelle kann *beliebige und damit auch negative* Werte annehmen und ergibt sich ausschließlich über die konstituierende Gleichung des an das Tor der Spannungsquelle angeschlossenen Netzwerks. Zu jedem Zeitpunkt $t = t_0$ gilt daher

$$u(t = t_0) = \text{const.} \quad \forall i(t_0) \quad (4)$$

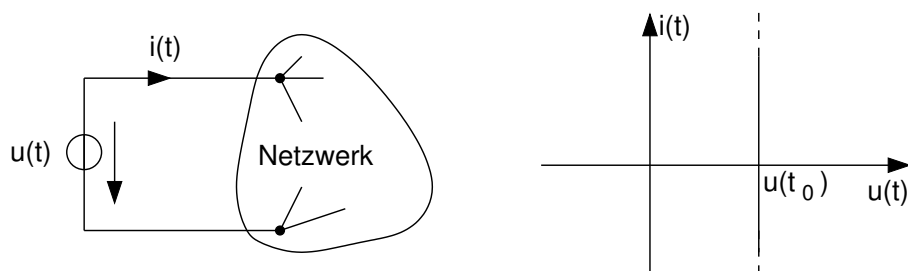


Abb. 4: Links: ideale Spannungsquelle mit beliebigem elektrischen Netzwerk als Last. Der Strom $i(t)$ ergibt sich aus der konstituierenden Gleichung des Netzwerks. Rechts: Kennlinie einer idealen Spannungsquelle mit einem Zeitwert der Spannung $u(t_0)$ bei beliebigen Lastströmen.

Innenwiderstand einer idealen Spannungsquelle: Da wir keine Voraussetzungen an einen Zusammenhang zwischen Innenwiderstand und Quellspannung getroffen haben, ist der Innenwiderstand einer idealen Spannungsquelle allgemein

unabhängig von der Quellspannung. Damit lässt sich der Innenwiderstand am einfachsten bei einem Wert der Quellspannung von Null (d.h. $u(t_0) = 0$) bestimmen. Aus der Kennlinie in Abb. 4 ergibt sich dann ein senkrechter Verlauf entlang der y-Achse, was einem linearen Widerstand mit dem Wert Null entspricht. Das gleiche Ergebnis ergibt sich bei Linearisierung in einem beliebigen (Arbeits)punkt $i = I_0$ entlang der Kennlinie, d.h. $\frac{du}{di} \Big|_{I_0} = 0$. Wird die Quellspannung auf Null gesetzt, repräsentiert die ideale Spannungsquelle einen Kurzschluss, d.h. die Spannung beträgt immer Null, unabhängig vom Strom, der durch die Quelle fließt.

1.2.2 Stromquelle

Hier gelten analog die Aussagen zur Spannungsquelle nur mit Strom und Spannung jeweils vertauscht. Eine (ideale) Stromquelle besitzt einen spezifischen, eindeutig vorgegebenen Stromverlauf $i(t)$ über der Zeit (z.B. $i(t) = \text{const.} = 1A$ (Gleichstrom-Quelle) oder $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$, $I_0 = \text{const.}$ (zeitharmonischer Verlauf)). Der Strom hängt dabei *nicht* von der Spannung über der Stromquelle ab. Die Spannung $u(t)$ über der Stromquelle kann *beliebige und damit auch negative* Werte annehmen und ergibt sich ausschließlich über die konstituierende Gleichung des an das Tor der Stromquelle angeschlossenen gesamten Netzwerks. Zu jedem Zeitpunkt $t = t_0$ gilt daher

$$i(t = t_0) = \text{const.} \quad \forall u(t_0) \quad (5)$$

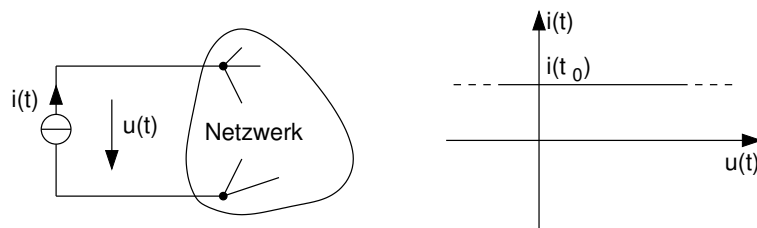


Abb. 5: Links: ideale Spannungsquelle mit beliebigem elektrischen Netzwerk als Last. Der Strom $i(t)$ ergibt sich aus der konstituierenden Gleichung des Netzwerks. Rechts: Kennlinie einer idealen Spannungsquelle mit einem Zeitwert der Spannung $u(t_0)$ bei beliebigen Lastströmen.

Innenwiderstand einer idealen Stromquelle: Entsprechend der Überlegungen zur Spannungsquelle ergibt sich aufgrund des horizontalen Verlaufs der Kennlinie der Stromquelle ein Innenwiderstand von Unendlich. Wird der Quellstrom auf Null gesetzt repräsentiert die ideale Stromquelle einen Leerlauf, d.h. der Strom beträgt immer Null, unabhängig von der an die Quelle angelegten Spannung.

1.2.3 Reale Strom- und Spannungsquelle

Bei einer realen Spannungsquelle führt ein Stromfluss dazu, dass die an den Klemmen zugängliche Spannung sich im Maße des Stromflusses verringert. Oft besteht zwischen Stromfluss und Verringerung der Klemmspannung ein (näherungsweise) linearer Zusammenhang, so dass das in Abb. 6 links gezeigte Modell einer realen Spannungsquelle anwendbar ist.

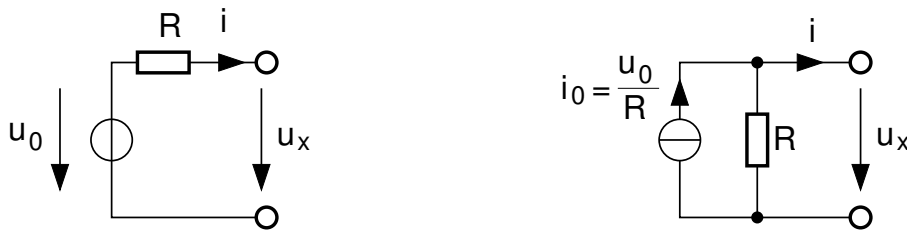


Abb. 6: Links: reale Spannungsquelle. Rechts: (Nur) bezüglich der Klemmgrößen u_x und i äquivalente Darstellung als reale Stromquelle (sog. Norton-Thevenin Äquivalenz-Umwandlung).

Die zu beobachtende Verringerung der Klemmspannung wird darin durch einen linearen Widerstand R in Reihe zu einer idealen Spannungsquelle modelliert. Bezüglich der Klemmgrößen u_x und i kann anstelle des in der Abbildung links gezeigten Modells auch die rechts abgebildete Variante verwendet werden, die sich einfach über Umformung der Netzwerkgleichungen der linken Schaltung ergibt.

$$u_x = u_0 - iR \quad (6)$$

$$i = \frac{1}{R}(u_0 - u_x) \quad (7)$$

$$= \underbrace{\frac{u_0}{R}}_{i_0} - \frac{u_x}{R} \quad (8)$$

Eine einfache Inspektion der rechten Schaltung zeigt, dass diese äquivalent mit der letzten Gleichungszeile ist.

1.2.4 Elektrischer Widerstand

Ein elektrischer Widerstand resultiert aus der für ein Bauelement beabsichtigten oder der unerwünschten endlichen Leitfähigkeit eines Leiters. Wir betrachten im Folgenden nur Leiter mit zwei Anschlüssen, d.h. Widerstände in Form von Eintor-Elementen.

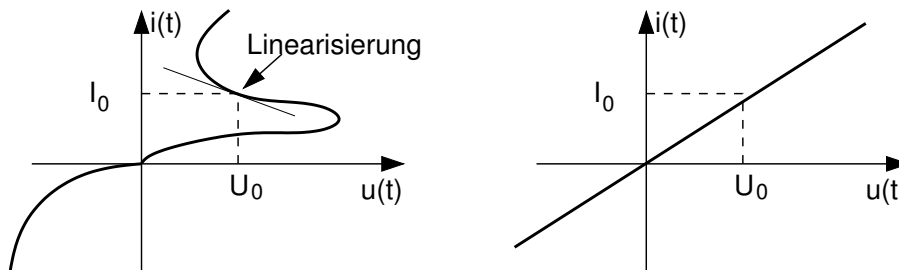


Abb. 7: Links: Kennlinie eines nichtlinearen, stromgesteuerten Widerstands. Als Beispiel für eine Linearisierung in einem Arbeitspunkt wurden U_0, I_0 im Bereich der negativen Steigung gewählt. Rechts: Beispiel für einen linearen Widerstand.

Der Widerstand verknüpft Spannung und Strom in der allgemeinen zeit-unabhängigen Form $u = u(i)$ bei stromgesteuerten bzw. $i = i(u)$ bei span-

nungsgesteuerten Widerständen. Im Falle eines in der Regel für Widerstands-Bauelemente beabsichtigten linearen Zusammenhangs ergibt sich $u = R i$. Bei nichtlinearen Widerständen kann bei hinreichend kleinen Aussteuerungen um einen Arbeitspunkt $i = I_0, u = u(I_0)$ bzw. $u = U_0, i = i(U_0)$ auf der Kennlinie der Kleinsignal-Widerstand über $R = \left| \frac{du}{di} \right|_{U_0, I_0}$ bestimmt werden. Hinweis: bei einer Reihe von Bauelementen existieren Betriebsbereiche, in denen die Kennlinie eine negative Steigung aufweist. Dadurch wird der Kleinsignalwiderstand negativ, was zur Instabilität der Schaltung in diesen Bereichen führen kann.

1.2.5 Kapazität

Die elektrische Kapazität beschreibt das Vermögen einer Leiteranordnung, elektrische Ladung in Abhängigkeit von der angelegten Spannung zu speichern. Dies kann eine erwünschte Eigenschaft bei der Realisierung von Kondensatoren sein. Unerwünschte Kapazität wird oft auch als *parasitäre Kapazität* bezeichnet und tritt grundsätzlich zwischen allen Leitern einer beliebigen Anordnung auf. Wir betrachten im Folgenden nur Kondensator-Bauelemente mit zwei Anschlüssen, d.h. in Form von Eintor-Elementen. Die Definition der Kapazität ergibt sich über die Definition des Stroms in Form der pro Zeit dt fließenden elektrischen Ladung dq

$$i(t) = \frac{dq}{dt}, \quad (9)$$

$$= \underbrace{\frac{dq}{du}}_{C(u)} \frac{du}{dt} \quad \text{mit} \quad C(u) := \frac{dq}{du}, \quad (10)$$

$$= C(u) \frac{du}{dt}. \quad (11)$$

$$(12)$$

Im Falle eines in der Regel bei Kondensator-Bauteilen beabsichtigten linearen Zusammenhangs zwischen Ladung und Spannung ergibt sich eine konstante Kapazität $C = \frac{dq}{du} = \frac{q}{u}$.

Hinweis: für eine mathematische Behandlung stellt die Spannung an der Kapazität eine stetige und damit differenzierbare Größe dar, da sie über die Definitionsgleichung mit der Kapazität direkt proportional zur Ladung ist, die sich als eine physikalischen Größe nur stetig ändern kann.

1.2.6 Induktivität

Die Induktivität beschreibt eine zur Kapazität duale Eigenschaft einer Leiteranordnung. Das bedeutet, dass sich die gleichen Eigenschaften wie bei der Kapazität ergeben, wenn die Rollen von Strom und Spannung vertauscht werden. An die Stelle der elektrischen Ladung tritt der (verkettete) magnetische Fluss. In diesem Sinne lässt sich der Absatz über Kapazität wie folgt umformulieren.

Die Induktivität beschreibt das Vermögen einer Leiteranordnung magnetischen Fluss in Abhängigkeit des durch die Anordnung fließenden Stroms zu speichern. Dies kann eine erwünschte Eigenschaft bei der Realisierung von Induktivitäts-, Spulen- oder Übertrager- oder Transformator-Bauelementen

sein. Unerwünschte Induktivität wird oft auch als *parasitäre Induktivität oder induktive Verkopplung* bezeichnet und tritt grundsätzlich zwischen allen Leitern einer beliebigen Anordnung auf, in denen Ströme fließen können. Wir betrachten im Folgenden nur Induktivitäten als Bauelemente mit zwei Anschlüssen, d.h. in Form von Eintor-Elementen. Die Definition der Induktivität ergibt sich über die Definition der Spannung in Form des pro Zeit dt erzeugten magnetischen Flusses dq .

$$u(t) = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (13)$$

$$= \underbrace{\frac{d\Phi}{di}}_{L(i)} \frac{di}{dt} \quad \text{mit} \quad L(i) := \frac{d\Phi}{di}, \quad (14)$$

$$= L(i) \frac{di}{dt}. \quad (15)$$

$$(16)$$

Im Falle eines in der Regel bei Induktivitäts-Bauteilen beabsichtigten linearen Zusammenhangs zwischen magnetischem Fluss und Strom ergibt sich eine konstante Induktivität $L = \frac{d\Phi}{di} = \frac{\Phi}{i}$.

Hinweis: für eine mathematische Behandlung stellt der Strom durch die Induktivität eine stetige und damit differenzierbare Größe dar, da er über die Definitionsgleichung mit der Induktivität direkt proportional zum magnetischen Fluss ist, der sich als eine physikalische Größe nur stetig ändern kann.

1.2.7 Memristor

Der Memristor war lange Zeit seit seiner formalen Einführung² in 1971 ein theoretisches Artefakt, das sich rein aus der Beobachtung der Symmetrie der Beziehungen zwischen Strom, Spannung, elektrischem und magnetischem Fluss ergab. Daraus postulierte Chua, dass es neben dem Widerstand (Verknüpfung von du/di), der Kapazität (Verknüpfung von dq/du) und der Induktivität (Verknüpfung von $d\Phi/di$) auch ein Element geben müsste, das eine $d\Phi/dq$ Verknüpfung herstellt. Dieses Element nannte er Memristor und den Grad der Verknüpfung (Wirkungsfunktion) wurde mit Memristanz $M := d\Phi/dq$ bezeichnet. Diese sollte nicht mit der in dieser Veranstaltung häufig verwendeten Gegeninduktivität, die ebenfalls allgemein mit M bezeichnet wird, verwechselt werden. Spätestens seit 2007/2008 konnten erstmals auch memristive Bauelemente hergestellt werden, die durchaus Potenzial z.B. als energieeffiziente Informationsspeicher haben könnten. Der Memristor wird wegen der (noch?) geringen Bedeutung als grundlegendes Bauelement in dieser Veranstaltung nicht weiter betrachtet.

1.2.8 Gekoppelte Induktivitäten (Übertrager)

Grundsätzlich koppeln alle stromdurchflossenen Leiter miteinander. Die Ursache dafür ist der magnetische Fluss, der in einem Leiter erzeugt wird und alle geschlossenen Strompfade (Stromkreise) durchdringt. Bei dem Übertrager und

²Leon O. Chua, "Memristor - The missing circuit Element", IEEE Transactions on Circuit theory, no. 5, Sep. 1971

Transformator als elektrische Bauelemente wird diese Eigenschaft gezielt genutzt. Abb. 8 zeigt die grundsätzliche Wirkungsweise anhand zweier verkoppelter Leiterschleifen.

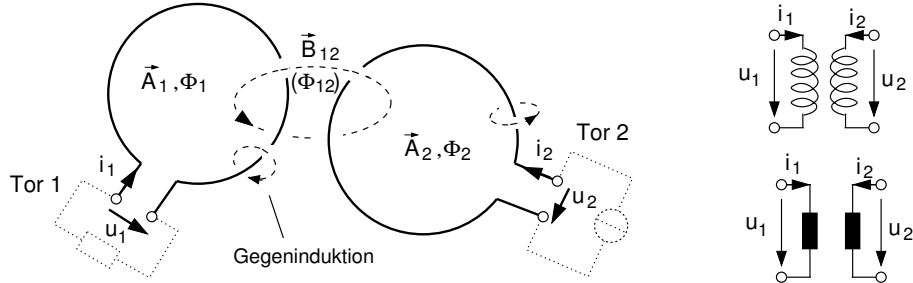


Abb. 8: Links: Zwei durch eine magnetische Flussdichte \vec{B}_{12} gekoppelte geschlossene Leiterschleifen. In diesem Beispiel wird an Tor 2 ein zeitveränderlicher Strom i_2 eingeprägt und die dadurch an Tor 1 induzierte Spannung u_1 betrachtet. Rechts: Zwei Schaltplan-Symbole zur Darstellung von verkoppelten Leiterschleifen, Übertragern oder Transformatoren.

Die darin eingetragenen Spannungs- und Stromrichtungen sind beliebig gewählt worden, jedoch müssen die konstituierenden Gleichungen den Zusammenhang der Richtungen zwischen den beiden Toren durch entsprechende Vorzeichenwahl für die konkrete Anordnung abbilden. Dazu dienen die folgenden Überlegungen.

- Durch den in der Leiterschleife 2 fließenden zeitveränderlichen Strom i_2 wird eine magnetische Flussdichte erzeugt, von der ein Teil \vec{B}_{12} die Fläche \vec{A}_1 der Leiterschleife 1 durchdringt und dort einen Fluss $\Phi_{12} = \int_{\vec{A}_1} \vec{B}_{12} d\vec{A}$ hervorruft.
- Aufgrund des Induktionsgesetzes wird in der ersten Schleife eine Spannung u_1 induziert, die zu einem Strom i_1 führt. Die aus i_1 resultierende Flussdichte ist der verursachenden Flussdichte \vec{B}_{12} entgegen gerichtet (Gegeninduktion, vgl. Abb. 8). Der Stromfluss von i_1 muss dafür entgegen der eingezeichneten Richtung von i_1 sein. Die Richtung von u_1 stimmt mit der eingezeichneten Richtung überein.
- Der magnetische Fluss in Schleife 1

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12} \quad (17)$$

setzt sich zusammen aus dem durch i_1 erzeugten Fluss Φ_{11} und dem Anteil Φ_{12} des von i_2 in Leiterschleife 2 erzeugten Flusses Φ_2 , der auch Leiterschleife 1 durchdringt. Das Vorzeichen von Φ_{12} hängt von der konkreten Anordnung ab und soll im Folgenden für das Beispiel in Abb. 8 bestimmt werden.

- Aus dem Induktionsgesetz folgt mit Gl. 17

$$u_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_{11}}{dt} \pm \frac{d\Phi_{12}}{dt}, \quad (18)$$

$$= L_{11} \frac{di_1}{dt} \pm L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad \text{mit } L_{11} := \frac{d\Phi_{11}}{di_1}, \quad L_{12} := \frac{d\Phi_{12}}{di_2}. \quad (19)$$

- Da wir aus den Vorüberlegungen wissen, dass bei einem Stromfluss in Schleife 2 in Richtung des eingezeichneten Stromes i_2 die Richtung von u_1 mit der eingezeichneten Richtung übereinstimmt gilt das ”+“ Zeichen.
- Analoge Überlegungen gelten bei Einspeisung eines Stromes in Schleife und Betrachtung der induzierten Spannung in Schleife 2. Es ergibt sich

$$u_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{d\Phi_{22}}{dt} \pm \frac{d\Phi_{21}}{dt}, \quad (20)$$

$$= L_{22} \frac{di_2}{dt} \pm L_{21} \frac{di_1}{dt} \quad \text{mit } L_{22} := \frac{d\Phi_{22}}{di_2}, L_{21} := \frac{d\Phi_{21}}{di_1}. \quad (21)$$

Wobei ebenfalls das ”+“ Zeichen gilt.

Anmerkungen:

- L_{11} , L_{22} werden als Eigeninduktivitäten bezeichnet, da sie den Ursache- (eingepprägter Strom) Wirkungs- (induzierte Spannung) Zusammenhang für die selbe Schleife beschreiben. Dagegen werden L_{12} , L_{21} als Gegen- oder Koppelinduktivitäten bezeichnet, da sie den Ursache-Wirkungs-Zusammenhang zwischen den beiden verkoppelten Schleifen beschreiben.
- Man kann einfach z.B. mit dem Satz von Tellegen (Master Vorlesung Hochfrequenztechnik) zeigen, dass der nur aus passiven Elementen (Induktivitäten) bestehende Übertrager ein reziprokes Bauelement ist, für das immer $L_{12} = L_{21}$ mit gleichen Vorzeichen gelten muss.
- Zur Vereinfachung wird wegen der reziproken Eigenschaft oft auch mit der Gegeninduktivität (Mutual Inductance) $M = L_{12} = L_{21}$ gearbeitet.
- Allgemein gelten für die beiden Tore zweier gekoppelter beliebiger Leiter und damit auch für Übertrager oder Transformatoren die konstituierenden Gleichungen

$$u_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}, \quad (22)$$

$$u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}. \quad (23)$$

Diese Gleichungen können leicht generisch auf eine beliebige Anzahl Tore (d.h. von gekoppelten Leitern) erweitert werden. Z.B. gilt für die Spannung an Tor 1 bei N gekoppelten Leitern

$$u_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} \pm L_{12} \frac{di_2}{dt} \pm L_{13} \frac{di_3}{dt} \dots L_{1N} \frac{di_N}{dt}. \quad (24)$$

1.2.9 Nichtlineare Bauelemente

Nichtlineare Bauelemente weisen nichtlineare konstituierende Gleichungen auf. Bei genauer Betrachtung sind reale Bauelemente im Allgemeinen nichtlinear, auch wenn sie im Idealfall als linear betrachtet werden. Ein Beispiel dafür ist eine sich mit Spannung u und Strom i am Bauelement ändernde Verlustleistung $p = ui$. Diese führt zu einer Temperaturänderung im Bauelement, welche

die i.d.R. temperaturabhängigen Bauelemente-Eigenschaften verändert. Daraus resultiert in diesem Beispiel ein nichtlinearer Strom-Spannungszusammenhang. Dies führt z.B. bei einem im Idealfall linearen Widerstand mit der konstituierenden Gleichung $u = iR$, $R = \text{const.}$ zu einem verlustleistungsabhängigen Widerstand $R = R(p) =$ wodurch sich eine nichtlineare konstituierende Gleichung $u = iR(p) = iR(ui)$ ergibt.

Ein einfaches, wegen seiner Nichtlinearität gezielt eingesetztes nichtlineares Bauelement ist die pn-Diode mit der stark nichtlinearen konstituierenden Gleichung $i = I_S(e^{u/U_T} - 1)$. Als komplexeres nichtlineares Bauelement kennen wir z.B. den Bipolar-Transistor. Dessen konstituierenden Gleichungen lassen sich für den idealen Fall z.B. anhand des Transfer-Strom Modells in Abb. 9 mit den zugehörigen konstituierenden Gleichungen der einzelnen Elemente in den Gleichungen (25, 26, 27) angeben.

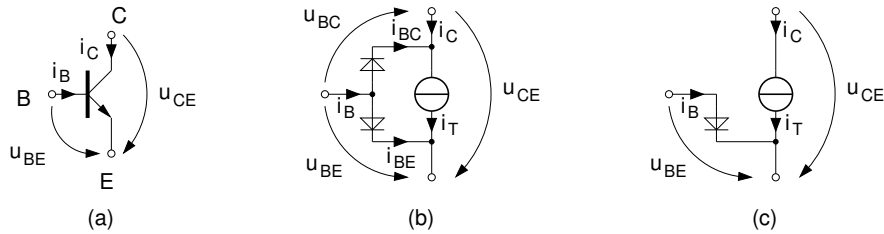


Abb. 9: Symbol und Modell des Bipolar-Transistors. Links, (a), Transistor-Symbol mit Basis- und Kollektorstrom i_B, i_C sowie Basis-Emitter und Kollektor-Emitter-Spannung u_{BE}, u_{CE} . Mitte, (b), Transfer-Strom Modell zur Beschreibung der konstituierenden Gleichungen. Rechts, (c), Vereinfachtes Transfer-Strom Modell für den *Normal-Aktiven Betrieb*.

$$i_{BE} = I_{es} (e^{u_{BE}/U_T} - 1), \quad (25)$$

$$i_{BC} = I_{cs} (e^{u_{BC}/U_T} - 1), \quad (26)$$

$$i_T = i_{CE} - i_{EC}. \quad (27)$$

Mit den Spannungs-Steuerungen

$$i_{CE} = I_s e^{u_{BE}/U_T}, \quad (28)$$

$$i_{EC} = I_s e^{u_{BC}/U_T} \quad (29)$$

oder über Stromsteuerung

$$i_{CE} = B_F i_{BE}, \quad (30)$$

$$i_{EC} = B_R i_{BC}. \quad (31)$$

Darin sind I_{es}, I_{cs}, I_s , die als Sättigungsströme zusammengefassten technologischen und temperaturabhängigen physikalischen Parameter des Transistors, U_T ist die Temperaturspannung, B_F, B_R sind die Vorwärts- und Rückwärts-Stromverstärkung.

Überlegungen mit diesem Modell können bereits recht kompliziert werden. Daher ist es wenn möglich ratsam, das Modell für bestimmte Betriebsbereiche zu vereinfachen. Der häufigste Betriebsfall ist der als *Normal-Aktiver* Betrieb definierten Zustand, bei dem der Strom durch die Kollektor-Basisdiode vernachlässigbar ist ($i_{BC} \ll i_{BE}$). Hier gilt das vereinfachte Modell rechts in Abb. 9

mit $i_C \approx i_T \approx I_s e^{u_{BE}/u_T} = B_F i_{BE} \approx B i_B$. Darin ist $B := \frac{i_C}{i_B}$ die an den Anschlüssen des Transistors definierte (Großsignal)Stromverstärkung.

Genügen die Vorhersagen vereinfachter Modelle nicht oder gilt es, das Verhalten eines komplexeren nichtlinearen Bauelementes mit einem Blick zu erfassen, so ist die Verwendung von Kennlinienfeldern die Methode der Wahl.

In einem Kennlinienfeld sind die konstituierenden Gleichungen eines Bauelementes in einer für die jeweilige Aufgabe geeigneten Form dargestellt. In unserem Beispiel des Bipolar-Transistors eignet sich dazu in der Regel das sogenannte *Ausgangs-Kennlinienfeld*, das in Abb. 10 für i_B bzw. u_{BE} als Steuerparameter³ dargestellt ist. Die einzelnen Kurven können direkt mit den zuvor angegebenen konstituierenden Gleichungen des Transistors erzeugt werden und liefern unmittelbar beim Betrachten einen Eindruck der Abhängigkeiten von Strömen und Spannungen am Transistor, der sich in dieser Form nicht anhand der Gleichungen vermitteln lässt.

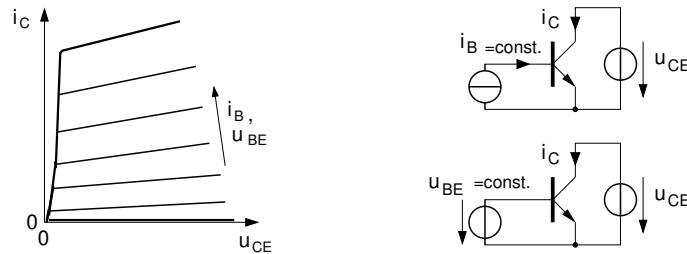


Abb. 10: Ausgangs-Kennlinienfeld des Bipolar-Transistors mit Early Effekt (Steigung der Kennlinien). Links: Ausgangs-Kennlinienfeld wie es z.B. aus den konstituierenden Gleichungen des Bipolar-Transistors berechnet werden kann. Auf jeder einzelnen der in diesem Beispiel gewählten sieben in i_B bzw. u_{BE} parametrisierten Kurven gilt $i_B = \text{const.}$ bzw. $u_{BE} = \text{const.}$ Rechts: Beschaltung des Transistors für die Simulation oder Messung zur Ermittlung des Ausgangs-Kennlinienfeldes.

Wir werden im Folgenden in vielen Fällen zur beispielhaften Analyse und Konstruktion von Schaltungen mit diesem Ausgangs-Kennlinienfeld arbeiten. Ein Beispiel für die Simulation des Ausgangskennlinienfeldes mit LTSPICE ist in Abb. 11 gezeigt.

2 Formale Berechnung linearer elektrischer Netzwerke (Knotenpotenzialverfahren)

Vorüberlegung: Die Quellgröße idealer Quellen ist vorgegeben und *unabhängig* von dem restlichen Netzwerk. Die jeweils andere Größe der Quelle (Strom bzw. Spannung bei Spannungs- bzw. Stromquelle) hängt ausschließlich vom umgebenden Netzwerk ab und kann nicht wie bei allen anderen Bauelementen über die konstituierenden Gleichungen (aus der Quellgröße) ermittelt werden. Um im Sinne einer allgemeinen Behandlung von Netzwerken keine Sonderregelung von Zweigen mit idealen Quellen zu machen, führen wir das Konzept eines *allgemeinen Zweiges* mit begleiteten Spannungs- bzw. Stromquellen ein.

³Tatsächlich unterscheiden sich die Kurvenverläufe eines durch Vorgabe von u_{BE} und durch Vorgabe von i_B erzeugten Kennlinienfeldes. Auf diesen Unterschied soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden da er ohne Belang für die hier verfolgte Argumentation ist.

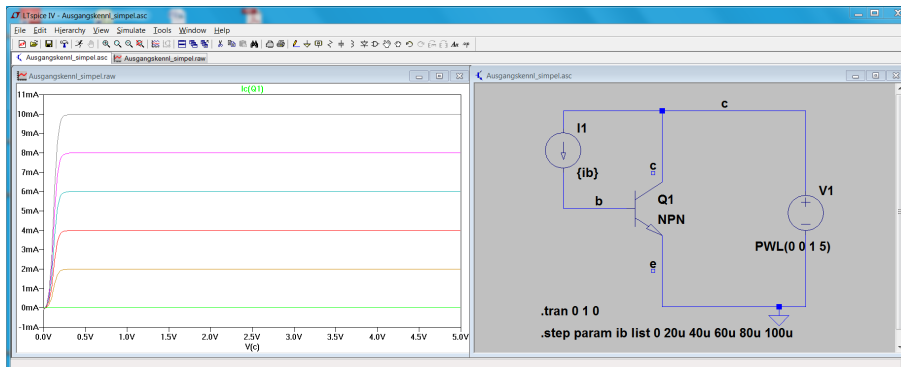


Abb. 11: Screenshot einer Simulation des Ausgangskennlinienfeldes mit LTSPICE.

Begleitete Quelle: Durch äquivalente Netzwerk-Umformung ist es immer möglich, einen Zweig mit einer idealen Strom- bzw. Spannungsquelle so umzuformen (Aufspalten und Verteilen), dass die resultierenden Strom- bzw. Spannungsquellen jeweils parallel bzw. in Reihe zu Eintor-Bauelementen liegen.

Sind alle idealen Quellen in Begleitete Quellen umgeformt, besteht das gesamte Netzwerk aus *allgemeinen Zweigen* wie in Abbildung 12 für einen Zweig j dargestellt.

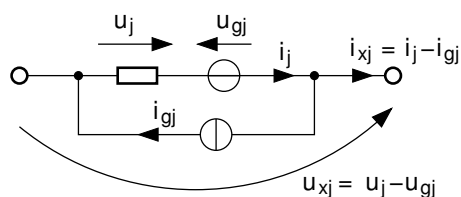


Abb. 12: Allgemeiner Zweig j mit Quellstrom i_{gj} und Quellspannung u_{gj} sowie einem beliebigen Eintorelement.

Obwohl nicht immer notwendig oder vorteilhaft soll zum Vorteil einer übersichtlichen Systematik ein Zweig nur jeweils ein Eintorelement (RLCM) enthalten. Eine Reihen- bzw. Parallelschaltung aus zwei Eintorelementen wird demnach durch zwei Zweige dargestellt.

Das derart dargestellte Netzwerk wird in den folgenden Schritten analysiert und berechnet. Zur Verdeutlichung dient ein einfaches Beispielnetzwerk.

- 1) *Erstellen des gerichteten Graphen des Netzwerks*. Richtungen für Zweigströme und -spannungen sind nach Verbraucherzählpeilsystem gleich gerichtet. Alle Zweige und Knoten werden durchgehend nummeriert.
- 2) *Definieren eines Baumes/Kobaumes*. Verfahren am Beispiel der Anwendung von KCL: Beginne bei einem beliebigen Knoten und wähle einen Zweig, der den abhängigen Strom führen soll (vgl. Anmerkungen zu KCL). Gehe über einen Zweig zum nächsten Knoten und wähle dort einen abhängigen Zweig. Für alle anderen Zweige an diesem Knoten existieren bereits schon zuvor definierte unabhängige und abhängige Ströme oder es werden

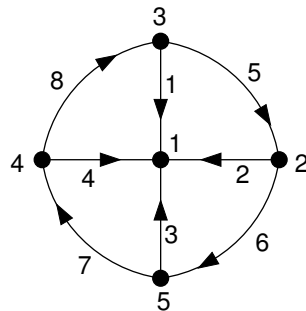


Abb. 13: Gerichteter Graph einer Beispielschaltung mit fünf Knoten und acht Zweigen.

weitere unabhängige Ströme vorgegeben. Setze dieses Verfahren systematisch fort, bis alle Knoten des Graphen besucht wurden. Am Ende sind alle Knoten durch abhängige Zweige miteinander verbunden, da jeder Knoten an mindestens einen abhängigen Zweig angeschlossen ist und sämtliche Knoten des Netzwerks besucht wurden. Geben wir jedem *unabhängigen* Zweig einen Strom mit dem Index der Zweignummer, entsteht z.B. der Graph in der folgenden Abbildung.

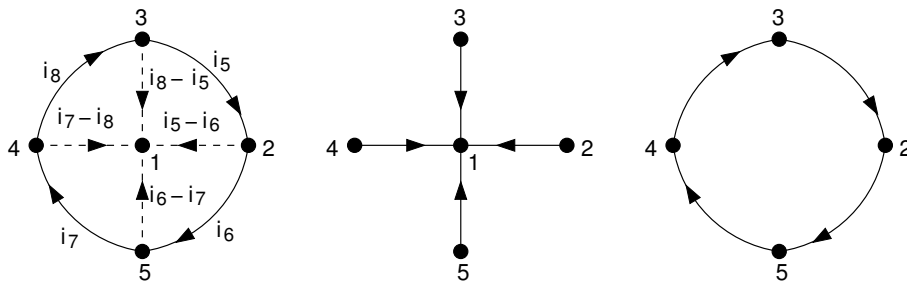


Abb. 14: Links: Definition von Baum und Kobaum durch Wahl von abhängigen Zweigen. Abhängige Zweige sind gestrichelt dargestellt. Mitte: Der resultierende Baum. Rechts: der Kobaum.

Da unabhängige Zweige ihren vorgegebenen Strom (i_5, i_6, i_7, i_8) führen, können sich diese Ströme nur über abhängige Zweige schließen. Warum schließen? Ein Strom, der auf einer Seite aus einem Zweig herausfließt, fließt am anderen Ende des Zweiges in ihn hinein (Beweis durch Kontinuitätssatz bzw. KCL mit Überknoten). Wir nennen den Teil des Graphen, der die abhängigen Zweige enthält Baum, der restliche Teil des Graphen ist der Kobaum. Die Baum/Kobaumzweige heißen in der englischen Literatur *twigs/links*. Hat der Graph $n + 1$ Knoten, so lassen sich diese mit n Baumzweigen miteinander verbinden. Dies lässt sich einfach durch vollständige Induktion beweisen. Anhand des Beweises lässt sich auch sehen, dass der Baum niemals Schleifen haben kann. Auch lässt sich einfach zeigen, dass durch die Zweigspannungen des Baumes alle Spannungen des Kobaumes bereits definiert sind (Beweis durch KVL mit Spannungsumläufen die jeweils nur einen Kobaumzweig als abhängige Spannung enthalten). Sämtliche Ströme des Graphen sind also durch die Kobaumströme definiert und

sämtliche Spannungen durch die Baumspannungen.

3) *Überführen des Netzwerk-Graphen in Matrix Schreibweise*

a) Knoteninzidenzmatrix. Der Graph (das Netzwerk) soll $n + 1$ Knoten und b Zweige enthalten. Gleichung 32 zeigt den allgemeinen Aufbau der Knoteninzidenzmatrix des Netzwerks.

$$\mathbf{A}_a = \begin{array}{c} \text{Knoten} \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{array} \begin{array}{c} \text{Zweige} \rightarrow 1,2,3 \dots b \\ \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & & & a_{1b} \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_{ij} & & \\ & & & & \ddots & \\ a_{n+1\ 1} & & & & & a_{n+1\ b} \end{array} \right] \end{array} \quad (32)$$

mit den Matrixeinträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Zweig } j \text{ liegt an Knoten } i \text{ und ist vom Knoten weg gerichtet,} \\ -1 & \text{Zweig } j \text{ liegt an Knoten } i \text{ und ist zum Knoten gerichtet,} \\ 0 & \text{Zweig } j \text{ liegt nicht an Knoten } i. \end{cases}$$

Für das Beispiel in Abb. 13 ergibt sich

$$\mathbf{A}_a = \begin{array}{c} \text{Knoten} \downarrow \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \text{Zweige} \rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (33)$$

Jede Spalte von \mathbf{A}_a enthält je eine $+1$ und eine -1 . Wenn alle Zeilenvektoren der Matrix addiert werden ergibt dies einen Zeilevektor mit Null-Einträgen. D.h. addiert man nur n Zeilenvektoren, so muss der resultierende Summenvektor das -1 -fache des verbliebenen Zeilenvektors sein. Daraus folgt, dass mindestens eine Zeile linear von den Anderen abhängig ist: $\text{Rang } \mathbf{A}_a \leq (n + 1) - 1 = n$. In der Tat zeigt der folgende Absatz b), dass $\text{Rang } \mathbf{A}_a = n$. Daher genügt es eine Zeile von \mathbf{A}_a zu eliminieren. Sinnvoller Weise wird die Zeile des Knotens eliminiert, der im Folgenden als Bezugsknoten verwendet werden soll. Die daraus resultierende Matrix heißt reduzierte Knoteninzidenzmatrix \mathbf{A} und hat die Dimension $n \times b$.

b) Beweis, dass $\text{Rang } A = n$, d.h., dass für die Lösung des Netzwerk-Gleichungssystems n unabhängige Gleichungen zur Verfügung stehen. Beweisschritte:

i) Wir wählen ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit willkürlich einen Bezugsknoten (im Beispiel Knoten 5) und streichen die entsprechende Zeile in der Matrix \mathbf{A}_a , die dadurch zur reduzierten Knoteninzidenzmatrix \mathbf{A} mit n Zeilen wird.

ii) Wir wählen aus \mathbf{A} die Spalten aus, die zum Baum gehören und fassen diese zu der Untermatrix A_t zusammen. A_t hat bei $n + 1$ Knoten des Baumes genau n Spalten entsprechend n Zweigen, die zum Verbinden der Knoten des Netzwerks notwendig sind. Damit ist \mathbf{A}_t eine quadratische $n \times n$ Matrix. Die restlichen Spalten, die zu den Zweigen des Kobaumes gehören, fassen wir in der Matrix \mathbf{A}_1 zusammen. Damit können wir schreiben.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t \ \mathbf{A}_1]. \quad (34)$$

iii) Der restliche Beweis verwendet nur noch \mathbf{A}_t und zeigt, dass deren Rang gleich n ist. Da der Rang von \mathbf{A} nicht größer als n sein kann ist der Beweis abgeschlossen.

iv) Zur eingängigeren Erläuterung der weiteren Vorgehensweise betrachten wir das Beispiel aus der Matrix in Gl. 33, nachdem die Zeile des Bezugsknoten 5 gestrichen wurde

$$\mathbf{A}_t = \begin{array}{c} \text{Knoten } \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \text{Baum-Zweige } \rightarrow \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (35)$$

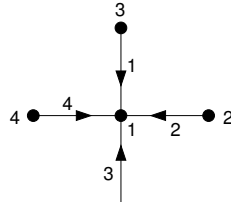


Abb. 15: Baum ohne Bezugsknoten 5 entsprechend den Einträgen in Gl. 35.

v) Da die Zeile des Bezugsknotens beim Übergang $\mathbf{A}_a \rightarrow \mathbf{A}$ gelöscht wurde, haben die an diesen Knoten angeschlossenen Zweige (= Spalten) in \mathbf{A} nur noch einen ± 1 Eintrag. Dieser Eintrag steht in den Zeilen, die zu Knoten gehören, die über Zweige mit dem gelöschten Bezugsknoten verbunden sind. In unserem Beispiel sind das die Zweige 3, 6 und 7, wobei nur Zweig 3, der zu Knoten 1 führt, zur betrachteten Untermatrix \mathbf{A}_t gehört. Daher berechnen wir die Determinante von \mathbf{A}_t über eine Kofaktor Entwicklung in der Spalte von Zweig 3, die sich auf den -1 Eintrag für Knoten 1 reduziert. Wir erhalten allgemein als Ergebnis $(-1)^{n+m} \cdot a_{nm}$ (Unterdeterminante, die durch Streichen der n -ten Zeile und m -ten Spalte dieses einen Eintrags entsteht). Im Beispiel ist dies

$$\det(\mathbf{A}_t) = (-1)^{(1+3)} a_{13} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (36)$$

vi) Bei der Elimination der Zeile des ersten Elementes bei der Kofaktor Entwicklung (im Beispiel Zeile 1) wurde der noch verbliebene Knoten des Zweiges gelöscht, der an dem gelöschten Bezugsknoten lag. Da wir einen verbundenen Graphen betrachten, muss an diesem Knoten mindestens ein weiterer Zweig angeschlossen sein. Wir schreiben zur Vereinfachung im Plural weiter. Durch die Löschung des Knotens fehlt diesen Zweigen wiederum ein Knoten, was sich durch nur jeweils einen ± 1 Eintrag in den entsprechenden Spalten dieser Zweige äußert. Die Entwicklung der Determinante von \mathbf{A}_t verwendet im nächsten Schritt eine Spalte (=Zweig) mit nur einem dieser Einträge. Die Entwicklung der verbliebenen Unterdeterminante reduziert sich wiederum nur auf dieses eine Element, in der Art wie bereits im Schritt zuvor beschrieben. In unserem Beispiel sind durch die Löschung des zentralen Knotens 1 sämtliche Zweige mit nur noch einem Knoten verblieben. Wir wählen zur Kofaktor Entwicklung Zweig 2 und erhalten

$$\det(\mathbf{A}_t) = (-1)(-1)^{(1+2)} a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(1) = 1 \quad (37)$$

vii) Die Kofaktor Entwicklung wird fortgesetzt bis die Determinante vollständig entwickelt ist. Da über den verbundenen Graphen nach jedem Schritt immer mindestens ein Zweig mit nur einem Knoten verbleibt, erhält man bei jedem Entwicklungsschritt einen zusätzlichen ± 1 Faktor. Dadurch nimmt die Determinante von \mathbf{A}_t in allen Fällen den Wert ± 1 ($\neq 0!$) an, wodurch der Rang von A_t und damit der Rang von \mathbf{A} immer gleich n ist, q.e.d.

Fazit: Ein Netzwerk mit einem zusammenhängenden Graphen mit $n + 1$ Knoten (mit einem Baum mit n Zweigen) hat eine Knotenadmittanzmatrix vom Rang n .

- 4) *Strombilanzgleichung (KCL).* In jeder Zeile (Knoten) von \mathbf{A} geben die Einträge a_{ij} an, ob ein Zweig (Spalte) zum Strom in den Knoten beiträgt (+1 wenn vom Knoten weg, -1 wenn zum Knoten hin orientiert) oder keinen Betrag zum Knoten liefert ($a_{ij} = 0$). Daher können wir die Strombilanzgleichung für das gesamte Netzwerk direkt im Sinne des KCL für jeden Knoten i formulieren $\sum_{j=1}^b a_{ij} i_{xj} = 0$ mit b Anzahl der Zweige des Netzwerks, i_{xj} allgemeiner Zweigstrom des Zweiges j vgl. Abb. 12) und $i = 1 \dots n + 1$ (Anzahl der Knoten des Netzwerks). In Matrixschreibweise

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_x = \mathbf{0} \quad \text{mit } \mathbf{i}_x = (i_{x1}, i_{x2} \dots i_{xb})^T. \quad (38)$$

Wir können mit Gl. 34 und dem nach Baum- \mathbf{i}_{xt} und Kobaumströmen \mathbf{i}_{xl} geordneten Zweigstromvektor $\mathbf{i}_x = [\mathbf{i}_{xt} \mathbf{i}_{xl}]^T$ auch schreiben

$$\mathbf{0} = [\mathbf{A}_t \mathbf{A}_l] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{xt} \\ \mathbf{i}_{xl} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_t \mathbf{i}_{xt} + \mathbf{A}_l \mathbf{i}_{xl}, \quad (40)$$

$$\mathbf{i}_{xt} = -\mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{A}_l \mathbf{i}_{xl}, \quad (41)$$

$$\mathbf{i}_x = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{A}_l \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{i}_{xl}, \quad (42)$$

mit $\mathbf{1}$ als Einheitsmatrix. Durch diese Beziehung lassen sich die Baumströme aus den Zweigströmen berechnen. Die Inverse \mathbf{A}_t^{-1} existiert, da wir in dem Beweis zuvor gezeigt haben, dass \mathbf{A}_t eine $n \times n$ Matrix vom Rang n ist.

- 5) *Abspalten von Quellen.* Für jeden Zweig gilt (vgl. Abb. 12) $i_{xj} = i_j - i_{gj}$ wobei i_j der Strom durch das mit konstituierenden Gleichungen beschreibbare Element des Zweiges ist und i_{gj} der Generatorstrom. Damit lässt sich Gl. 38 modifizieren

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_x = \mathbf{0}, \quad (43)$$

$$\mathbf{A} (\mathbf{i} - \mathbf{i}_g) = \mathbf{0}, \quad (44)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{A} \mathbf{i}_g, \quad (45)$$

mit $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_j, \dots, i_b)^T$ und $\mathbf{i}_g = (i_{g1}, \dots, i_{gj}, \dots, i_{gb})^T$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist in der Regel bekannt, da die Quellen bekannt sind.

- 6) *Umrechnen von Zweigspannungen in Knotenpotenziale.* Wir wählen für das Netzwerk ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit einen Referenzknoten, der identisch mit dem Knoten der Zeile ist, die in der allgemeinen Knoteninzenzmatrix \mathbf{A}_a gestrichen wurde. Wir betrachten in Abb. 16 einen beliebigen Zweig j mit der Zweigspannung u_{xj} , die vom Knoten k zum Knoten l gerichtet ist.

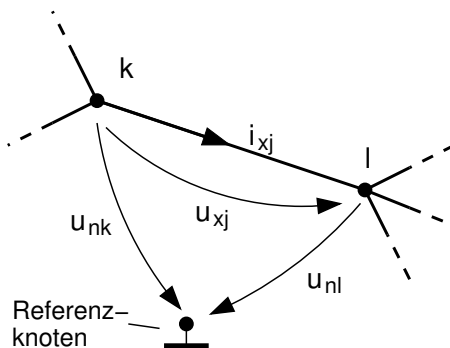


Abb. 16: Zusammenhang zwischen allgemeiner Zweigspannung u_{xj} zwischen Knoten k und l und den zugehörigen Knotenpotenzialen u_k und u_l . Der Referenzknoten wird oft auch mit "0", "Masse" oder GND (ground, engl. f. Masse) bezeichnet.

Wir definieren die Knotenpotenziale u_{nk} , u_{nl} als die Spannungen von den Knoten u , k zu dem Referenzknoten, wodurch sich über einen einfachen Spannungsumlauf

$$u_{xj} = u_{nk} - u_{nl} \quad (46)$$

ergibt. Wir wollen die reduzierte Knoteninzenzmatrix \mathbf{A} verwenden, um diese Zusammenhänge für alle Zweige des Netzwerks systematisch auszudrücken. Betrachten wir \mathbf{A} hinsichtlich der Einträge für den Zweig j

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \text{Knoten } \downarrow \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ l \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \text{Baum-Zweig} \\ \dots \quad j \quad \dots \\ \vdots \\ \dots \quad 1 \quad \dots \\ \vdots \\ \dots \quad -1 \quad \dots \\ \vdots \end{array} \quad (47)$$

Da die Richtung der Zweigspannung u_{xi} mit der Richtung des Zweigstromes i_{xj} übereinstimmt, geben die beiden ± 1 Einträge in der Spalte des entsprechenden Zweiges j das richtige Vorzeichen bei der Addition der beiden Knotenpotenziale nach Gl. 46 an. Alle weiteren Einträge in dieser Spalte sind null, da der Zweig nur an zwei Knoten liegen kann. Multiplizieren wir demnach die Einträge dieser Spalte mit einem Vektor \mathbf{u}_n der Knotenpotenziale, die entsprechend der Knotennumerierung gewählt wurden, erhalten wir die gewünschte Formulierung für die Beziehung zwischen Knotenpotenzialen und Zweigspannungen

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n \quad \text{mit } \mathbf{u}_n = (u_{n1}, u_{n2} \dots u_{nn})^T. \quad (48)$$

- 7) *Formulierung der Netzwerk-Gleichungen im Laplace-Bereich.* Wir betrachten den Zusammenhang von Strom eines linearen (oder linearisierten) RLC-Elements in einem allgemeinen Zweig j und der zugehörigen Spannung über dem Element. Die konstituierenden Gleichungen liefern

$$\begin{aligned}
\text{Leitwert:} \quad i_j(t) &= \frac{1}{R_j} u_j(t) = G_j u_j(t), \\
\text{Kapazität:} \quad i_j(t) &= C_j \frac{du_j(t)}{dt}, \\
\text{Induktivität:} \quad i_j(t) &= \frac{1}{L_j} \int_{-\infty}^t u_j(\tau) d\tau, \\
&= \frac{1}{L_j} \underbrace{\int_{-\infty}^0 u_j(\tau) d\tau}_{i_j(t=0)} + \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau, \\
&= i_j(t=0) + \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau.
\end{aligned} \quad (49)$$

Für die Induktivität lässt sich die Anfangsbedingung $i_j(t=0)$ (oder kurz $i_j(0)$) in Form einer Gleichstromquelle mit dem Wert $I_0 = i_j(0)$ in einem äquivalenten Ersatzschaltbild nach Abb. 17 berücksichtigen.

Die Anfangsbedingung lässt sich demnach in Form des allgemeinen Zweig-Ersatzschaltbildes in Abb. 12 durch Berücksichtigung des Anfangswertes in der Zweigstromquelle i_{gj} berücksichtigen. Für die in diesem Fall vom Anfangswert befreiten Elemente gilt bei der Laplace-Transformation mit den bekannten Regeln ⁴

⁴Vgl. z.B. O. Föllinger, *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*, Hüting Verlag Heidelberg, 9. Auflage, 2007 oder H. Weber, *Laplace-Transformation für Ingenieure der Elektrotechnik*, Teubner Studienskripten, 5. Auflage 1987.

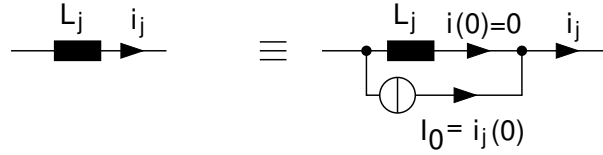


Abb. 17: Äquivalente Berücksichtigung der Anfangsbedingung des Stromes durch eine Induktivität nach Gl. 49 zum Zeitpunkt $t=0$ in Form einer Gleichstromquelle mit dem Anfangswert $i_j(0) = \text{const}$. Die Induktivität ist in diesem Fall ohne Anfangswert, d.h. $i(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
 i_j &= G_j u_j & \circ \bullet & I_j = G_j U_j, \\
 i_j &= C_j \frac{du_j}{dt} & \circ \bullet & I_j = sC_j U_j - C_j u_j(0), \\
 i_j &= i_j(0) + \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau & \circ \bullet & I_j = \frac{i_j(0)}{s} + \frac{1}{sL_j} U_j,
 \end{aligned} \tag{50}$$

mit $\mathfrak{L}\{i_j(t)\} = I_j(s)$, $\mathfrak{L}\{u_j(t)\} = U_j(s)$. Erwähnenswert und gewöhnungsbedürftig ist bei der Arbeit im Bildbereich der Laplace-Transformation, dass die Transformaten von Spannungen und Strömen nicht die gewohnten Einheiten V oder A sondern Vs und As. Dies ist unmittelbar einsichtig, da das Transformationsintegral eine Integration über die Zeit beinhaltet.

Neben dem Anfangswert $i_j(0)$ des Stromes ergibt sich durch die Transformation des Differentialquotienten bei Kapazitäten (zweite Zeile in der Tabelle) aufgrund des Integrationsbeginns bei $t = 0$ ein konstanter Quellterm im Bildbereich⁵. Falls ein Sprung im Verlauf für $t = 0$ vorliegt muß als Anfangswert im Bildbereich der Wert für $t \rightarrow +0$ genommen werden um ein stetigen Verlauf der zu transformierenden Größe zu gewährleisten. Aus gleichem Grund gilt das Ergebnis auch nicht im Fall von Sprüngen im Verlauf für $t > 0$. Die Stetigkeit der hier betrachteten Größen in Form der Spannung an einer (konstanten) Kapazität ist jedoch immer gegeben. Wir haben somit allgemein bei der Behandlung von Netzwerken mit linearen RLC-Elementen im Bildbereich der Laplace-Transformation zwei Quellterme aus Anfangsbedingungen, die sich als Teil der Generatorströme zusammenfassen lassen

$$I_{qj0}(s) = \frac{-i_j(0)}{s} + C_j u_j(0). \tag{51}$$

Die Terme $\{G_j, sC_j, \frac{1}{sL_j}\}$ in Gl. 50 bezeichnen wir als Wirkungsfunktionen, da sie den Zusammenhang zwischen Ursache (hier $U_j(s)$) und Wirkung (hier $I_j(s)$) für jeden Zweig beschreiben. Stellvertretend für die jeweils in einem Zweig j vorhandene Wirkungsfunktion werden wir im Folgenden auch die Admittanz $\underline{Y}_j(s)$ oder deren Kehrwert, die Impedanz $Z_j(s) = \underline{Y}_j(s)^{-1}$ als allgemeine Wirkungsfunktionen verwenden.

⁵Dieses Ergebnis lässt sich einfach durch Partielle Integration des Laplace-Integrals zeigen.

8) *Konstituierende Zweig-Gleichungen.*

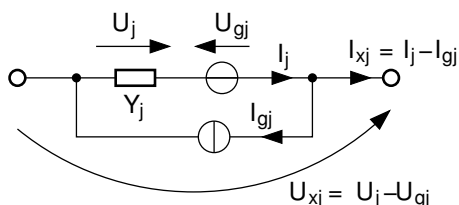


Abb. 18: Allgemeiner Zweig j im Bildbereich der Laplace-Transformation mit Quellstrom $I_{gj}(s)$ und Quellspannung $U_{gj}(s)$ sowie einem beliebigen linearen Eintorelement mit Admittanz $Y_j(s)$. Die Quelle $I_{gj}(s)$ enthält auch die Anfangsbedingungen nach Gl. 51.

Es gilt für ein Netzwerk für jeden Zweig nach Abb. 18 $I_j = Y_j U_j$ oder in Matrix-Form

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{U} \quad \text{mit } \mathbf{I} = \{I_1 I_2 \dots I_b\}^T, \mathbf{U} = \{U_1 U_2 \dots U_b\}^T. \quad (52)$$

Die $(b \times b)$ Admittanzmatrix wird so aufgespaltet, dass sie als Summe dreier $(b \times b)$ RLC Matrizen dargestellt wird

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{s} \mathbf{L} + \mathbf{G} + s\mathbf{C}. \quad (53)$$

Darin steht $\frac{1}{\mathbf{L}}$ für eine Matrix mit $\frac{1}{L_j}$ Einträgen bei den jeweiligen Zweigadmittanzen und nicht etwa für die Inverse der Admittanzmatrix. In der Regel wird durch entsprechende Numerierung der Elemente eines Netzwerks versucht, eine möglichst geordnete Form der Admittanzmatrix zu erhalten. Im Fall eines Netzwerks ohne gesteuerte Quellen und damit auch ohne gekoppelte Elemente (z.B. Gegeninduktivität) erhält man für $\frac{1}{\mathbf{L}}$, \mathbf{G} , und \mathbf{C} (und somit auch für \mathbf{Y}) Diagonalmatrizen.

9) *Algebraische Lösung der Netzwerk-Gleichungen.* Wir lösen die Netzwerkgleichungen im Bildbereich der Laplace-Transformation. Das Gleichungssystem in Gl. 45 transformiert in den Bildbereich und mit Gl. 52 eingesetzt ergibt für die Stöme und Spannungen an den Elementen

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{I}_g, \quad (54)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{I}_g. \quad (55)$$

Für die Zweigspannungen gilt nach Abb. 18 $U_{xj} = U_j - U_{gj}$ und damit in Matrix-Schreibweise $\mathbf{U}_x = \mathbf{U} - \mathbf{U}_g$, womit

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}(\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_g) = \mathbf{A}\mathbf{I}_g, \quad (56)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U}_x = \mathbf{A}\mathbf{I}_g - \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U}_g, \quad (57)$$

$$\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T}_{=: \mathbf{Y}_n} \mathbf{U}_n = \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{I}_g - \mathbf{Y}\mathbf{U}_g)}_{=: \mathbf{I}_{qn}}, \quad (58)$$

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{I}_{qn}. \quad (59)$$

Beim Übergang auf Gl. 89 wurde von der in den Bildbereich transformierten Gl. 48 zur Darstellung von Zweigspannungen durch Knotenpotenziale Gebrauch gemacht. Das Ergebnis in Gl. 59 ist dadurch hinsichtlich der Knotenpotenziale des Netzwerks formuliert. Die definierte Matrix \mathbf{Y}_n wird als Knotenadmittanzmatrix bezeichnet. Der Quellstrom-Vektor der rechten Seite \mathbf{I}_{qn} repräsentiert die Inhomogenität des linearen Gleichungssystems und enthält mit dem Term $\mathbf{Y}\mathbf{U}_g$ die formale Umrechnung von Quellspannungen U_{gj} der Zweige in äquivalente Quellströme.

Wir interessieren uns für die Knotenpotenziale als Lösung des Gleichungssystems, die sich formal ergibt in der Form

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{Y}_n^{-1} \mathbf{I}_{qn}. \quad (60)$$

Lösungen dieses inhomogenen Gleichungssystems existieren falls die Inverse der quadratischen ($n \times n$) Matrix⁶ $\mathbf{Y}_n(\mathbf{s})$ existiert bzw. die äquivalente Forderung $\text{Det}\mathbf{Y}_n \neq 0$ erfüllt ist.

Für den Fall ohne Anregung sind die Quellspannungen und -ströme im Netzwerk gleich Null und es gilt $\mathbf{I}_{qn} = \mathbf{0}$. In diesem Fall ist das homogene Gleichungssystem

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{0} \quad (61)$$

zu lösen. Nichttriviale Lösungen existieren in diesem Fall für $\text{Det}\mathbf{Y}_n = 0$. Dieser Fall tritt z.B. bei der Netzwerkberechnung von Oszillator-Schaltungen auf, die autonom eigene Quellspannungen oder eigene Quellströme erzeugen. Dann sind auch ohne zusätzliche Quellen die Spannungen und Ströme im Netzwerk von Null verschieden.

10) *Aufbau der Knotenadmittanzmatrix.* Die Knotenadmittanzmatrix

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T \quad (62)$$

hat eine herausragende Bedeutung in der Berechnung linearer elektrischer Netzwerke. Ihr wesentlicher Vorteil gegenüber z.B. Formulierungen im Zustandsraum ist, dass sich \mathbf{Y}_n sehr einfach systematisch für beliebig komplexe Netzwerke aufstellen lässt. Aus diesem Grund arbeiten Programme zur Schaltungssimulation (z.B. SPICE oder SPECTRE) auf Basis der Knotenadmittanzmatrix, die direkt aus der vom Anwender eingegebenen Schaltung erstellt wird. Nachfolgend soll die Struktur von \mathbf{Y}_n ermittelt werden.

⁶Zur Erinnerung: das Netzwerk hat $n + 1$ Knoten

Mit dem Ergebnis lässt sich \mathbf{Y}_n direkt durch formale Inspektion des Netzwerks aufstellen. Wir verdeutlichen die Überlegungen anhand des Graphen eines einfachen Netzwerks aus Abb. 13, das nur RLC Zweig-Elemente und keine gesteuerten Quellen besitzen soll. Die Zweigadmittanz-Matrix \mathbf{Y} hat in diesem Fall Diagonal-Gestalt. Als Referenzknoten wählen wir Knoten 5. In der nachfolgenden Rechnung ermitteln wir Gl. 62 in zwei Schritten (Punkte stehen für Null- Einträge)

$$\begin{array}{c}
 \text{Zweig } \downarrow \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
 \end{array}
 \mathbf{A}^T =
 \begin{array}{c}
 \text{Knoten } \rightarrow \\
 \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccc}
 -1 & \cdot & 1 & \cdot \\
 -1 & 1 & \cdot & \cdot \\
 -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 -1 & \cdot & \cdot & 1 \\
 \cdot & -1 & 1 & \cdot \\
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\
 \cdot & \cdot & -1 & 1
 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{Y}\mathbf{A}^T =
 \begin{array}{cccccccc}
 Y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & Y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & Y_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & Y_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_5 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_6 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_7 & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_8
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccc}
 -Y_1 & \cdot & Y_1 & \cdot \\
 -Y_2 & Y_2 & \cdot & \cdot \\
 -Y_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 -Y_4 & \cdot & \cdot & Y_4 \\
 \cdot & -Y_5 & Y_5 & \cdot \\
 \cdot & Y_6 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & -Y_7 \\
 \cdot & \cdot & -Y_8 & Y_8
 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T =
 \begin{array}{cccccccc}
 -1 & -1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\
 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & 1
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccc}
 Y_{11} & -Y_2 & -Y_1 & -Y_4 \\
 -Y_2 & Y_{22} & -Y_5 & \cdot \\
 -Y_1 & -Y_5 & Y_{33} & -Y_8 \\
 -Y_4 & \cdot & -Y_8 & Y_{44}
 \end{array} \right]$$

mit

$$Y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4, \quad Y_{22} = Y_2 + Y_5 + Y_6, \quad Y_{33} = Y_1 + Y_5 + Y_8, \quad Y_{44} = Y_4 + Y_7 + Y_8. \quad (63)$$

Im ersten Schritt $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ bleiben durch die Multiplikation mit der Diagonalmatrix \mathbf{Y} die Orte der Einträge in \mathbf{A}^T erhalten. Es ändert sich jedoch der Wert der Einträge von ± 1 auf $\pm Y_j$, da ein Eintrag ± 1 für einen Zweig j in einer Spalte von \mathbf{A}^T die jeweilige Zweigadmittanz Y_j durch Multiplikation selektiert.

Im zweiten Schritt wird das Ergebnis $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ des ersten Schritts von links mit \mathbf{A} multipliziert. Wie zuvor festgestellt hat $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ dieselbe Struktur hinsichtlich der Orte und Vorzeichen der Einträge wie \mathbf{A}^T . Daher werden bei der Multiplikation der n -ten Zeile von \mathbf{A} mit der n -ten Spalte (=Knoten) von $\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ sämtliche Einträge des Spaltenvektors mit ± 1 selektiert. Dabei werden Admittanzen, die zuvor mit einem bestimmten Vorzeichen multipliziert wurden wieder mit demselben Vorzeichen multipliziert.

Daher ergibt sich in der Hauptdiagonalen eine Admittanz Y_{nn} , die aus der Summe der Einträge der n -ten Spalte von \mathbf{YA}^T besteht. Da diese n -te Spalte die Admittanzen enthält die am n -ten Knoten des Netzwerks liegen, gilt die einfache Regel: *Auf der Hauptdiagonalen der Knotenadmittanzmatrix steht an der Stelle Y_{nn} die Summe aller an einem Knoten n liegenden Zweigadmittanzen unabhängig von der Zweigorientierung mit positiven Vorzeichen.*

Für Elemente der Knotenadmittanzmatrix \mathbf{Y}_n , die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, gilt in ähnlicher Weise ebenfalls die Überlegung der Selektion von Einträgen von Spaltenvektoren von \mathbf{YA}^T durch ± 1 Einträge in \mathbf{A} . Nur der Eintrag (=Zweig) einer Spalte (=Knoten) von \mathbf{YA}^T wird selektiert, für den in \mathbf{A} an der entsprechenden Stelle ein ± 1 Eintrag vorhanden ist. Das ist definitionsgemäß für die Knoteninzidenzmatrix dann der Fall, wenn dieser Zweig auch an dem Knoten (=Zeile) von \mathbf{A} liegt. Das Vorzeichen der Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen ist immer negativ, da die jeweils miteinander multiplizierten Einträge unterschiedliche Vorzeichen aufgrund der Orientierung eines Zweiges zu den beiden an ihm liegenden Knoten. Für Elemente der Knotenadmittanzmatrix von RLC Netzwerken, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen gilt daher die einfache Bestimmungsregel: *Ein Eintrag Y_{ij} außerhalb der Hauptdiagonalen der Knotenadmittanzmatrix besteht aus der Admittanz, welche die Knoten i und j miteinander verbindet. Das Vorzeichen aller Admittanzen außerhalb der Hauptdiagonalen ist immer negativ.*

Es gilt für den Fall einer symmetrischen Admittanzmatrix $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_n &= \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T \\
 &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{Y}^T)^T \\
 &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{Y})^T \\
 &= (\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T)^T \\
 &= \mathbf{Y}_n^T
 \end{aligned} \tag{64}$$

Fazit: *Besitzt ein Netzwerk eine symmetrische Admittanzmatrix \mathbf{Y} , so ist auch die Knotenadmittanzmatrix \mathbf{Y}_n symmetrisch.* Dies ist bei Netzwerken, die wie in unserem Beispiel aus RLC Elementen bestehen und somit ein \mathbf{Y} in Diagonal-Gestalt besitzen, immer der Fall.

Mit diesen beiden Regeln lässt sich die Knotenadmittanzmatrix eines beliebigen RLC Netzwerks rein formal durch Inspektion des in den Knoten nummerierten Netzwerks erstellen. Damit kann das Knotenpotenzialgleichungssystem 59 direkt aufgestellt werden. Der Quellstromvektor der rechten Seite enthält dabei für jeden Knoten die Summe der in diesen Knoten fließenden Ströme mit positivem Vorzeichen (Beweis als Übung).

- 11) *Verallgemeinerung für Netzwerke mit gesteuerten Quellen.* Zuvor wurden Netzwerke mit RLC Elementen betrachtet, die aufgrund der Diagonal-Gestalt der Admittanzmatrix \mathbf{Y} immer zu symmetrischen Knotenadmittanzmatrizen führen. Sind in dem Netzwerk gesteuerte Quellen, so ist dies allgemein nicht mehr der Fall. Wir betrachten den Fall zweier Eintor-Elemente deren Ströme sowohl von der Spannung am eigenen Tor sowie

von der Spannung des anderen Tores abhängen. Es handelt sich in diesem Fall also um spannungsgesteuerte Stromquellen. Wie im Anschluß gezeigt wird, läßt sich dieser Fall einfach auf die drei weiteren möglichen Permutationen von gesteuerten Quellen übertragen. Die Abhängigkeit der Torgrößen läßt sich einfach in Matrix-Form schreiben, wobei wir in diesem Beispiel annehmen, dass die beiden gesteuerten Elemente in den Zweigen 2 und 4 liegen

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{22} & Y_{24} \\ Y_{42} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Diese Gleichung kann als konstituierende Admittanz-Matrix zweier voneinander abhängiger Eintor-Elemente verstanden werden. Die Einträge Y_{ii} auf der Hauptdiagonalen beschreiben darin die die konstituierende Gleichung des jeweiligen Eintor-Elements ohne den Einfluß (ohne Steuerung) des anderen Tors. Die Elemente Y_{ij} beschreiben die zusätzliche Abhängigkeit des Stroms an Tor i durch eine Spannung an Tor j . Ist diese Abhängigkeit symmetrisch, d.h. $Y_{ij} = Y_{ji}$, so spricht man von einem Bauelement. Aufgrund dieser generischen Darstellung ist eine Erweiterung auf eine beliebige Zahl von gesteuerten und steuernden Toren einfach möglich. Diese konstituierende Admittanz-Matrix Gl. 65 kann direkt in die Admittanzmatrix der konstituierenden Zweig-Gleichungen $\mathbf{I} = \mathbf{YU}$ des Gesamt-Netzwerks nach Gl. 52 eingebaut werden, die dann folgende Struktur aufweist

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & Y_{22} & \cdot & Y_{24} & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & Y_3 & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & Y_{42} & \cdot & Y_{44} & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Im Falle eines sogenannten *reziproken* Mehrtor-Elements mit symmetrischer Matrix ($Y_{ij} = Y_{ji}$) bleibt nach den Einbau der Matrix in die Admittanz-Matrix des Gesamt-Netzwerks (Gl. 66) diese weiterhin symmetrisch, und es gilt nach Gl. 64 $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_n^T$. Die Knotenadmittanzmatrix des Gesamt-Netzwerks ist also ebenfalls symmetrisch.

- 12) *Reziproke Netzwerke*. Netzwerke mit einer symmetrischen Knotenadmittanzmatrix nennt man *reziprok*. Insbesondere sind alle Netzwerke, die ausschließlich RLCM Elemente beinhalten reziprok. Das M steht darin für gekoppelte Induktivitäten, die im allgemeinen Sinne auch durch gesteuerte Quellen ausgedrückt werden können. Dazu betrachten wir als allgemeines Beispiel zwei gekoppelte Induktivitäten in den Zweigen 2 und 4. Die zugehörigen konstituierenden Gleichungen aus Gl. 23 lauten im Bildbereich der Laplace-Transformation (in diesem Beispiel $+M$ als Richtung der Kopplung angenommen) in Impedanz-Form

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} L_{22} & M \\ M & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_4 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Für den Einbau in die Admittanz Matrix \mathbf{Y} muß entsprechend Gl. 65 die Inverse dieser konstituierenden Gleichung gebildet werden

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{s(L_{22}L_{44}-M^2)} \begin{bmatrix} L_{44} & -M \\ -M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \ell_{22} & m \\ m & \ell_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (68)$$

die ebenfalls wieder symmetrisch ist und damit zu der symmetrischen Knotenadmittanzmatrix eines reziproken Netzwerks führt.

3 Spezielle Herleitung des Knotenpotenzialverfahrens

Die Herleitung des Knotenpotenzialverfahrens im vorangegangenen Kapitel war allgemein gehalten und bietet dadurch eine Basis für vielfältige Anknüpfungspunkte zu weiterführenden netzwerktheoretischen Betrachtungen oder algorithmischen Verfahren. Setzt man einige dort ermittelte Erkenntnisse voraus (z.B. die Existenz einer eindeutigen Lösung, das Konzept eines Referenzknotens, einer Impedanz/Admittanz oder einer Ersatzstromquelle), dann lässt sich das Knotenpotenzialverfahren als Lösung linearer zeitinvarianter Netzwerkgleichungen alternativ in sehr kompakter Form herleiten. Auch das Berücksichtigen von gesteuerten Quellen ist darin sehr einfach möglich.

Wir betrachten dazu einen Ausschnitt aus einem beliebigen Netzwerk in Abb. 19.

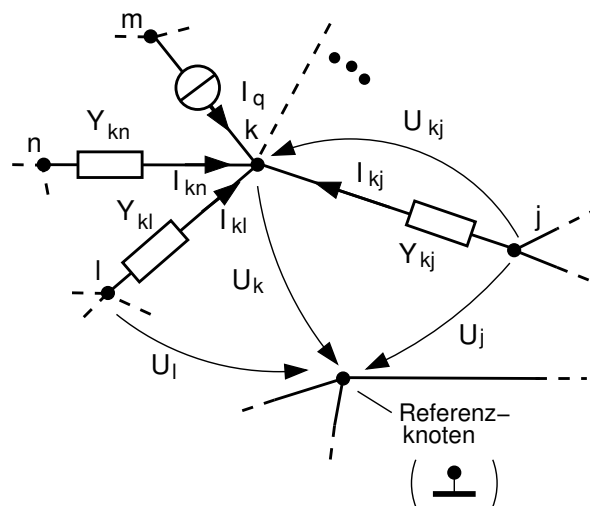


Abb. 19: Ausschnitt aus einem beliebigen Netzwerk mit einer beliebigen Wahl eines Referenzknotens.

In unserer Betrachtung enthält jeder Zweig des Netzwerks entweder eine Admittanz oder eine ideale Stromquelle. Man kann zeigen, dass sich jedes lineare Netzwerk unter Zuhilfenahme äquivalenter Umformungen (z.B. Norton-Thevenin-Äquivalenzumwandlung, Abb. 6) in dieser Form darstellen lässt.

Wir bilden die Strombilanz (KCL) für den Knoten k

$$0 = I_{kj} + I_{kl} + I_{kn} + I_q + \dots \quad (69)$$

$$= (U_j - U_k)Y_{kj} + (U_l - U_k)Y_{kl} + (U_n - U_k)Y_{kn} + I_q + \dots \quad (70)$$

Die Punkte in der Gleichung stehen für weitere Zweige mit Admittanzen oder Stromquellen, die gegebenenfalls an Knoten k angeschlossen sind. Sortieren der Terme der Gleichung führt auf

$$\underbrace{(Y_{kj} + Y_{kl} + Y_{kn} + \dots)}_{\text{Summe aller Admittanzen am Knoten } k} U_k - \underbrace{(Y_{kj}U_j - Y_{kl}U_l - Y_{kn}U_n - \dots)}_{\text{Koppeladmittanzen mit Potenzial des koppelnden Knotens}} = \underbrace{I_q + \dots}_{\text{Summe der Quellströme in Knoten } k} \quad (71)$$

Formuliert man diese Gleichung für sämtliche n unabhängigen Knoten des Netzwerks (Referenzknoten $n+1$ ausgenommen), so ergeben sich n Gleichungen, die sich in Form des Gleichungssystems nach Gl. 59 mit \mathbf{Y}_n in der Struktur nach Gl. 63 darstellen lassen.

4 Lineare Netzwerke mit stationärer zeitharmonischer Anregung

Ist ein elektrisches Netzwerk linear, besitzen sämtliche darin betrachteten Elemente konstituierende Gleichungen mit einem linearen Strom-Spannungszusammenhang. In diesem Fall werden bei einer monofrequenten Anregung mit einer Frequenz⁷ ω sämtliche Spannungen und Ströme des Netzwerks diese Frequenz besitzen und sich untereinander nur in Amplitude und Phase unterscheiden.

Zur Verdeutlichung machen wir einen entsprechenden Ansatz für die konstituierende Gleichung eines linearen Leitwerts (G_j in einem Zweig j) im *Zeitbereich* bei Anregung mit einer beliebigen Frequenz ω . Der zeitharmonische Strom durch den Leitwert wird allgemein mit $i_j = I_j \cos(\omega t + \varphi_{I_j})$ und die Spannung an dem Leitwert mit $u_j = U_j \cos(\omega t + \varphi_{U_j})$ beschrieben. Es gilt dann die für die konstituierende Gleichung

$$i_j = G_j u_j, \quad (72)$$

$$I_j \cos(\omega t + \varphi_{I_j}) = G_j U_j \cos(\omega t + \varphi_{U_j}), \quad (73)$$

$$\Re\{\underline{I}_j e^{j\omega t}\} = G_j \Re\{\underline{U}_j e^{j\omega t}\} \quad (74)$$

$$\Re\{\underline{I}_j e^{j\omega t}\} = \Re\{G_j \underline{U}_j e^{j\omega t}\} \quad (75)$$

$$\underline{I}_j = G_j \underline{U}_j. \quad (76)$$

die darin definierten Größen

$$\underline{I}_j = I_j e^{j\varphi_{I_j}} \quad \text{und} \quad \underline{U}_j = U_j e^{j\varphi_{U_j}} \quad (77)$$

⁷Genauer müsste bei ω von der Kreisfrequenz in Unterscheidung zur Frequenz f gesprochen werden. Dies wird zur Vereinfachung der Lesbarkeit im Folgenden nicht getan und soll daher fortan als implizit vereinbart gelten.

enthalten *keine* Zeitabhängigkeit und sind im Allgemeinen *komplexe Funktionen in $j\omega$* . Derartige Funktionen werden komplexe Wechselstromzeiger oder kurz *Phasoren* genannt. Sie beinhalten die Amplituden- und Phaseninformation der jeweiligen Größe. Das Ergebnis in Gl. 76 lässt sich aus der vorangegangenen Zeile nach folgender allgemeiner Überlegung erhalten. Darin seien \underline{X} und \underline{Y} zwei beliebige Phasoren in einer Zeitbereichs-Darstellung für die eine für alle Zeiten t gültige Lösung gesucht ist

$$\Re\{\underline{X} e^{j\omega t}\} = \Re\{\underline{Y} e^{j\omega t}\} \quad \forall t, \quad (78)$$

$$\Re\{(\underline{X} - \underline{Y}) e^{j\omega t}\} = 0 \quad \forall t, \quad (79)$$

$$\Rightarrow \underline{X} = \underline{Y}. \quad (80)$$

Zwar lässt sich zu einem beliebigen $\underline{X} - \underline{Y}$ immer eine bestimmte Zeit t finden zu der der Realteil des Produktes in der geschweiften Klammer von Gl. 79 zu Null wird, jedoch gibt es nur die nichttriviale Lösung $\underline{X} = \underline{Y}$, die allgemein für alle t gilt.

Analog zur Phasor-Darstellung der konstituierenden Gleichung eines Leitwertes lassen sich die Phasor Darstellungen für Induktivitäten und Kapazitäten herleiten. In Analogie zur Bildbereichsdarstellung der Laplace-Transformation in Gl. 50 können damit die Phasor Darstellungen

$$\begin{aligned} i_j &= G_j u_j && \Leftrightarrow \underline{I}_j = G_j \underline{U}_j, \\ i_j &= C_j \frac{du_j}{dt} && \Leftrightarrow \underline{I}_j = j\omega C_j \underline{U}_j \\ i_j &= \frac{1}{L_j} \int_0^t u_j(\tau) d\tau && \Leftrightarrow \underline{I}_j = \frac{1}{j\omega L_j} \underline{U}_j, \end{aligned} \quad (81)$$

für den *Zeitbereich* der konstituierenden Gleichungen angegeben werden. Wie bei der Laplace-Transformation beschreiben wir diese Wirkungsfunktionen⁸ $\{G_j, j\omega C_j, \frac{1}{j\omega L_j}\}$ allgemein mit dem Begriff der komplexen Admittanz $\underline{Y}_j(j\omega)$ oder kurz nur \underline{Y}_j oder wir verwenden deren Kehrwert die Impedanz $\underline{Z}_j = \underline{Y}_j^{-1}$.

Mit Hilfe der vorangegangenen Überlegungen kann die anhand der Laplace-Transformierten gezeigte Herleitung der algebraischen Lösung der Netzwerkgleichungen (vgl. Seiten ab S.23) einfach auf den Sonderfall der stationären zeit-harmonischer Anregung mit Hilfe von Phasoren übertragen werden. Beginnend bei Gl. 54, die durch Laplace-Transformation aus Gl. 45 hervorging, verläuft auch die Rechnung in Phasorschreibweise, wobei mehrfach von der Identität aus Gl.78 bis 80 Gebrauch gemacht wird

⁸Der Index j steht für einen beliebigen Zweig j , in dem sich das jeweilige Element befinden soll.

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{A}\mathbf{i}_g \quad (82)$$

$$\mathbf{A}\Re\{\underline{\mathbf{I}}e^{j\omega t}\} = \mathbf{A}\Re\{\underline{\mathbf{I}}_g e^{j\omega t}\}, \quad (83)$$

$$\Re\{\mathbf{A}\underline{\mathbf{I}}e^{j\omega t}\} = \Re\{\mathbf{A}\underline{\mathbf{I}}_g e^{j\omega t}\}, \quad (84)$$

$$\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{I}}_g, \quad (85)$$

$$\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{I}}_g \quad (86)$$

$$\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{Y}}(\underline{\mathbf{U}}_x + \underline{\mathbf{U}}_g) = \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{I}}_g, \quad (87)$$

$$\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{U}}_x = \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{I}}_g - \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{U}}_g, \quad (88)$$

$$\underbrace{\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{A}}^T}_{=:\underline{\mathbf{Y}}_n} \underline{\mathbf{U}}_n = \underbrace{\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{I}}_g - \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{U}}_g)}_{=:\underline{\mathbf{I}}_{qn}}, \quad (89)$$

$$\underline{\mathbf{Y}}_n \underline{\mathbf{U}}_n = \underline{\mathbf{I}}_{qn}. \quad (90)$$

Anhand der Herleitungen ist zu sehen, dass die gesamten Gleichungen zur Netzwerkberechnung in Phasor Darstellung und im Bildbereich der Laplacetransformation eine identische Gestalt haben. Die jeweiligen Gleichungen können einfach durch die Substitution $s \leftrightarrow j\omega$ ineinander überführt werden, wovon wir im Folgenden bei Bedarf Gebrauch machen werden. Beachten Sie dazu die folgenden Anmerkungen.

- Gemäß der Herleitung der Phasor Darstellung (vgl. Gl. 76) handelt es sich dabei nicht um eine Integraltransformation wie z.B. bei der Laplace- oder Fouriertransformation. Formal haben wir den Zeitbereich trotz einer dem Bildbereich der Laplacetransformation sehr ähnlichen Formulierung in Gl. 81 nicht verlassen.
- Da wir mit Hilfe der Phasor Darstellung den stationären Fall eines eingeschwingenen Netzwerks betrachten, sind auch keine Anfangswerte zu berücksichtigen. Die Strom- bzw. Spannungswerte sind zu allen Zeitpunkten durch ihren zeitharmonischen Verlauf bestimmt.
- Wegen der Ähnlichkeit zu den Darstellungen der Laplace-Transformation findet sich oft die bereits oben verwendete Formulierung, dass die Phasor Darstellung aus dem Bildbereich der Laplace-Transformation durch die Substitution $s \rightarrow j\omega$ hervorgeht. Dies ist tatsächlich für alle Wirkungsfunktionen eines Netzwerks möglich, da diese ausschließlich aus algebraischen Kombinationen der konstituierenden Bauteilgleichungen bestehen⁹). Die Wirkungsfunktion eines Netzwerks enthält daher keine Information über die Ansteuerung und gilt somit allgemein. Wird hingegen die Zeitfunktion einer Wirkung betrachtet, beinhaltet deren Verlauf auch die konkrete Anregung. Dann ist eine Substitution $s \rightarrow j\omega$ im Allgemeinen nicht möglich, insbesondere weil im Falle der Laplace Transformierten der Einschwingvorgang mit enthalten ist.
- Die zuvor geschilderte Interpretation läßt sich auch formal durch Anwendung der Laplace-Transformation gewinnen. Dazu betrachten wir eine all-

⁹Vergleiche hierzu auch den Aufbau einer Wirkungsfunktion durch Anwendung der Cramerschen Regel in Kapitel 5

gemeine zeitharmonischen Spannung, deren Amplitude U frequenzabhängig sein kann

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u), \quad (91)$$

$$= \Re\{U e^{j(\omega t + \varphi_u)}\}, \quad (92)$$

$$= \Re\{U e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}\}, \quad (93)$$

$$= \Re\{\underline{U} e^{j\omega t}\} \text{ mit } \underline{U} = U e^{j\varphi_u}. \quad (94)$$

Wir legen diese Anregung zum Zeitpunkt $t = 0$ an ein Netzwerk mit der reellwertige Impulsantwort $y(t)$ und betrachten dessen Verhalten im eingeschwungenen, stationären Zustand für $t \rightarrow \infty$.

Dann gilt sofern die Impulsantwort für $t \rightarrow \infty$ auf Null abgeklungen ist, bzw. für $\int_0^\infty |y(t)| dt < \infty$

$$i(t) = y(t) * u(t), \quad (95)$$

$$= \int_0^t y(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad (96)$$

$$= \Re\{\underline{U} e^{j\omega t} \int_0^t y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau\}, \quad (97)$$

$$= \Re\{\underline{U} e^{j\omega t} \int_0^\infty y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau - \int_t^\infty y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau\}. \quad (98)$$

Im eingeschwungenen Zustand, für $t \rightarrow \infty$, verschwindet das rechte Integral falls die Impulsantwort entsprechend der Forderung auf Null abklingt und es ergibt sich die eingeschwungene stationäre Lösung der Phasorrechnung

$$i(t) = \Re\{\underline{U} e^{j\omega t} \int_0^\infty y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau\}, \quad (99)$$

$$= \Re\{\underline{U} e^{j\omega t} \left(\int_0^\infty y(t) e^{-st} dt \right)_{\sigma=0}\}, \quad (100)$$

$$= \Re\{\underline{U} e^{j\omega t} Y(s)_{\sigma=0}\}, \quad (101)$$

$$= \Re\{\underline{U} e^{j\omega t} Y(s \rightarrow j\omega)\}, \quad (102)$$

$$= \Re\{\underline{U} \underline{Y} e^{j\omega t}\}. \quad (103)$$

5 Lösung des Knotenpotenzial-Gleichungssystems und Überlagerungssatz

Wir wollen das Knotenpotenzial-Gleichungssystem aus Gl. 59

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{I}_{qn}$$

hinsichtlich der Knotenpotenziale in \mathbf{U}_n lösen. Die gleiche Lösung ergibt sich entsprechend den Darstellungen im vorangegangenen Kapitel für das Gleichungssystem nach Gl. 90 im Fall zeitharmonischer Anregung. Wir bleiben der Einfachheit wegen bei der Darstellung in der komplexen Frequenz s , d.h. im Bildbereich der Laplacetransformation. In ausgeschiebener Form stellt sich

diese Gleichung dar als

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} Y_{11} & Y_{12} & & Y_{1j} & & Y_{1n-1} & Y_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{qn} \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Die in \mathbf{Y}_n dargestellten senkrechten Striche separieren dabei die Spaltenvektoren der Matrix.

Wir lösen dieses Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel, da uns die daraus resultierende Darstellung des Ergebnisses einen bestimmten Einblick in die allgemeine Struktur der Lösungen dieses Systems gibt. Danach ergibt sich eine beliebige Spannung U_j des Lösungsvektors aus

$$U_j = \frac{\text{Det} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} Y_{11} & Y_{12} & & I_{q1} & & Y_{1n-1} & Y_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & I_{qn} & & \cdot & \cdot \end{array} \right]}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)}. \quad (105)$$

Die Determinate des Zählers lässt sich nach den Elementen des Quellstromvektors entwickeln, der in die j -ten Spalte eingesetzt wurde. Mit der Adjunkten erster Ordnung $D_{ij} = (-1)^{i+j} \text{Det}(\mathbf{Y}_n \setminus -\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ¹⁰ lautet diese Entwicklung

$$U_j = \frac{\sum_{i=1}^n D_{ij} I_{qi}}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)} \quad (106)$$

$$= \underbrace{\frac{D_{1j}}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)} I_{q1}}_{Z_{j1}} + \underbrace{\frac{D_{2j}}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)} I_{q2}}_{Z_{j2}} + \dots + \underbrace{\frac{D_{nj}}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)} I_{qn}}_{Z_{jn}} \quad (107)$$

$$= \underbrace{Z_{j1} I_{q1}}_{U_{j1}} + \underbrace{Z_{j2} I_{q2}}_{U_{j2}} + \dots + \underbrace{Z_{jn} I_{qn}}_{U_{jn}}. \quad (108)$$

Eine Knotenspannung U_j setzt sich demnach zusammen aus der Überlagerung einzelner Teilspannungen $U_{j1}, U_{j2} \dots U_{jn}$. Jede darin enthaltene Teilspannung U_{ji} ergibt sich aus der mit einer *Wirkungsfunktion* Z_{ji} skalierten Wirkung eines Quellstroms I_{qi} . Für *Wirkungsfunktionen* im Bildbereich der Laplacetransformation, d.h. in der komplexen Frequenz s , wird insbesondere in der Regelungstechnik auch der Begriff *Übertragungsfunktion* verwendet. Je kleiner der Betrag einer Wirkungsfunktion, umso geringer ist der Beitrag der damit skalierten Ursache zur betrachteten Knotenspannung.

Gleichung 108 liefert einen alternativen Ansatz zur Berechnung von Netzwerken mit mehreren Quellen. Bereits ohne genaue Kenntnis des Netzwerks lässt

¹⁰Diese Kurzschreibweise soll bedeuten: Die Untermatrix von \mathbf{Y}_n , die durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte hervorgeht.

sich für ein Netzwerk mit n Quellen als erster Schritt direkt Gl. 108 hinschreiben. In einem zweiten Schritt können die Wirkungsfunktionen bestimmt werden. Dies kann nach Gl. 108 derart geschehen, dass alle Quellen bis auf eine zu Null gesetzt werden. Geschieht dies für die i -te Quelle so lautet Gl. 108

$$U_j = U_{ji} = Z_{ji} I_{qi} \Big|_{I_{ql=0, l=1 \dots n \setminus i}}. \quad (109)$$

und demnach ergibt sich die Wirkungsfunktion

$$Z_{ji} = \frac{U_j}{I_{qi}} \Big|_{I_{ql=0, l=1 \dots n \setminus i}}. \quad (110)$$

Der Vorteil dieser Berechnung liegt darin, dass in Netzwerken mit mehreren Quellen die Beiträge getrennt voneinander bestimmt und betrachtet werden können, was eine wesentliche Vereinfachung darstellt. Das resultierende Ergebnis ergibt sich aus der Überlagerung (Addition) der einzelnen Beiträge. Daher stammt der Name *Überlagerungssatz* oder *Superpositionsprinzip* dieser Methode. Natürlich gilt das Überlagerungsprinzip nur bei den eingangs den Betrachtungen zugrundegelegten *linearen* Netzwerken.

Anhand der Struktur der Lösung aus Gl. 107 lassen sich noch einige Aussagen über die Eigenschaften der Wirkungsfunktion machen. Da die Determinanten im Zähler wie im Nenner dieses Ausdrucks algebraische Funktionen der Wirkungsfunktionen aus der Knotenadmittanzmatrix \mathbf{Y}_n sind, ergeben sich aus der Berechnung der Determinanten Polynome in der komplexen Frequenz s (bzw. in $j\omega$ bei der Beschreibung mit Phasoren), so dass gilt

$$Z_{ji} = \frac{D_{1j}}{\text{Det}(\mathbf{Y}_n)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots b_1 s + b_0}, \quad (111)$$

$$= Z_0 \frac{(s - s_{zn})(s - s_{zn-1}) \dots (s - s_{z1})}{(s - s_{nm})(s - s_{nm-1}) \dots (s - s_{n1})}. \quad (112)$$

Darin sind $s_{z1} \dots s_{zn}$ die n Nullstellen des Zählerpolynoms und entsprechend $s_{n1} \dots s_{nm}$ die m Nullstellen des Nennerpolynoms. Z_0 ist eine reellwertige Konstante. Es lässt sich zeigen, dass bei *physikalisch realisierbaren Netzwerken* der Grad n des Zählerpolynoms kleiner als der des Nennerpolynoms ist, d.h. $n < m$. Eine einfache Überlegung stützt den hier nicht aufgeführten Beweis. Wäre $n \geq m$ würde für $s \rightarrow \infty$, die Wirkungsfunktion gegen den Grenzwert a_n/b_n für $m = n$ bzw. $\rightarrow \infty$ für $n > m$ streben. Dies würde einem Netzwerk mit unendlich großer Bandbreite entsprechen, wogegen physikalisch realisierbare Systeme eine endliche Bandbreite aufweisen.

6 Das Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm dient als Mittel zur Darstellung, Konstruktion und Analyse des Betrags- und Phasengangs, kurz des *Frequenzgangs*, von Wirkungsfunktionen in Phasor-Darstellung. Ausgangspunkt der Herleitung ist die Darstellung einer beliebigen Wirkungsfunktion nach Gl. 112, die mittels $s \rightarrow j\omega$ in die Phasordarstellung überführt wird

$$\underline{Z} = Z_0 \frac{(j\omega - s_{zn})(j\omega - s_{zn-1}) \dots (j\omega - s_{z1})}{(j\omega - s_{nm})(j\omega - s_{nm-1}) \dots (j\omega - s_{n1})}. \quad (113)$$

Darin haben wir zur Vereinfachung die allgemeinen Indizes ij weggelassen und verstehen, dass \underline{Z} eine allgemeine Darstellung einer beliebigen Wirkungsfunktion repräsentiert. Wir betrachten im folgenden Netzwerke, die *nur reellwertige Pol- und Nullstellen* aufweisen¹¹. In der üblichen Formulierung werden diese Polstellen paradoxer Weise mit ω bezeichnet, obwohl gerade ω den Imaginärteil der komplexen Frequenz $s = \sigma + j\omega$ bezeichnet. Somit wäre eigentlich die Wahl des σ als reellwertige Variable konsistenter gewesen. Wir lassen uns davon aber nicht einschüchtern und behalten die übliche Formulierung mit ω bei. Damit besitzt die Wirkungsfunktion eines Netzwerkes mit reelwertigen Polen und Nullstellen die Form

$$\underline{Z} = Z_0 \frac{(j\omega - \omega_{zn})(j\omega - \omega_{zn-1}) \dots (j\omega - \omega_{z1})}{(j\omega - \omega_{nm})(j\omega - \omega_{nm-1}) \dots (j\omega - \omega_{n1})}, \quad (114)$$

$$= K_0 \frac{(1 - j\omega/\omega_{zn})(1 - j\omega/\omega_{zn-1}) \dots (1 - j\omega/\omega_{z1})}{(1 - j\omega/\omega_{nm})(1 - j\omega/\omega_{nm-1}) \dots (1 - j\omega/\omega_{n1})}. \quad (115)$$

Diese Form ist der Ausgangspunkt für die Näherungen, die bei der Konstruktion des Bode-Diagramms angewendet werden. Für jeden der darin enthaltenen Terme gilt allgemeinen

$$(1 - j\omega/\omega_i) = A_i e^{j\varphi_i} \quad (116)$$

mit

$$A_i = \sqrt{1 + (\omega/\omega_i)^2}, \quad \varphi_i = \arctan \frac{\omega}{-\omega_i} \quad (117)$$

wobei bei stabilen Netzwerken immer $\omega_{ni} \leq 0$ und in der Regel auch $\omega_{zi} \leq 0$ gilt (vgl. Kapitel über Stabilität). Als Fazit folgt, daß das Argument der arctan-Funktion und damit auch die Phase φ_i bei stabilen Netzwerken positive Werte annimmt.

Die Wirkungsfunktion \underline{Z} lässt sich mit dieser Darstellung in Euler-Form schreiben

$$\underline{Z} = K_0 \frac{A_{z1} A_{z2} \dots A_{zn} e^{j(\varphi_{z1} + \varphi_{z2} + \dots + \varphi_{zm})}}{A_{n1} A_{n2} \dots A_{nm} e^{j(\varphi_{n1} + \varphi_{n2} + \dots + \varphi_{nm})}} \quad (118)$$

wobei

$$|\underline{Z}| = |K_0| \frac{A_{z1} A_{z2} \dots A_{zn}}{A_{n1} A_{n2} \dots A_{nm}} \quad (119)$$

und

$$\arg(\underline{Z}) = \arg(K_0) + \varphi_{z1} + \varphi_{z2} + \dots + \varphi_{zm} - (\varphi_{n1} + \varphi_{n2} + \dots + \varphi_{nm}). \quad (120)$$

Darin ist wegen $K_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \arg(K_0) \in \{0, \pi\}$. Die beiden vorangegangenen Gleichungen werden zur Konstruktion des Frequenzgangs (Betrags- und Phasengang) im Bode-Diagramm verwendet.

Für die Darstellung des Betragsgangs wird folgende Näherung eingeführt

$$A_i = \sqrt{1 + (\omega/\omega_i)^2} \approx \begin{cases} 1 & , \omega \leq |\omega_i|, \\ \omega/\omega_i & , \omega > |\omega_i|, \end{cases} \quad (121)$$

¹¹Diese einschränkende Annahme ist keine Voraussetzung zur Anwendung des Bode-Diagramms. Sie bewirkt jedoch deutliche Vereinfachungen in der Anwendung, z.B. bei der Analyse und Konstruktion von Frequenzgängen, wodurch ein effizienteres Arbeiten von Hand als mit dem Computer möglich wird

die offensichtlich mit dem Wert 1 bei $\omega = \omega_i$ gegenüber dem exakten Wert $\sqrt{2}$ den größten Fehler aufweist.

Die Darstellung des Betrags erfolgt im Bode-Diagramm immer in dekadisch logarithmierter und skaliertes Form. Um dies auszudrücken wird die künstliche Einheit *Dezibel* oder kurz *dB* verwendet. Sie gibt das 10-fache des Verhältnisses des Betrags zweier *Leistungen* (z.B. für Ursache und Wirkung) an. Bezieht man die Berechnung der beiden Leistungen, $\underline{S}_1 = \underline{U}_1 I_1^*$, $\underline{S}_2 = \underline{U}_2 I_2^*$ auf einen gemeinsamen Referenzwiderstand so folgt

$$10 \log \left| \frac{\underline{S}_2}{\underline{S}_1} \right| = 10 \log \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right|^2 = 20 \log \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right| = 20 \log \left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|. \quad (122)$$

Entsprechend werden Wirkungsfunktionen aus Spannungs- und Stromverhältnissen in Dezibel mit dem 20-fachen des dekadischen Logarithmus berechnet. Es ist praktisch einige, in Tab. 6 aufgeführten, häufig auftretende Verhältnisse in ihrer Umrechnung in Dezibel auswendig zu kennen

Verhältnis a/b	1	1,12	$\sqrt{2}$	2	10
20 log a/b	0 dB	1 dB	3 dB	6 dB	20 dB

Die Darstellung des Betrags unserer allgemeinen Wirkungsfunktion nach Gl. 119 lautet in der logarithmierten Darstellung in dB

$$20 \log |\underline{Z}| = 20 \log |K_0| + 20 \log A_{z1} \dots + 20 \log A_{zn} - 20 \log A_{n1} \dots - 20 \log A_{nm}. \quad (123)$$

Wird für die darin enthaltenen A_i die Näherung gemäß Gl. 121 eingesetzt, ergibt sich

$$20 \log A_i \approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & , \omega \leq |\omega_i|, \\ \underbrace{20 \log \omega / \omega_i}_{x} \text{ dB} & , \omega > |\omega_i|, \end{cases} \quad (124)$$

Im Bode-Diagramm wird auf der Frequenz-Achse das Verhältnis der Frequenzen ω/ω_i ebenfalls in dekadischer Logarithmierung dargestellt. Der Term $\log \omega/\omega_i =: x$ kann somit als logarithmische Parametrisierung der x-Achse aufgefasst werden. Ein Produktterm A_i nach Gl. 121 stellt sich damit wie in Abb. 20 gezeigt im Bode-Diagramm dar. Ein solcher Verlauf ergibt sich für jeden A_{zi} und A_{ni} Term in Gl. 123. Der Übergang von dem waagrechten Geradenabschnitt bei 0 dB in den mit 20 dB steigenden Geradenabschnitt ergibt sich bei der in der jeweiligen A_i Näherung enthaltenen Frequenz ω_i . Der Gesamtverlauf des Betrages von \underline{Z} ergibt sich gemäß Gl. 123 einfach aus der Addition der einzelnen Geradenabschnitte aller A_i -Verläufe. Dabei sind bitte die Minus-Zeichen vor den Nenner-Termen A_{ni} zu beachten und die Addition der $20 \log |K_0|$ Terms nicht zu vergessen.

Auch der Phasengang von \underline{Z} wird über einfache Geradenabschnitt-Näherungen im Bode-Diagramm dargestellt. Dazu wird jeder φ_i -Term in Gl. 120 durch eine Näherung seiner Bestimmungsgleichung 117 dargestellt

$$\varphi_i = \arctan \frac{\omega}{-\omega_i} \approx \begin{cases} 0^\circ & , \omega \leq \frac{|\omega_i|}{10}, \\ 45^\circ x & , \frac{|\omega_i|}{10} < \omega < 10|\omega_i|, \\ 90^\circ & , \omega \geq 10|\omega_i|, \end{cases} \quad (125)$$

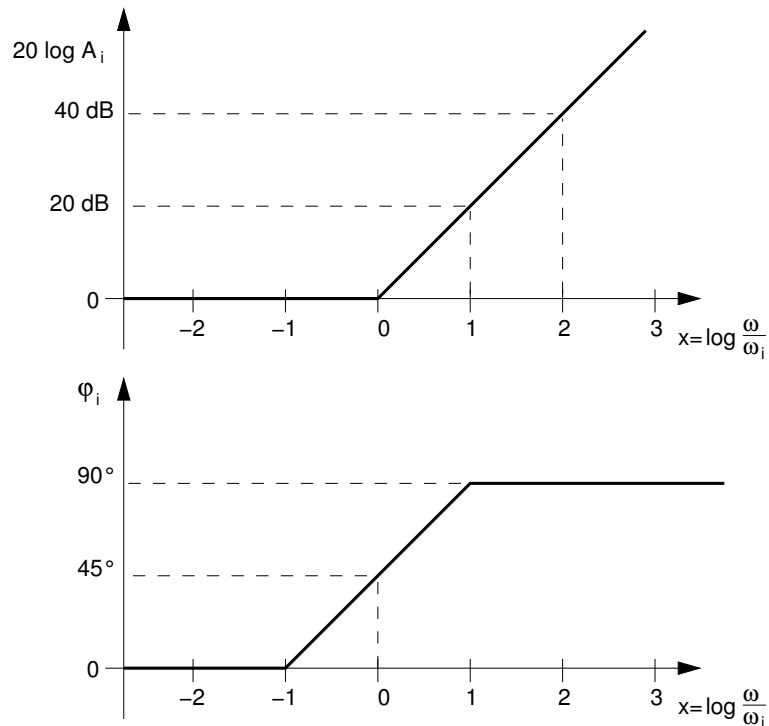


Abb. 20: Bode-Diagramm Näherungen. Oben: Verlauf eines Betrags-Terms A_i in Form eines waagrechten Geradenabschnitts bis zur Frequenz $|\omega_i|$ und eines mit 20 dB pro Dekade steigenden Geradenabschnitts für Frequenzen größer als $|\omega_i|$. Unten: Die Geradenabschnitt Näherung des zugehörigen Phasenverlaufs nach Gl. 125 besitzt einen breiten Übergangsbereich von 0° bis 90° , der bereits bei $\frac{1}{10}|\omega_i|$ beginnt und sich bis $10|\omega_i|$ erstreckt.

Die maximalen Fehler treten in dieser Näherung bei $\omega_i/10$ und $10\omega_i$ auf, wo die Näherung die Werte 0° und 90° anstelle der arctan Werte von ca. $5,7^\circ$ und $84,3^\circ$ annimmt.

Anmerkung: Die Fehler der Betrags- und Phasengangsnäherungen des Bode-Diagramms führen in der Regel zu keinen Einschränkungen in der Anwendung. Sie sind zum Einen bekannt und können daher als Abweichung vom genäherten Verlauf berücksichtigt werden. Zum Anderen wird das Bode-Diagramm vorwiegend vorteilhaft zur Konstruktion und Analyse verwendet, wobei es dabei um die prinzipielle Platzierung der ω_i und um Fall-Szenarien geht und nicht um genaue Werte abzulesen. Ist Genauigkeit gefragt kann im Anschluß oder alternativ zur Verwendung des Bode-Diagramms das genaue Ergebnis mit einem Rechenprogramm oder Schaltungssimulator bestimmt werden.

Beispiel: Kompensierter Spannungsteiler.

Abbildung 21 oben zeigt einen einfachen Spannungsteiler als Tastkopf zur Messung hoher Spannungen (z.B. Tastkopf 1:10 mit $R_1 = 9M\Omega$, $R_2 = 1M\Omega$) Nachteil dieses Spannungsteilers ist, dass Frequenzanteile oberhalb ω_g abgeschwächt werden wodurch das Messsignal auf dem Oszilloskop verzerrt, also falsch, dargestellt wird. In diesem Fall bringt eine zusätzlich über R_1 angebrach-

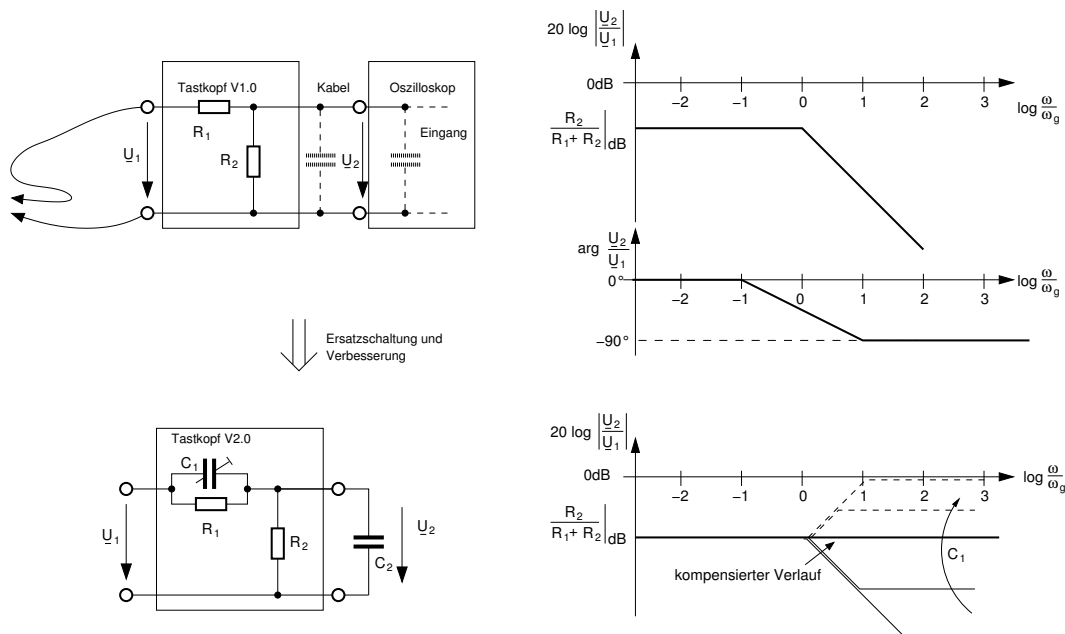


Abb. 21: Links oben: Einfacher Tastkopf aus Spannungsteiler R_1 , R_2 , belastet durch eine Gesamtkapazität C_2 resultierend aus Kabelkapazität (z.B. 100 pF/m und Eingangskapazität eines Oszilloskops (z.B. 10 pF). Rechts daneben der zugehörige Frequenzgang mit $\omega_g := 1/(R_2 C_2)$. Unten links: Optimierter Spannungsteiler durch einstellbare Zusatzkapazität C_1 . Das Bode Diagramm unten rechts zeigt den zugehörigem Betragsgang, wobei für ω_g immer die niedrigere der beiden Eckfrequenzen von Zähler und Nenner gewählt wurde.

ter Kondensator C_1 (vgl. Abb. 21 unten) bei geeigneter Wahl der Kapazität eine Kompensation des Abfalls, wodurch unter den hier getroffenen Annahmen ein idealer Spannungsteiler, d.h. $\frac{U_2}{U_1}$ ist frequenzunabhängig, entsteht. Anhand des Frequenzgangs dieses Spannungsteilers

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega \frac{C_1 + C_2}{G_1 + G_2}} \quad (126)$$

lässt sich für diesen Fall der sog. *Pol-Nullstellen Kompensation* ein Wert von $C_1 = C_2 R_2 / R_1$ ermitteln.

Grundsätzlich sind durch entsprechende Wahl von C_1 auch ab ω_g ansteigende Frequenzgänge (sog. Frequenzanhebung) einstellbar. Beispiele für Betragverläufe mit steigendem C_1 sind in Abb. 21 rechts unten dargestellt. Dabei lässt sich z.B. durch Anwendung der Näherungen des Bode-Diagramms auf den Betragsgang nach Gl. 123 relativ einfach sehen, dass im gesamten Frequenzbereich keine Werte größer als 0 dB angenommen werden können. Aufgrund des Betragverlaufs (vgl. Abb. 21 unten rechts) sehen wir, dass die größten möglichen Werte oberhalb der zweiten Eckfrequenz angenommen werden. Daher genügt es Frequenzen zu betrachten, die größer sind als die größte Eckfrequenz. Für diesen Frequenzbereich können die Zähler- und Nennerterme mit der Näherung für $\omega > |\omega_i|$ nach Gl. 124 vereinfachen. Damit ergibt sich direkt aus Gl.126 der

asymptotische Grenzwert für hohe Frequenzen $\left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega \rightarrow \infty} = C_1 / (C_1 + C_2)$, der maximal den Wert Eins annehmen kann.

7 Anwendungen und Übungsbeispiele

7.1 Schaltnetzteil

7.1.1 Konstituierende Gleichungen

Zum Verständnis notwendige Grundlagen: KCL, KVL, Konstituierende Gleichungen (RLC, Diode), Differentialgleichung, Separation der Variablen.

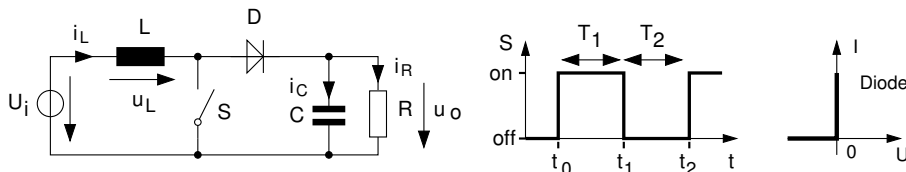


Abb. 22: Schaltung eines einfachen Schaltwandlers.

Mit Hilfe der in Abb. 23 gezeigten kanonischen Schaltung eines Schaltwandlers kann eine Eingangsspannung U_i in eine höhere Spannung u_o konvertiert werden. Zu berechnen ist der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsspannung, U_i, u_o des Schaltwandlers.

Zur vereinfachten Berechnung kann der Schalter S ideal mit 0Ω im on-Zustand und ∞ im "off" Zustand angenommen werden. Die Eingangsspannung $U_i = \text{const.}$ Die Diode wird ideal, mit der konstituierenden Gleichung $U = 0 |_{I \geq 0}$ und $I = 0 |_{U \leq 0}$, (U, I , Spannung und Strom an der Diode) angenommen. Diesem Ideal sehr nahe kommen Dioden, die auf einem Metall-Halbleiter Übergang beruhen (Schottky Dioden). Deren Durchlassspannung beträgt ca. $0,3V$ im Vergleich zu ca. $0,7V$ bei Dioden mit pn-Übergang.

- Berechnung $t_0 \leq t < t_1$ (Schalter an, Periode T_1).

Inspektion der Schaltung bei geschlossenem Schalter zeigt zwei, durch den Kurzschluss des Schalters voneinander getrennte Schaltungen (links und rechts des Schalters). Diese können getrennt voneinander berechnet werden.

– Linker Schaltungsteil.

$$u_L = U_i = L \frac{di_L}{dt}, \quad (127)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} U_i dt = L \int_{t_0}^{t_1} di_L, \quad (128)$$

$$U_i T_1 = L(i_L(t_1) - i_L(t_0)), \quad (129)$$

$$\frac{U_i T_1}{L} =: \Delta i_L(T_1). \quad (130)$$

Darin wurde mit $\Delta i_L(T_1)$ eine Hilfsgröße definiert, welche die Änderung des Stroms durch die Induktivität zwischen Beginn und Ende der Einschaltperiode T_1 angibt.

– Rechter Schaltungsteil.

Wir gehen davon aus, dass der Schaltwandler sich in einem (bestimmungsgemäßen) Zustand mit $u_o \geq 0$ befindet. In diesem Fall ist die

Diode D gesperrt und es gilt

$$i_C = -i_R, \quad (131)$$

$$C \frac{du_o}{dt} = -\frac{u_o}{R}, \quad (132)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{du_o}{u_o} = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t_1} dt, \quad \tau := RC, \quad (133)$$

$$\ln \frac{u_o(t_1)}{u_o(t_0)} = -\frac{T_1}{\tau}, \quad (134)$$

$$u_o(t_1) = u_o(t_0) e^{-T_1/\tau}. \quad (135)$$

Dies ist ein allgemeines Ergebnis. Es kann weiter vereinfacht werden indem berücksichtigt wird, dass in einem Schaltwandler die Ausgangsspannung u_o möglichst konstant sein soll. Dann kommt der Schaltwandler seinem Ideal, eine Schaltung zur Konvertierung einer Gleichspannung in eine Andere, sehr nahe. Für eine möglichst konstante Ausgangsspannung sollte der Spannungsabfall in der Periode T_1 möglichst gering sein. Daraus folgt $\tau \gg T_1$. Eine Reihenentwicklung der e -Funktion um Null (kleines Argument wegen $\tau \gg T_1$) kann dann in guter Näherung nach dem linearen Glied abgebrochen werden und es gilt

$$u_o(t_1) \approx u_o(t_0) \left(1 - \frac{T_1}{\tau}\right), \quad (136)$$

$$\Delta u_o(T_1) := u_o(t_1) - u_o(t_0) \quad (137)$$

$$\approx -\frac{T_1}{\tau} u_o(t_0). \quad (138)$$

- Berechnung $t_1 \leq t < t_2$ (Schalter aus, Periode T_2).

Generell kann hier zunächst eine gewöhnliche DGL zweiter Ordnung mit den entsprechenden Anfangsbedingungen aufgestellt werden. Deren Lösung wird dann allgemein nach den drei zu unterscheidenden Fällen der Lösung der charakteristischen Gleichung unterschieden und kann ggf. für die spezielle Dimensionierung des Schaltwandlers vereinfacht werden.

Einfacher ist eine Lösung, deren Ansatz direkt die zu realisierenden Eigenschaften der Schaltung beinhaltet. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Es gilt allgemein

$$U_i - u_o = u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad (139)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} U_i - u_o dt = L \int_{t_1}^{t_2} di_L \quad (140)$$

$$T_2 U_i - \int_{t_1}^{t_2} u_o dt = L(i_L(t_2) - i_L(t_1)) =: L \Delta i_L(T_2) \quad (141)$$

Wir überlegen uns, welchen qualitativen Verlauf die zu integrierende Spannung $u_o(t)$ hat.

Für die Periode T_1 haben wir bereits ermittelt, dass u_o näherungsweise linear über der Zeit um $\Delta u_o(T_1)$ abfällt. Im stationären Betrieb muss daher während der zweiten Periode T_2 die Ausgangsspannung wieder auf den

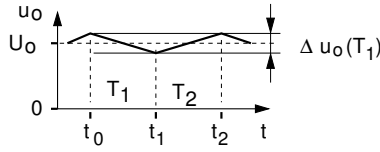


Abb. 23: Qualitativer Verlauf der Ausgangsspannung des Schaltwandlers.

Anfangswert zu Beginn von T_1 ansteigen. Unter der Maßgabe geeigneter Randbedingungen wird sich dieser Verlauf, wie in der Abbildung angedeutet, in erster Näherung als linearer Abschnitt eines Kurvenverlaufs (der eingangs angedeuteten Lösung der DGL zweiter Ordnung) approximieren lassen. Die Übergänge zwischen den Kurvenabschnitten sind stetig, da die Spannung am Kondensator stetig ist. Das periodische Auf und Ab der Ausgangsspannung um $\Delta u_c(T_1)$ nennt man auch *Welligkeit*. Tatsächlich ist der genaue Verlauf der Welligkeit im Sinne der angestrebten Lösung unerheblich, wie im Folgenden zu sehen ist. Dazu teilen wir allgemein die Ausgangsspannung in einen Gleichspannungs-Anteil U_o und einen überlagerten Wechselspannungs-Anteil $\Delta u_o(t)$ entsprechend $u_o(t) = U_o + \Delta u_o(t)$ auf. Damit folgt aus Gl. 141

$$T_2 U_i - \int_{t_1}^{t_2} U_o dt - \int_{t_1}^{t_2} \Delta u_o(t) dt = L \Delta i_L(T_2), \quad (142)$$

$$T_2(U_i - U_o) - \int_{t_1}^{t_2} \Delta u_o(t) dt = L \Delta i_L(T_2), \quad (143)$$

$$T_2(U_i - U_o) \approx L \Delta i_L(T_2). \quad (144)$$

Der letzte Schritt darin ist per Definition des Wechselspannungsanteils (Mittelwert = 0) generell erfüllt.

- Zusammenführen der beiden Lösungen für T_1 und T_2 .

Im stationären Betrieb wiederholen sich die Abläufe im Schaltwandler periodisch mit der Periode $T = T_1 + T_2$. Dazu müssen Änderungen einer sich stetig ändernden Größe in der Teil-Periode T_1 in der darauf folgenden Teilperiode T_2 wieder zum Ausgangswert zurückgeführt werden. Betrachten wir als stetige Größe den bereits ermittelten Strom durch die Induktivität so folgt

$$\Delta i_L(T_1) = -\Delta i_L(T_2) \quad (145)$$

$$\frac{U_i T_1}{L} = -\frac{T_2(U_i - U_o)}{L} \quad (146)$$

$$U_o = U_i \frac{T_1 + T_2}{T_2} \quad (147)$$

$$U_o = \frac{U_i}{1 - D}, \text{ mit } D := \frac{T_1}{T_1 + T_2}. \quad (148)$$

Dies ist das gesuchte Ergebnis. Interessant ist, dass es augenscheinlich keine Abhängigkeit von den Schaltungselementen besitzt, sondern nur vom Tastverhältnis D abhängt.

Möchte man den Schaltwandler zur Erzeugung einer konstanten Betriebsspannung einsetzen, so zeigt das Ergebnis eine unerwünschte Eigenschaft der Schaltung in der bisher behandelten Form. Hier ändert sich die Ausgangsspannung im gleichen Maße wie die Eingangsspannung. Wird z.B. als Eingangsspannung eine Batterie verwendet, so geht die Ausgangsspannung im gleichen Maß zurück wie sich die Batteriespannung über der Zeit verringert. Dies kann kompensiert werden, indem das Tastverhältnis D so angepasst wird, dass die Ausgangsspannung konstant bleibt. Dazu kann die Ausgangsspannung mit einem Referenzwert verglichen werden. Abweichungen werden mit Hilfe einer Regelungs-Schaltung zur Nachführung von D verwendet, so dass sich die gewünschte Ausgangsspannung einstellt.

7.1.2 Transistor-Schalter

Zum Verständnis notwendige Grundlagen: KCL, KVL, Konstituierende Gleichungen und Ausgangskennlinienfeld Bipolartransistor, Ersatzspannungs/Stromquelle.

In dem einfachen Schaltwandler nach Abb. 23 soll der ideale Schalter entsprechend Abb. 24, links, durch einen Transistor-Schalter ersetzt werden. Zu ermitteln sind die Betriebszustände des Transistors und die zur Realisierung des "on/off" Betriebs notwendige Ansteuerung.

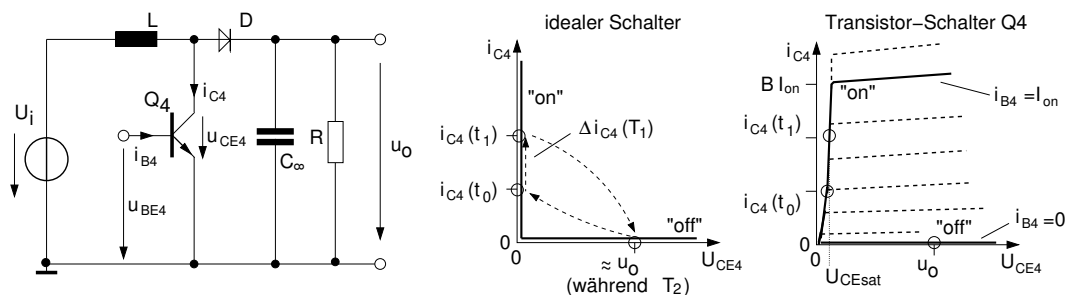


Abb. 24: Realisierung des Schaltwandlers nach Abb. 23 mit einem Transistor Q_4 als elektronischer Schalter.

Zur Verdeutlichung der elektrischen Funktion eines idealen Schalters sind in der Mitte von Abb. 24 die Kennlinien der konstituierenden Gleichungen für "on" und "off" Zustand und die Lage der konkreten Spannungen und Ströme während der Perioden T_1 ("on") und T_2 ("off") gezeigt. Anhand eines Vergleichs mit dem Ausgangs-Kennlinienfeld eines Transistors erkennt man, dass die Kennlinie mit Basisstrom $i_{B4} = 0$ sehr gut den "off" Zustand des Schalters repräsentiert. Für den "on" Zustand kann eine Kennlinie verwendet werden, bei der ein Basisstrom $i_{B4} = I_{on}$ ausreichender Größe in den Transistor eingepreßt wird¹². Dabei meint der Begriff "ausreichend", dass die durch den Basis-Strom ausgewählte Kennlinie erst oberhalb des maximal durch den Schalter fließenden Stroms ($i_{C4}(t_1)$) in den (näherungsweise) horizontalen Verlauf des normal-aktiven Betriebs übergeht. Durch diese Wahl ist sichergestellt, dass über den Transistor-Schalter eine nur kleine Sättigungs-Spannung U_{CEsat} (z.B. 200 mV) abfällt, wodurch das

¹²Eine entsprechende Kennlinie mit Einprägung einer ausreichend großen Basis-Emmitter-Spannung würde auch gehen, entspricht aber nicht der im folgenden gewählten Ansteuerung.

Verhalten des idealen Schalters (Spannungsabfall = 0) angenähert wird. Für den dazu notwendigen minimalen Basis-Strom gilt $Bi_{B4} \geq i_{C4}(t_1)$, was für die in Abb. 24, rechts, gezeigte Wahl von $i_{B4} = I_{on}$ der Fall ist.

Es stellt sich als nächstes die Frage, wie wir eine geeignete Ansteuerung und elektronische Umschaltung zwischen "on/off" des Schalter-Transistors realisieren können.

7.1.3 Transistor-Komparator

Zum Verständnis notwendige Grundlagen: KCL, KVL, Konstituierende Gleichungen und Ausgangskennlinienfeld Bipolartransistor, Konzept der Arbeitskennlinie (Lastgeraden), Ersatz-Spannungs/Stromquelle, Konzept des Arbeitspunktes, Gleichstrom- Wechselstrom-Ersatzschaltung.

In dem Schaltwandler nach Abb. 25 wurden die gestrichelt umrahmte Schaltung mit den Transistoren Q_2, Q_3 zur Ansteuerung des Schalter-Transistors Q_4 eingebaut. Zu ermitteln sind die Betriebszustände der Transistoren bei Ansteuerung mit einer sinusförmigen Wechselspannung $u_{ac}(t) = U_{ac} \sin \omega t$ und die zur Realisierung des "on/off" Betriebs mit einem Tastverhältnis von 50%, d.h. $D = 0,5 = \frac{T_1}{T_1+T_2}$, notwendige Einstellung des Arbeitspunktes durch den Spannungsteiler R_1, R_2 .

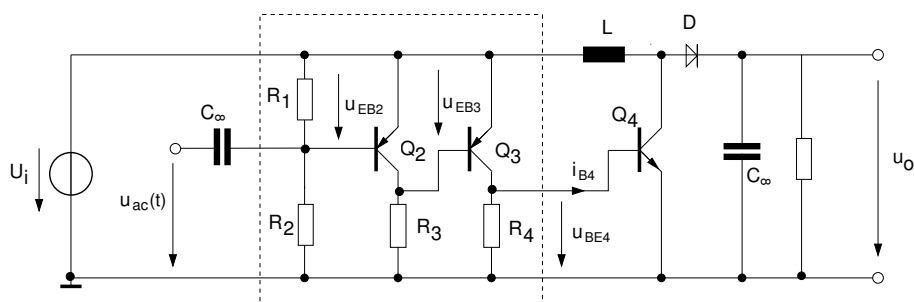


Abb. 25: Schaltung des Schaltwandlers mit Ansteuerschaltung (gestrichelt umrandet) zum Ein- und Ausschalten des Transistor-Schalters Q_4 durch die Wechselspannung $u_{ac}(t)$.

Vorüberlegung: Ein bestimmtes Tastverhältnis, z.B. $D = 0,5 = \frac{T_1}{T_1+T_2}$ bei Ansteuerung mit einem sinusförmigen Signal lässt sich, wie in Abb. 26 links gezeigt, dadurch erzielen, dass der Zeitverlauf der Spannung u_{ac} mit einem Referenzwert U_{BEX} verglichen wird (daher der Begriff "Komparator"). Je nachdem ob die Spannung über oder unter dem Referenzwert liegt, schaltet die Komparator-Schaltung in einen definierten "on"- bzw. "off" Zustand. Aus diesem Grund wird der Referenzwert auch *Schaltswelle* oder *Schwellwert* genannt (engl. *threshold*). Um das Tastverhältnis einzustellen, kann dem Wechselsignal eine einstellbare Gleichspannung U_{BE2} überlagert werden. Diese verschiebt, wie in den Beispielen a), b) und c) in Abb. 26 gezeigt, das Signal gegenüber dem Schwellwert, wodurch sich unterschiedlich lange Verweildauern des Signals unter- und oberhalb des Schwellwerts ergeben.

Zur Realisierung dieser Funktion betrachten wir die Kennlinienfelder des Transistors Q_2 , in Abb. 27, in das auch die Arbeitskennlinie in Form der Lastgerade eingezeichnet ist. Folgendes ist anhand der Verknüpfung der dargestellten

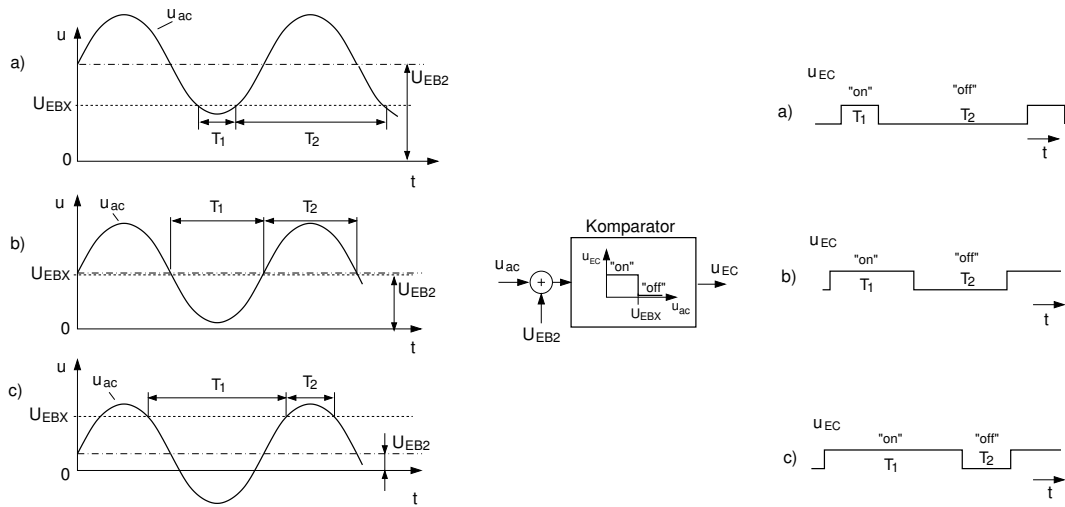


Abb. 26: Erläuterung zur Funktionsweise eines Komparators am Beispiel der Transistorstufe Q_2 . Links: Wechselspannung u_{ac} mit drei verschiedenen Gleichspannungsanteilen (Offsets) durch Überlagerung einer Gleichspannung U_{EB2} am Widerstand R_1 . Mitte: Funktionssymbol mit idealisierter Übertragungskennlinie des Komparators. Rechts: prinzipieller Verlauf der Komparator-Ausgangsspannungen am Beispiel der drei eingestellten Gleichspannungen (Fälle a), b), c)).

Kennlinien festzustellen. Im Bereich der Eingangsspannung U_{EB} von Null bis kurz vor Erreichen der Schwellenspannung U_{EBX} (Quadrat-Markierung in Abb. 27) befindet sich die Emitter-Kollektor-Spannung U_{EC2} im Bereich nahe U_i . Aufgrund der exponentiellen Eingangskennlinie genügt eine kleine Vergrößerung von U_{EB} , um entlang der Arbeitsgeraden nach links oben zu laufen. Die starke Veränderung in bei Durchlaufen des ausgezeichneten Wertes U_{EBX} wirkt als Schaltschwelle, die den Übergang von einem definierten Wert (hier "on" $\approx U_i$) auf einen anderen definierten Wert (hier "off" $\approx U_{CEsat}$) markiert. Dieser Andere Wert stellt hier den bei weiterer Vergrößerung von U_{EB2} maximal erreichbaren Punkt auf der Arbeitsgeraden dar. Er ist mit einem Kreis markiert und stellt den letzten gemeinsamen Punkt von Arbeitsgeraden und der Kennlinienschar an der Stelle $U_{EC} = U_{ECsat}$ dar. Markiert man im vierten Quadranten jeweils zugehörige Punkte des ersten und dritten Quadranten, so erhält man die in Abb. 27 rechts oben getrennt dargestellte reale Übertragungskennlinie der Komparatorschaltung.

In Abb. 26 wurde der Wechselspannung am Komparator-Eingang eine Gleichspannung zur Einstellung eines bestimmten Tastverhältnisses überlagert. In unserer Schaltung liegen die überlagerten Spannungen in Form der Emitter-Basis-Spannung u_{EB2} am Widerstand R_1 an. Der Gleichspannungsanteil U_{EB2} an R_1 ergibt sich unter Vernachlässigung des Basisstroms von Q_2 durch den Spannungsteiler

$$U_{EB2} = U_i \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (149)$$

Für ein Tastverhältnis von 50% müssen, wie in Abb. 26 b) gezeigt, die Nulldurchgänge der Sinusschwingung u_{ac} durch Überlagerung einer Gleichspannung

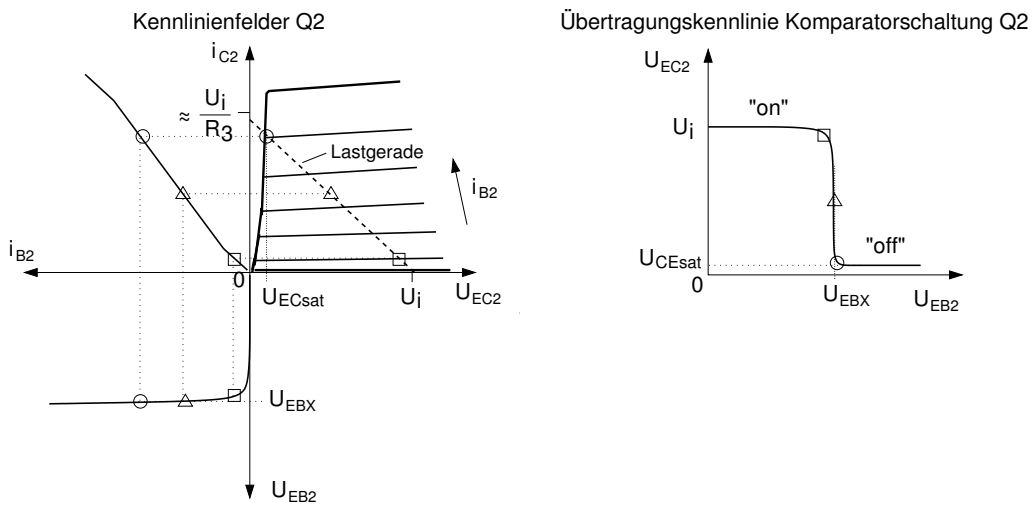


Abb. 27: Links: Kennlinienfelder des Komparator-Transistors Q_2 . Anstelle einer mit U_{EC} parametrisierten Kennlinienschar wurde aufgrund der schwachen Abhängigkeit als Näherung nur eine Kennlinie für die Stromverstärkung im zweiten und die Eingangskennlinien im dritten Quadranten dargestellt. Rechts: Übertragungskennlinie des Komparators. Die Kurve lässt sich direkt im vierten Quadranten des Transistorkennlinienfeldes rechts konstruieren.

nung U_{EBX} auf den Wert der Schwellspannung U_{EBX} verschoben werden, wodurch sich der mit einem Kreuz markierte Arbeitspunkt in etwa bei der halben Ausgangsspannung $U_{EC2} \approx \frac{1}{2}U_i$ einstellt. Dazu muss das Spannungsteiler-Verhältnis zu $U_{EB2} = U_{BEX} = U_i \frac{R_1}{R_1+R_2}$ dimensioniert werden.

zur Einstellung der Ausgangsspannung über das Tastverhältnis wird eine variable Einstellung des Referenzwertes benötigt. Dies kann durch Einstellen von R_1 oder R_2 (z.B. mittels eines Potentiometers) oder durch Einprägung eines zusätzlichen variablen Stroms aus einer Stromquelle in R_1 erreicht werden.

Die vorangegangenen Überlegungen zur Übertragungskennlinie der Komparator-Schaltung mit Q_2 gelten entsprechend auch für darauf folgende Transistorschaltung mit Q_3 . Bei gleichen Transistoren besitzt auch diese Schaltung i.e. die gleiche Schwellspannung U_{EBX} , bei welcher der Ausgang von Q_3 zwischen dem "on" und "off" Zustand wechselt. Konstruieren Sie die resultierende Kennlinie einmal zur Übung und nehmen Sie an $U_{EBX} \approx 700$ mV, $U_{ECsat} \approx 200$ mV (was würde passieren wenn $U_{ECsat} > U_{EBX}$?). Das Ergebnis ist eine Übertragungskennlinie mit höherer Steilheit im Verlauf zwischen "on" und "off" Zustand. Die Ausgangsspannung der Transistorstufe Q_3 steuert den im Kapitel zuvor behandelten Transistor-Schalter an.