



Skriptum zur  
Vorlesung  
**Elektronik II**  
– Schaltungstechnik –  
SS 2005

## Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                                    |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Netzwerktheorie für Schaltungsentwickler</b>                                    | <b>1</b>  |
| 1.1      | Herleitung der Kirchhoffschen Regeln<br>aus den Maxwellschen Gleichungen . . . . . | 1         |
| 1.2      | Gekoppelte Induktivitäten (Übertrager) . . . . .                                   | 4         |
| 1.3      | Einige Eigenschaften linearer Netzwerke . . . . .                                  | 9         |
| 1.3.1    | Wirkungsfunktion . . . . .                                                         | 12        |
| 1.3.2    | Verlustleistung von n-Polen . . . . .                                              | 13        |
| <b>2</b> | <b>Anmerkungen zur Entwicklung elektronischer Schaltungen</b>                      | <b>18</b> |
| <b>3</b> | <b>Klassifizierung von Verstärkern</b>                                             | <b>22</b> |
| <b>4</b> | <b>Einstellung und Stabilisierung des Arbeitspunktes</b>                           | <b>27</b> |
| 4.1      | Berechnung des Arbeitspunktes . . . . .                                            | 27        |
| 4.2      | Einfluss der Temperatur auf den Arbeitspunkt (AP) . . . . .                        | 33        |
| 4.3      | Weitere Kriterien bei der Einstellung des AP . . . . .                             | 42        |
| 4.3.1    | Aussteuerbereich . . . . .                                                         | 42        |
| 4.3.2    | Signalein-/auskopplung . . . . .                                                   | 42        |
| 4.3.3    | Wärmeleitung . . . . .                                                             | 44        |
| 4.4      | Einstellung des Arbeitspunktes bei Feld-<br>effekttransistoren (FET) . . . . .     | 48        |
| 4.4.1    | Kennlinien der n-Kanal-Typen . . . . .                                             | 48        |
| <b>5</b> | <b>Die Transistorgrundsaltungen im Kleinsignalbetrieb</b>                          | <b>52</b> |
| 5.1      | NF-Eigenschaften der Grundsaltungen mit Bipolar-<br>Transistoren . . . . .         | 52        |
| 5.2      | NF-Eigenschaften der Grundsaltungen mit Feldeffekt-<br>Transistoren . . . . .      | 61        |
| 5.3      | Eigenschaften und Anwendungen<br>der Grundsaltungen . . . . .                      | 62        |
| 5.4      | Eigenschaften der Grundsaltungen bei hohen Frequenzen . .                          | 65        |
| 5.4.1    | HF-Eigenschaften der EGS . . . . .                                                 | 66        |
| 5.4.2    | Verstärkungs-Bandbreite Produkt . . . . .                                          | 70        |
| 5.4.3    | HF-Eigenschaften der Grundsaltungen mit Feldef-<br>fekttransistoren . . . . .      | 70        |

---

|          |                                                                                                            |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>6</b> | <b>Rückgekoppelte Schaltungen</b>                                                                          | <b>72</b>  |
| 6.1      | Motivation aus Sicht der Verstärker-Optimierung . . . . .                                                  | 72         |
| 6.2      | Systematische Untersuchung von Rückkopplungen von Verstärkerzweiten . . . . .                              | 76         |
| 6.3      | Gegengekoppelte Netzwerke mit Störung . . . . .                                                            | 86         |
| 6.4      | Rückgekoppelte Vierpole . . . . .                                                                          | 100        |
| 6.5      | Beispiele rückgekoppelter Schaltungen . . . . .                                                            | 109        |
| <b>7</b> | <b>Stabilität linearer Schaltungen</b>                                                                     | <b>120</b> |
| 7.1      | Mathematische Grundlagen . . . . .                                                                         | 120        |
| 7.1.1    | Laplace-Transformation (Fourier-Transformation) . . .                                                      | 120        |
| 7.2      | Bestimmung des Umkehrintegrals der Laplace-Transformation mit Hilfe des Residuen-Satzes . . . . .          | 125        |
| 7.3      | Bestimmung der Anzahl von Polen und Nullstellen einer Funktion mit Hilfe der Residuen . . . . .            | 131        |
| 7.4      | Das Wurzelortskriterium . . . . .                                                                          | 136        |
| 7.5      | Das Hurwitz-Kriterium . . . . .                                                                            | 139        |
| 7.6      | Stabilitätsanalyse mit dem Nyquist-Kriterium . . . . .                                                     | 143        |
| 7.7      | Pole auf der imaginären Achse . . . . .                                                                    | 154        |
| 7.8      | Vorgehensweise bei Polen auf der imaginären Achse in komplexen Netzwerken bei Computersimulation . . . . . | 159        |
| 7.9      | Das Nyquist-Kriterium in der Frequenzkennlinien-Darstellung                                                | 163        |
| <b>8</b> | <b>Leistungsverstärker</b>                                                                                 | <b>167</b> |
| 8.1      | Kenngrößen und Aussteuerungsgrenzen von Leistungsverstärkern . . . . .                                     | 167        |
| 8.2      | Berechnung der Lastellipse bei komplexer Last des Transistors                                              | 168        |
| 8.3      | Beschreibung der Verzerrung bei Übergang zur Großsignalaussteuerung . . . . .                              | 173        |
| 8.4      | Betriebsarten und Wirkungsgrad . . . . .                                                                   | 174        |
| 8.4.1    | Wirkungsgrad von Klasse A-Verstärkern . . . . .                                                            | 176        |
| 8.4.2    | Wirkungsgrad des bipolaren Emitterfolgers . . . . .                                                        | 185        |
| 8.4.3    | Verstärker im C-Betrieb . . . . .                                                                          | 202        |
| 8.5      | Beispiele für die Ausführung von Leistungsverstärkern . . . . .                                            | 209        |
| <b>9</b> | <b>Kopplung von Verlustleistung und Arbeitspunkt</b>                                                       | <b>221</b> |

---

|                                                                                                                |                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <b>10 Schaltungsstrukturen mit bestimmten Eigenschaften und Funktionen (für integrierte Analogschaltungen)</b> | <b>226</b>     |
| 10.1 Stromquellen und Stromspiegel . . . . .                                                                   | 227            |
| 10.2 Stromquellen mit Feldeffekttransistoren . . . . .                                                         | 241            |
| 10.3 Darlington-Schaltungen . . . . .                                                                          | 242            |
| 10.4 Quasistatische Eigenschaften des Darlington-Transistors . . . .                                           | 246            |
| 10.5 Der komplementäre Darlington-Transistor . . . . .                                                         | 251            |
| 10.6 Differenzverstärker (Stromschalter) . . . . .                                                             | 252            |
| 10.7 Aktive Last (Phasenaddierschaltung) . . . . .                                                             | 264            |
| <br><b>11 Operationsverstärker</b>                                                                             | <br><b>270</b> |
| 11.1 Eigenschaften idealer und realer Operationverstärker . . . . .                                            | 270            |
| 11.2 Dynamisches Verhalten des Operationsverstärkers . . . . .                                                 | 277            |
| 11.3 Das Bode-Diagramm . . . . .                                                                               | 279            |
| 11.4 Stabilität des rückgekoppelten Operationsverstärkers . . . . .                                            | 284            |
| 11.5 Universelle Frequenzgangskorrektur . . . . .                                                              | 286            |
| 11.6 Angepasste Frequenzkompensation (Lag-Kompensation) . . . .                                                | 291            |
| 11.7 Pol-Nullstellen-Kompensation (Lag-Lead-Kompensation) . . . .                                              | 293            |
| 11.8 Reine Pol-Kompensation (Lead-Kompensation) . . . . .                                                      | 297            |
| 11.9 Allgemeine Anmerkung zur Kompensation der Schleifen-<br>verstärkung . . . . .                             | 300            |
| 11.10 Berechnung von Operationsverstärker-Schaltungen . . . . .                                                | 302            |

# 1 Netzwerktheorie für Schaltungsentwickler

## 1.1 Herleitung der Kirchhoffschen Regeln aus den Maxwellschen Gleichungen

Zur Herleitung der Kirchhoffschen Knotenregel, nehmen wir an, dass für die Verschiebungsstromdichte  $\vec{D}$  gilt:  $\left| \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right| \ll \text{Leitungsstromdichte } \vec{J}$ . Dann wird aus der ersten Maxwellschen Gleichung:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{J} \quad (1.1)$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei:

$$\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = 0 = \text{div } \vec{J} \quad (1.2)$$

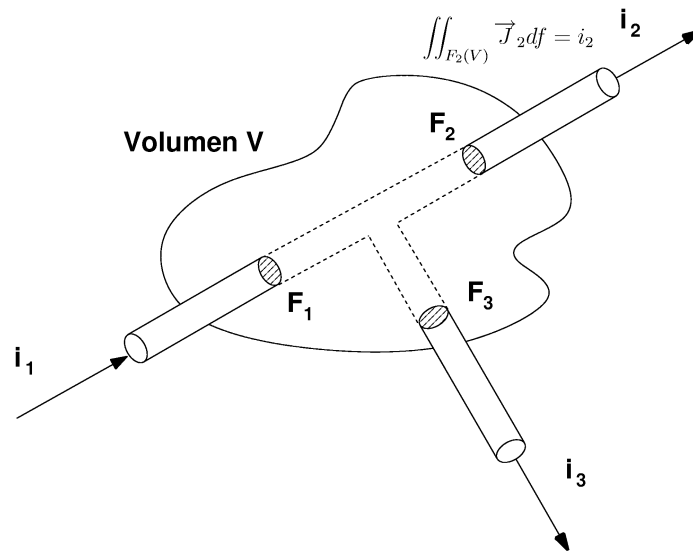


Abb. 1.1: Beispiel eines Überknotens mit dem Volumen  $V$ , in den drei Leiter hineinführen.

Integriere über beliebiges Volumen  $V$ ; Umwandlung mit Gaußschem Satz:

$$\iiint_V \text{div } \vec{J} dv = \iint_{F(V)} \vec{J} d\vec{f} = 0 \quad (1.3)$$

Sonderfall: Stromfluss nur in einzelnen Leitern (Anzahl  $Z$ ) mit Flächen  $F_n$  ( $n=1\dots Z$ ). Damit wird Gl. (1.3) zu:

$$\iint_{F(V)} \vec{J} d\vec{f} = \sum_{n=1}^Z \iint_{F_n} \vec{J} d\vec{f} = \sum_{n=1}^Z i_n = 0 \quad (1.4)$$

Man bezeichnet Gl. (1.4) auch als Knotenregel. Wird das Volumen  $V$  als Knoten interpretiert und  $Z$  als die, in den Knoten führenden Zweige, erhält man die allgemeine Form der Kirchhoffschen Knotenregel. Sie gilt demnach für beliebige Anordnungen (Strukturen) im Inneren des Volumens. z.B. auch für Überknoten oder Volumina (z.B. Halbleitersubstrat).

Zur Herleitung der Kirchhoffschen Umlaufregel wird die zweite Maxwellsche Gleichung betrachtet:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (1.5)$$

$\vec{E}$  genügt der Materialgleichung ( $\kappa$  Leitfähigkeit in  $\frac{1}{\Omega m}$ )

$$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}_q) \quad (1.6)$$

$E_q$  ist eine durch fremde elektromotorische Kraft erzeugte eingeprägte Feldstärke. Bilde Flächenintegral über die Fläche, die der Stromkreis aufspannt mit Gl. (1.5):

$$\iint_F \text{rot } \vec{E} d\vec{f} = - \iint_F \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} d\vec{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \vec{B} d\vec{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \phi \quad (1.7)$$

Mit Stokeschen Satz:

$$\iint_F \text{rot } \vec{E} d\vec{f} = \oint_{C(F)} \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \phi \quad (1.8)$$

Mit  $\vec{E}$  aus Gl. (1.6):

$$\oint_{C(F)} \frac{\vec{J}}{\kappa} d\vec{s} - \oint_{C(F)} \vec{E}_q d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \phi \quad (1.9)$$

Liegt die elektromotorische Kraft in Form konzentrierter Spannungsquellen  $U_q$  vor, so gilt:

$$\oint_{C(F)} \frac{i}{\kappa A} ds - \sum_{U_{mlauf}} u_q = -\frac{\partial}{\partial t} \phi \quad (1.10)$$

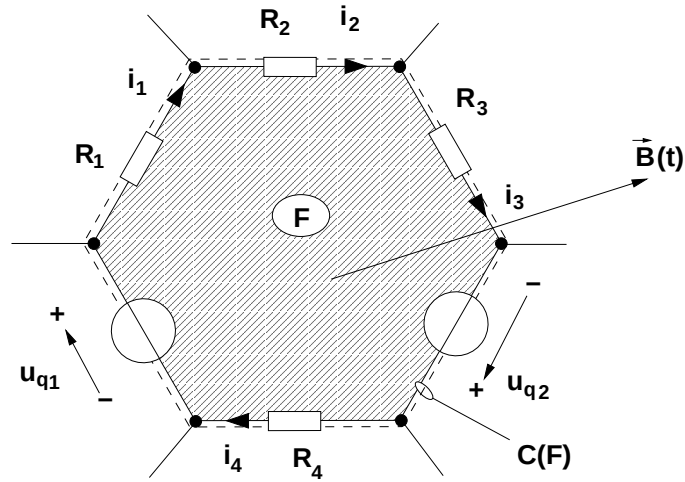


Abb. 1.2: Beispiel eines Maschenumlaufes.

Mit dem Ohmschen Gesetz folgt dann:

$$\sum_{Umlauf} i_n R_n - \sum_{Umlauf} u_{qm} = -\frac{\partial}{\partial t} \phi \quad (1.11)$$

Der Term:  $-\frac{\partial}{\partial t} \phi$  stellt den Induktionsfluss dar. Wird der Umlauf um die Fläche als Masche interpretiert erhält man die allgemeine Form der Kirchhoffschen Maschenregel. Wird der Induktionsfluss durch den Strom  $i_{jj}$  im eigenen Leiter oder durch den Strom  $i_{jk}$  von anderen Leitern hervorgerufen, gilt:

$$\phi = \phi_j = \sum_{k=1}^N L_{jk} i_k \quad (1.12)$$

$L_{jj}$  ist die Eigeninduktivität,  $L_{jk}$  die Gegeninduktivität zwischen dem betrachteten Umlauf (Schleife, Masche j) und dem, zum Fluss durch den Umlauf beitragenden weiteren N-1 Leitern. Im folgenden gilt:  $L_{jj} = L_j$ .

## 1.2 Gekoppelte Induktivitäten (Übertrager)

**Lenzsche Regel:** Wird durch den magnetischen Fluß eines Primärstromes (z. B.  $i_1 \rightarrow \Phi_1$ ) ein Sekundärstrom ( $i_2$ ) hervorgerufen, so erzeugt dieser Sekundärstrom seinerseits ein magnetisches Feld, dessen Fluß ( $\Phi_{12}(i_2)$ ) dem des Primärfeldes entgegengerichtet ist.

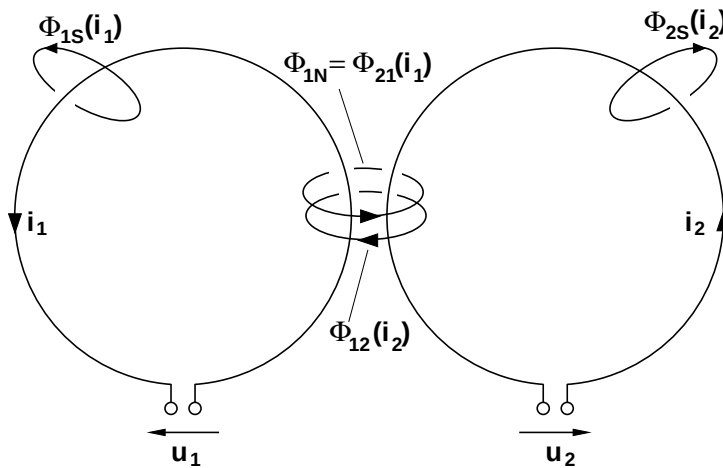


Abb. 1.3: Beispiel gekoppelter Induktivitäten.

Der von der Primärschleife erzeugte Fluß  $\Phi_1$  durchsetzt nur mit dem Teil des Nutzflusses  $\Phi_{1N}$  die Sekundärschleife. Der restliche Fluß  $\Phi_{1S}$  ist ein Streufluß.

$$\Phi_1 = \Phi_{1N} + \Phi_{1S} \quad (1.13)$$

Der Kopplungsgrad (oder kurz die Kopplung)  $k$  ist definiert als

$$k = \frac{\Phi_{1N}}{\Phi_1} \quad (1.14)$$

Wird eine Schleife mehrfach gewunden, so multipliziert sich der Fluß mit der Anzahl  $N$  der Windungen. Es gilt dann im verlustlosen Fall ( $R_n = 0$ ) für die in einer Schleife induzierte Spannung mit Gl. (1.11) für  $i_2 = 0$ :

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \big|_{i_2=0} \quad (1.15)$$

bzw. im Frequenzbereich:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 \big|_{L_2=0} \quad (1.16)$$



Als Leerlaufspannung in der sekundären Schleife ( $N_2$  Windungen) ergibt sich gemäß Lenzscher Regel (vgl. Abb. (1.3) )

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_{1N}}{dt} \stackrel{(1.14)}{=} N_2 k \frac{d\Phi_1}{dt} \stackrel{(1.15)}{=} N_2 k \frac{L_1}{N_1} \frac{di_1}{dt} \Big|_{i_2=0} \quad (1.17)$$

Aus der Feldberechnung von Spulen ergibt sich der allgemeine Zusammenhang  $N^2 = LA_L$  ( $A_L$  = Induktivitätsfaktor). Bei gleichem Induktivitätsfaktor für beide Schleifen gilt

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (1.18)$$

$$(1.17) \Rightarrow u_2(t) = \underbrace{k\sqrt{L_1 L_2}}_{L_{21}} \frac{di_1}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} \Big|_{i_2=0}, \quad (1.19)$$

worin die Definition

$$L_{21} = L_{12} = M := k\sqrt{L_1 L_2} \quad (1.20)$$

verwendet wurde.

Gl. (1.19) lautet im Frequenzbereich

$$\underline{U}_2 = j\omega L_{21} \underline{I}_1 \Big|_{\underline{I}_2=0} \quad (1.21)$$

Analog ergibt sich im Fall  $\underline{I}_1 = 0$  (Beachte zuvor gewählte Richtungen für Spannungen und Ströme)

$$\underline{U}_1 = -j\omega L_{12} \underline{I}_2 \Big|_{\underline{I}_1=0} \quad (1.22)$$

$$\text{und } \underline{U}_2 = -j\omega L_2 \underline{I}_2 \Big|_{\underline{I}_1=0} \quad (1.23)$$

Gemäß Überlagerungssatz gilt im Frequenzbereich

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega L_{12} \underline{I}_2 \quad (1.24)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_{21} \underline{I}_1 - j\omega L_2 \underline{I}_2 \quad (1.25)$$

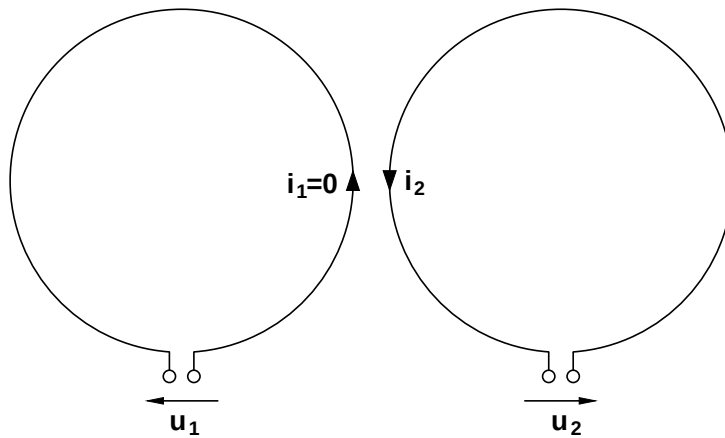


Abb. 1.4: Spannungen und Ströme an den gekoppelten Induktivitäten nach Abb. 1.3.

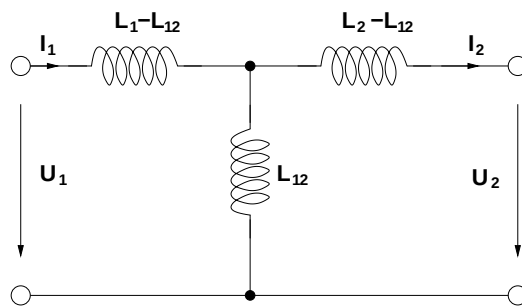


Abb. 1.5: Ströme und Spannungen für die Anordnung in Abb. 1.4

**Beachten:** Die Vorzeichen von  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{U}_1$  und  $\underline{U}_2$  hängen von der jeweiligen Orientierung der Schleifen zueinander und den gewählten Pfeilrichtungen ab. Sie sind daher für jede Anordnung individuell herzuleiten (Lenzsche Regel, Verbraucherzählpfeilsystem. Tipp: Verbraucher anschließen, um festzustellen, ob  $I \cdot R$  die gleiche Richtung wie die gewählte Spannung hat)

Ein einfaches Ersatzschaltbild in Abb. (1.5) kann direkt aus den Koppungsgleichungen (1.24), (1.25) angegeben werden. Es hat immer die gleiche Struktur, jedoch hängen die Vorzeichen von der jeweiligen Anordnung ab.

Um für die Bestimmung der Vorzeichen nicht immer die Korkenzieherregel an geometrischen Anordnungen durchführen zu müssen, wird häufig die „Punkt“-Konvention verwendet:

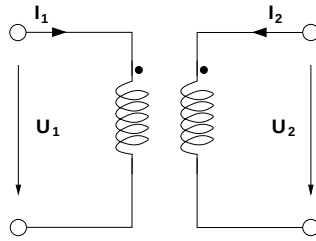


Abb. 1.6: Zur Definition der Punktconvention

**Es gilt:** Besitzen beide Ströme die gleiche Richtung bezogen auf ihren jeweiligen Punkt, dann entspricht der, von beiden Strömen erzeugte Fluß, der Lenzschen Regel.

Für den Übertrager in Abb. 1.6 gilt dann:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega L_{12} \underline{I}_2 \quad (1.26)$$

$$\underline{U}_2 = -j\omega L_{21} \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \quad (1.27)$$

Ein weiteres häufig benutztes Ersatzschaltbild verwendet einen idealen Übertrager und transformiert sämtliche nicht idealen Elemente auf die Primärseite:

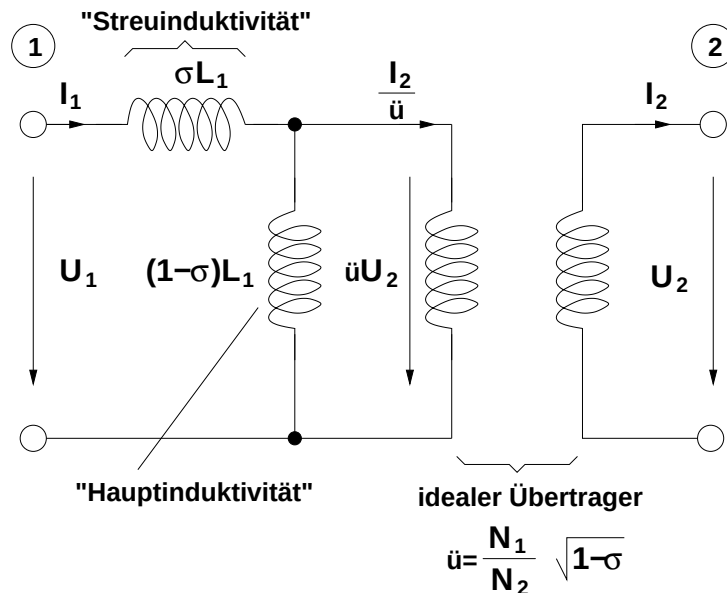


Abb. 1.7: Ersatzschaltbild mit idealem Übertrager

Es läßt sich identisch aus den Übertragergleichungen herleiten mit den Definitionen:

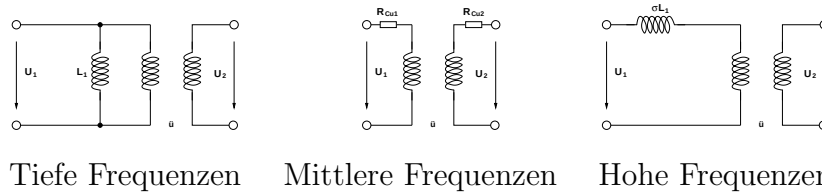
$$\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad (1.28)$$

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{1 - \sigma} \quad \text{mit} \quad (1.29)$$

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \frac{L_1}{L_2} \quad (1.30)$$

Falls nicht zu vernachlässigen (meist im mittleren Frequenzbereich), sind noch Wicklungswiderstände  $R_{Cu1,2}$  in Reihe zu den Toren (1) und (2) einzuführen.

Für starke Kopplung gilt  $k \rightarrow 1 \Rightarrow \sigma \rightarrow 0$  und das Ersatzschaltbild läßt sich für tiefe, mittlere und hohe Frequenzen vereinfachen:



### 1.3 Einige Eigenschaften linearer Netzwerke

**Voraussetzungen:** Lineare oder linearisierte Netzwerke (Kleinsignal), komplexe (Phasoren) Schreibweise oder Augenblickswerte, stationärer Zustand, sin-förmige Quellen gleicher Frequenz.

**Knotenspannungsanalyse:** Anzahl K Knoten, keine idealen Übertrager und Spannungsquellen,  $N=K-1$  unabhängige Knotengleichungen des zusammenhängenden Graphen.

Es gilt dann für alle Netzwerke:

$$[\underline{\mathbf{Y}}] [\underline{\mathbf{U}}] = [\underline{\mathbf{I}}] \quad (1.31)$$

oder

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} & \cdots \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} & \cdots \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Knoten 1} \\ \text{Knoten 2} \\ \text{Knoten 3} \\ \vdots \end{matrix} \quad (1.32)$$

#### Aufbau des Gleichungssystems:

- $[\underline{\mathbf{Y}}]$  Hauptdiagonale: Summe aller Admittanzen, die den jeweiligen Knoten mit allen anderen verbinden. Positives Vorzeichen. Ausnahme: Gekoppelte Induktivitäten.
- $[\underline{\mathbf{Y}}]$  Koppeladmittanzen:  $\underline{Y}_{ik}$  verbindet Knoten i mit Knoten k. Immer negatives Vorzeichen.
- $[\underline{\mathbf{U}}]$  Knotenpotentiale:  $\underline{U}_i$  ist die Spannung zwischen Knoten i und dem Bezugsknoten. Richtung von  $\underline{U}_i$  weist immer auf Bezugsknoten.
- $[\underline{\mathbf{I}}]$  Urstromquelle: Unabhängige Stromquellen, die in den jeweiligen Knoten einspeisen. Positives Vorzeichen, wenn Quellenstrom in den Knoten hineinfließt.

**Sonderfall:** Netzwerk enthält nur RLCM Elemente:  $[\underline{\mathbf{Y}}] = [\underline{\mathbf{Y}}]^T$  d.h. Knotenadmittanzmatrix  $[\underline{\mathbf{Y}}]$  ist symmetrisch ( $\underline{Y}_{ij} = \underline{Y}_{ji}$ ).

**Anschauliche Begründung:** Zwischen dem Knoten i und j ist die gleiche Admittanz wie zwischen dem Knoten j und i. (Admittanz hat die gleiche Eigenschaft in beiden 'Richtungen', da sie nicht die Richtung unterscheiden kann).

**Folgerung:** Netzwerke aus RLCM Elementen (auch ideale Übertrager) sind reziprok. D.h. der Ort von Wirkung und Ursache kann ausgetauscht werden, ohne dass sich das Verhältnis von Ursache und Wirkung ändert, (Beweis durch Satz von Tellegen).

Beispiel:

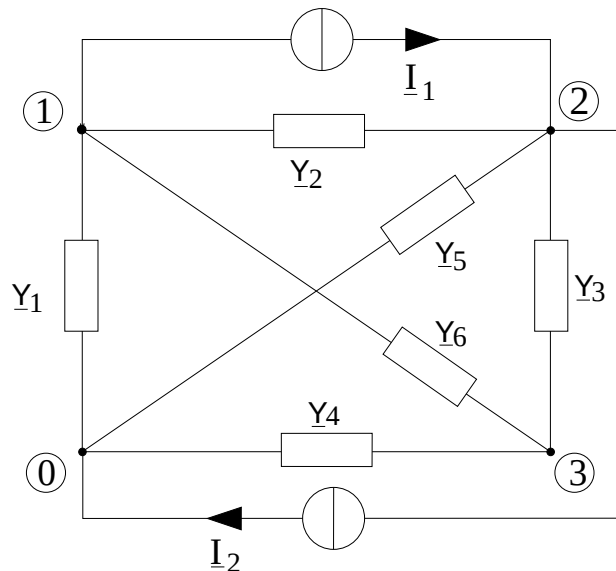


Abb. 1.8: Beispiel eines linearen Netzwerkes.

Aus den Knotengleichungen für die unabhängigen Knoten (hier 1-3 gewählt) folgt unmittelbar nach Umstellen  $[\underline{\mathbf{Y}}] [\underline{\mathbf{U}}] = [\underline{\mathbf{I}}]$ :

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_6 & -\underline{Y}_2 & -\underline{Y}_6 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 & -\underline{Y}_3 \\ -\underline{Y}_6 & -\underline{Y}_3 & \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{I}_1 \\ \underline{I}_1 - \underline{I}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

$\Rightarrow [\underline{\mathbf{Y}}]$  ist symmetrisch, reziprok.

Wird  $I_1$  durch eine gesteuerte Quelle ersetzt, z.B.:  $I_1 = S(U_3 - U_1)$  so verschwindet  $I_1$  auf der rechten Seite des Gleichungssystems und die Beiträge der Steuer-Verstärkung (hier Steilheit  $S$  oder  $g_m$ ) werden mit dem entsprechenden Vorzeichen in die Knotenadmittanzmatrix eingetragen:

$$[\underline{\mathbf{Y}}'] = \begin{pmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_6 + S & -\underline{Y}_2 & -\underline{Y}_6 - S \\ -\underline{Y}_2 - S & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 & -\underline{Y}_3 + S \\ -\underline{Y}_6 & -\underline{Y}_3 & \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

$$[\underline{\mathbf{Y}}'] = [\underline{\mathbf{Y}}] + \begin{pmatrix} +S & 0 & -S \\ -S & 0 & +S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

D.h. zu der symmetrischen Matrix  $[\underline{\mathbf{Y}}]$  wird eine unsymmetrische Matrix  $[\underline{\mathbf{Y}}']$  addiert. Daraus folgt, dass die Gesamtschaltung unsymmetrisch ist und nicht mehr reziprok!

Die Lösung des Gleichungssystems<sup>1</sup>  $[\underline{\mathbf{Y}}] [\underline{\mathbf{U}}] = [\underline{\mathbf{I}}]$  kann bei kleineren Gleichungssystemen mit Hilfe der Cramerschen Regel erfolgen:

$$U_i = \frac{\text{Det}([\underline{\mathbf{Y}}_1] [\underline{\mathbf{Y}}_2] \dots [\underline{\mathbf{Y}}_{(i-1)}] [\underline{\mathbf{I}}] [\underline{\mathbf{Y}}_{(i+1)}] \dots [\underline{\mathbf{Y}}_N])}{\text{Det}([\underline{\mathbf{Y}}])} \quad (1.36)$$

Darin sind  $[\underline{\mathbf{Y}}_n]$  ( $n=1\dots N$ ) die Vektoren der Spalten  $n$  der Knotenadmittanzmatrix,  $[\underline{\mathbf{I}}]$  ist der Vektor der eingepprägten Urströme,  $\text{Det}()$  bezeichnet die Determinante der Matrix in Klammern. Die Determinante der Zählers kann nach der  $i$ -ten Spalte entwickelt werden (Laplace'scher Entwicklungssatz):

$$U_i = \frac{\sum_{n=1}^N D_{ni} I_n}{\text{Det}([\underline{\mathbf{Y}}])} \quad (1.37)$$

mit  $D_{ni}$ : Adjunkte 1.Ordnung.  $D_{ni} = (-1)^{n+i}$ . Determinante der Untermatrix von  $[\underline{\mathbf{Y}}]$  durch Streichen der  $i$ -ten Spalte und der  $n$ -ten Zeile.

---

<sup>1</sup>Das inhomogene Gleichungssystem  $[\underline{\mathbf{Y}}] [\underline{\mathbf{U}}] = [\underline{\mathbf{I}}]$  ist genau dann für jede rechte Seite  $[\underline{\mathbf{I}}]$  eindeutig lösbar, wenn die Knotenadmittanzmatrix  $[\underline{\mathbf{Y}}]$  regulär ist.

( $\text{Zeilenzahl}[\underline{\mathbf{Y}}] = \text{Spaltenzahl}[\underline{\mathbf{Y}}] \Leftrightarrow [\underline{\mathbf{Y}}]$  ist quadratisch).

Anschaulich läßt sich dies dadurch erklären, dass für jeden  $N$ -dimensionalen Vektor  $\underline{\mathbf{U}}$  eine Lineartransformation durch  $\underline{\mathbf{Y}}$  existiert, die  $\underline{\mathbf{U}}$  auf  $\underline{\mathbf{I}}$  abbildet.

Anschaulich: Die Spannung am Knoten  $i$  ergibt sich aus der Überlagerung (Summe) der Wirkung der einzelnen Quellenströme  $I_n$  in die  $N$  unabhängigen Knoten.

### 1.3.1 Wirkungsfunktion

Betrachtet man die Wirkung von nur einer Quelle ( $\underline{I}_n = \underline{I}$ ) auf nur einen Knoten ( $\underline{U}_i = \underline{U}$ ), dann sind nach Gl. (1.37) alle Spannungen und Ströme, die in der Schaltung auftreten, dem Strom dieser Quelle proportional:

$$U = \frac{D_{ni}}{\text{Det}([\underline{\mathbf{Y}}])} \underline{I} = \underline{Z}_{ni} \underline{I} = \underline{H} \underline{I} \quad (1.38)$$

$n$  und  $i$  sind entsprechend der Wahl zu belegen. Die Spannung  $\underline{U}$  beschreibt hier die Wirkung, die eine Ursache (Quellenstrom  $\underline{I}$ ) hervorruft. Die dabei auftretende allgemeine Proportionalitätskonstante  $\underline{H}$  (hier speziell  $\underline{Z}$ ) wird Wirkungs- oder Systemfunktion genannt. Analog der hier gezeigten Herleitung für eine Impedanz-Wirkungsfunktion lassen sich ebenso Wirkungsfunktionen:

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}; \underline{H} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}; \underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \quad (1.39)$$

mit den gleichen Eigenschaften herleiten:

$$\text{WIRKUNGSFUNKTION} = \frac{\text{WIRKUNG}}{\text{URSACHE}} \quad (1.40)$$

Die Wirkungsfunktionen gehen immer durch Determinanten-Bildung aus der Koeffizientenmatrix (hier: Knotenadmittanzmatrix) hervor. Jedes Element der Determinanten hat die Form:  $G + sC + \frac{1}{sL}$  mit  $s = \sigma + j\omega$ . Die Determinante besteht also aus Produkten solcher Terme. Negative Potenzen von  $\underline{H}$  in  $s$  können immer durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit  $s$  in einer geeignet hohen Potenz eliminiert werden. Damit läßt sich für die Wirkungsfunktion allgemein schreiben:

$$\underline{H}(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} \quad (1.41)$$

Da ein Polynom  $n$ -ter Ordnung genau  $n$ -Wurzeln hat, können die Zähler- und Nennerpolynome der Wirkungsfunktion in Faktoren zerlegt werden:



$$H(s) = H_0 \frac{(s - s_{n1})(s - s_{n2}) \dots (s - s_{nm})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pn})} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_{ni})}{\prod_{j=1}^n (s - s_{pj})} \quad (1.42)$$

Gl. (1.42) nennt man Produktdarstellung der Wirkungskfunktion. Für physikalische Systeme gilt:  $m \leq n$ ;  $\underline{H}(s)$  reell und rational in  $s$ . Darin sind:

- $s_{ni}$  ( $i = 1 \dots m$ ) die Nullstellen des Zählerpolynoms
- $s_{pi}$  ( $i = 1 \dots n$ ) die Nullstellen des Nennerpolynoms, bzw. die Pole der Wirkungskfunktion

unter der Voraussetzung, dass  $\underline{H}(s)$  irreduzibel ist, d.h. dass keines der  $s_{ni}$  gleich einem der  $s_{pi}$  ist. In diesem Fall bezeichnet man die größere der beiden Zahlen  $m, n$  als den Grad von  $\underline{H}(s)$ .

Wichtig: Die Wirkungskfunktion einer linearen Schaltung ist von hoher Bedeutung. Sie beschreibt das System bezüglich der Wirkung auf eine gewählte Anregung (Ursache) vollständig. Bekanntestes Beispiels von Wirkungskfunktionen sind die Vierpolparameter (genauer: Zweitor) der verschiedenen Matritzen ( $[Y]$ ,  $[Z]$ ,  $[H]$ ,  $[G]$ ). Anhand der Herleitung lässt sich einfach erkennen, dass alle Wirkungskfunktionen einer Schaltung die Determinante ihrer Koeffizientenmatrix als Nennerpolynom haben. Die Pole aller Wirkungskfunktionen einer Schaltung sind damit identisch. Hierauf wird bei der Analyse der Stabilität zurückgegriffen.

### 1.3.2 Verlustleistung von n-Polen

Wegen des Satzes über die Erhaltung der Energie ist die gesamte Energie in einem abgeschlossenen System gleich Null. In einem beliebigen Netzwerk mit  $Z$  Zweigen gilt daher (im Zeit- und Frequenzbereich):

$$0 = \sum_{z=1}^Z u_z i_z = \sum_{z=1}^Z P_z = \sum_{z=1}^Z (P_{Qz} + P_{Vz}) \quad (1.43)$$

Darin ist  $u_z$  die Spannung über einen Zweig,  $i_z$  der Strom in dem Zweig.  $P_z$  ist die Verlustleistung des Zweiges. Sie setzt sich zusammen aus der Leistung einer sich u.U. in dem Zweig befindenden Quelle  $P_{Qz}$

(Verlustleistung negativ) und der Verlustleistung  $P_{Vz}$  der Verbraucher in dem Zweig.

Gedankenexperiment: Alle Urquellen des Netzwerkes sollten als Stromquellen vorliegen (Vorgehen zur Umwandlung von Spannungsquellen wie bei der Knotenspannungsanalyse). Sämtlich Urquellen des Netzwerkes werden (unter Beibehaltung von Topologie und Werten) in einen eigenen N-Pol gelegt, das restliche Netzwerk befindet sich in einem zweiten N-Pol (vgl. Abb. 1.8). Es gilt dann für die Verlustleistung des Urquellen n-Pols:

$$P_Q = \sum_{\nu=1}^k P_{Q\nu} \quad (1.44)$$

mit  $k$  = Anzahl aller Urquellen.

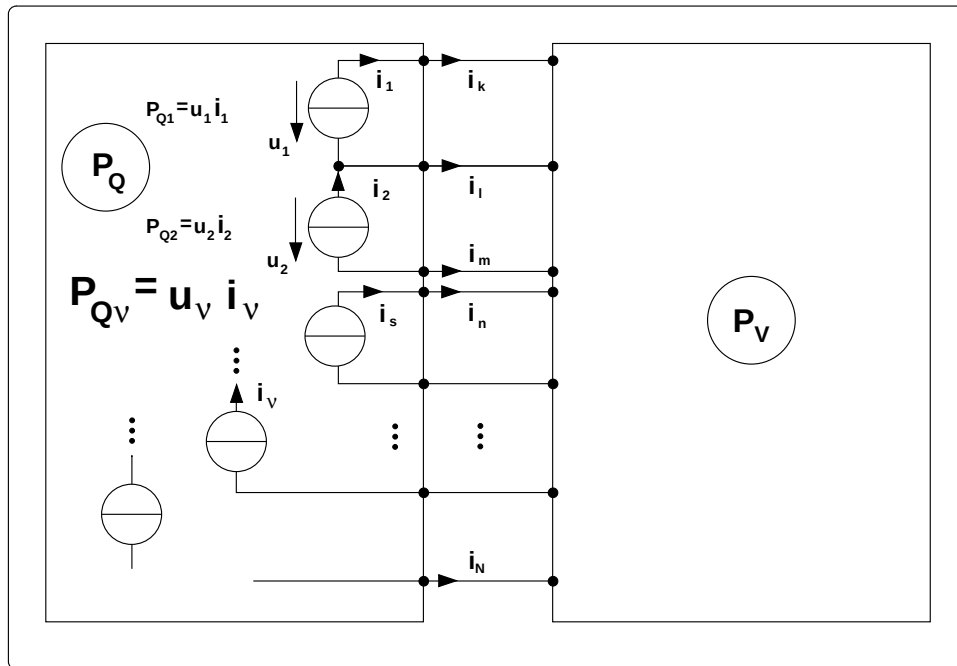


Abb. 1.9: Aufspaltung eines linearen Netzwerkes in ein Quellen- und ein Verbraucher N-Tor.

Abbildung (1.9) zeigt ein abgeschlossenes System, mit  $N$  Verbindungsknoten, in dem gilt:  $\sum P = 0$ .

Jede Stromquelle lässt sich identisch in zwei, gegen ein beliebig wählbares Potential  $\phi_\nu$  strömende Stromquellen umwandeln:

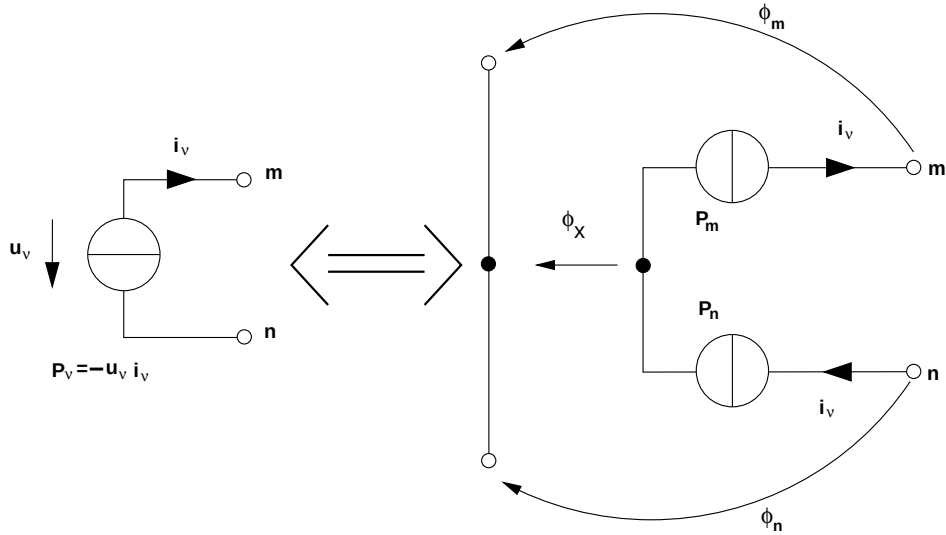


Abb. 1.10: Umwandlung einer potentialungebundenen ('floating') Quelle in zwei Quellen mit Potentialbezug  $\phi_\nu$ .

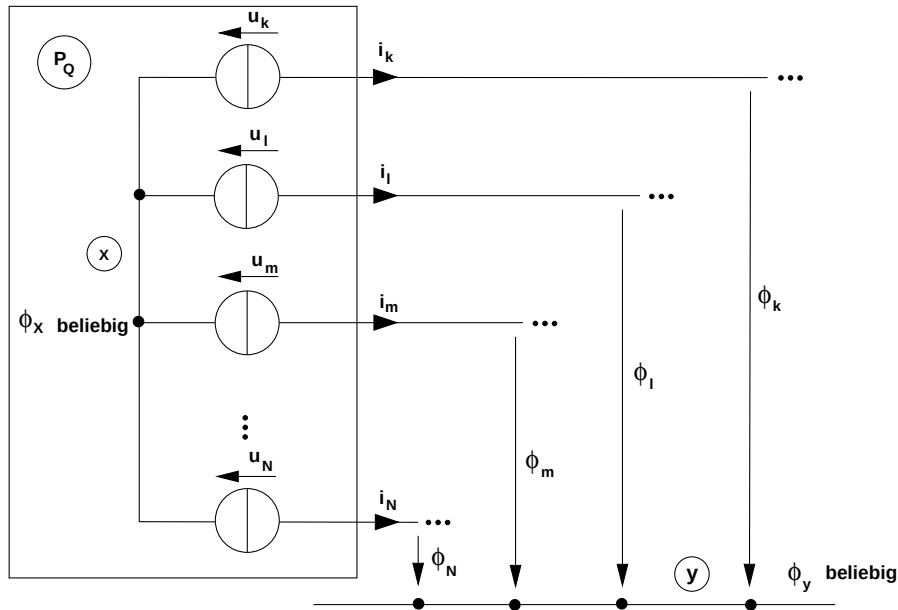
In Abbildung (1.10) gelten folgende Beziehungen:

$$P_\nu = P_m + P_n \quad (1.45)$$

$$= -(\phi_m - \phi_x) i_\nu - (\phi_x - \phi_n) i_\nu \quad (1.46)$$

$$P_\nu = -(\phi_m - \phi_n) i_\nu \quad (1.47)$$

D.h. die Leistung der Quelle ist unabhängig von der Wahl von  $\phi_x$ . Damit können sämtliche Quellen des linken n-Pols identisch in die Darstellung mit Potentialbezug umgezeichnet werden.


 Abb. 1.11: Umgewandelter Quellen-N-Pol mit Bezugspotential  $\phi_x$ .

Die in dem Urquell N-Pol erzeugte Leistung ist die Summe der Leistungen der N einzelnen Quellen.

$$P_Q = - \sum_{\nu=1}^N u_{\nu} i_{\nu}$$

Da  $\sum_{\nu=1}^N I_{\nu} = 0$  (Überknoten) kann  $\phi_x$  beliebig gewählt werden. Wird  $\phi_x = \phi_y$  gewählt, ergibt sich:

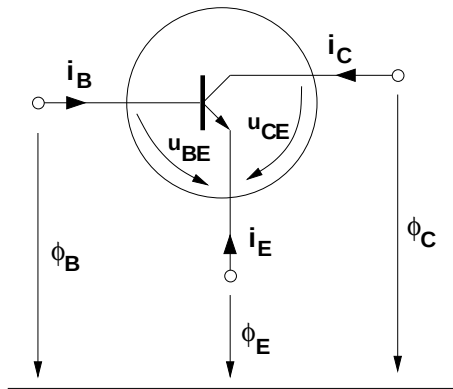
$$P_Q = - \sum_{\nu}^N \phi_{\nu} i_{\nu} \quad (1.48)$$

als die Summe der abgegebenen Leistung. Darin sind die  $\phi_{\nu}$  die Knotenpotentiale des Netzwerkes an den Knoten, an denen Stromquellen angeschlossen sind. Wegen  $P_V + P_Q = 0$  ist damit die Verlustleistung des passiven N-Pols:

$$= - P_Q \quad (1.49)$$

$$P_V = \sum_{\nu=1}^N \phi_{\nu} i_{\nu} \quad (1.50)$$

Beispiel: Verlustleistung eines Transistors:



$$P_V = \phi_B i_B + \phi_E i_E + \phi_C i_C$$

$$\text{Überknoten: } -i_E = i_B + i_C$$

$$P_V = (\phi_B - \phi_E) i_B + (\phi_C - \phi_E) i_C$$

$$\phi_B - \phi_E = U_{BE}$$

$$\phi_C - \phi_E = U_{CE}$$

$$P_V = U_{BE} i_B + U_{CE} i_C$$

## 2 Anmerkungen zur Entwicklung elektronischer Schaltungen

*Es ist wichtig darauf zu achten, dass die Bezeichnungen Entdeckungen erleichtern. In wundervoller Weise kann man so die Arbeit des Geistes reduzieren.*

*Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)*

Elektronische Schaltungen sind in der Praxis oft sehr komplex aufgebaut. Ihr Umfang geht in der Regel weit über die hier behandelten einfachen Grundsaltungen hinaus. Hinzu kommen eine Vielzahl von Optimierungs- und Qualitätskriterien, die der Entwickler bei seiner Arbeit berücksichtigen muss. Für einen Verstärker orientiert sich die Entwicklung u.a. an der Optimierung von Kriterien wie:

- Ein- und Ausgangsimpedanz, Anpassung, Reflektionsfaktor,
- Grenzfrequenzen, Frequenzgang, Phasengang, Gruppenlaufzeit,
- Minimale- maximale Eingangsspannung (Dynamikbereich),
- Linearität, Klirrfaktor, 1dB Kompressionspunkt,
- Offsetspannung,
- Temperaturdrift, minimale-, maximale Temperatur,
- Stabilität, Rückwirkung (Entkopplung),
- PSRR (Power Supply Rejection Ratio), CMRR ...

Für jedes dieser Kriterien kann die Schaltung mit den bekannten Methoden der Netzwerktheorie unter Zuhilfenahme der mathematischen Beschreibung der Bauelementeeigenschaften in dem jeweiligen Betriebsbereich analysiert werden. Oft ergeben sich schon bei kleineren Schaltungen komplizierte Ausdrücke die zwar ausgewertet, aber nur schwer oder gar nicht interpretierbar sind.

In diesen Fällen ist es dem Entwickler nicht mehr möglich, den untersuchten Sachverhalt in einer einfachen Modellvorstellung zu erfassen. Ein Gefühl für die ermittelte Aussage und damit auch ein Gefühl für die zu entwickelnde Schaltung kann nicht aufgebaut werden. Damit gibt man unweigerlich das mächtigste Instrument der Schaltungsentwicklung auf: die Intuition. Ohne Intuition können auch Kreativität und Phantasie nicht zielgerichtet eingesetzt werden und der Entwickler ergibt sich der Übermacht der Formeln und Daten.

Doch wie soll eine Schaltung dann gleichzeitig für alle Kriterien optimiert werden? Neben der Abhängigkeit der Schaltungsparameter von einzelnen Optimierungskriterien muß dafür zusätzlich die Abhängigkeit der einzelnen Kriterien voneinander bekannt sein. Eine Abhilfe möchte hier die moderne EDA (Elektronik Design Automation) Software anbieten (Software-Pakete (Frameworks) z.B. von Cadence oder Mentor). Sie erlauben die zu entwickelnde Schaltung einzugeben und die meisten Kriterien in Abhängigkeit verschiedener Parameter als Ergebnis von Simulationsdurchläufen darzustellen.

Die Nachteile einer solchen -zugegeben bequemen- Vorgehensweise sind beträchtlich. Zum Einen muss die Schaltung bereits bekannt sein um analysiert zu werden. Daher kann nur die Wirkung von Änderungen der Bauelementewerte ermittelt werden. Topologieänderungen sind natürlich möglich, setzen aber wieder ein Verständnis der Schaltung voraus um zielgerichtet eingesetzt werden zu können. Zum Anderen liefert eine Computersimulation immer nur eine Antwort auf genau das, was eingegeben wurde. Alternativen oder Varianten können so nicht ermittelt werden.

Der größte Nachteil einer Computersimulation ist aber, dass sie immer (von Konvergenzproblemen bei der Lösung der Koeffizientenmatrix abgesehen) ein Ergebnis liefert. Den Sinn oder Unsinn des Ergebnisses muss der Entwickler genau überprüfen. Das geht aber nur, wenn er schon vor dem Start der Simulation eine Erwartung an das Ergebnis hat. Wenn nicht, wird er das Ergebnis als *Das Ergebnis* hinnehmen. Die übliche Begründung für solcherart gewonnene Ergebnisse lautet dann in etwa „... *das kam halt in der Simulation heraus*“.

Dem Entwickler wird hiermit mit Nachdruck geraten, vor dem Start einer Simulation zunächst durch einfache Überlegungen eine Erwartung für das Ergebnis herzuleiten. Entspricht das Ergebnis dieser Erwartung, kann es (mit Vorsicht) akzeptiert werden. Entspricht es nicht der Erwartung oder kommen Zweifel auf, ist es angeraten, die Simulation bezüglich der Ein- und Ausgabeparameter sowie die Simulatoreinstellungen zu verifizieren. Natürlich sollte auch der Erwartungswert überprüft werden. In jedem Fall sollte nur mit dem Ergebnis weitergearbeitet werden, wenn Simulation und Erwartung übereinstimmen.

Diese Vorgehensweise hat sich in der Praxis als überaus effektiv erwiesen. Die Herleitung der Erwartung (investierte Zeit), verhilft dem Entwickler Intuition und Erfahrung zu mehr. Durch die Überprüfung der Ergebnisse sinkt die Fehlerquote und damit die Kosten für Überarbeitung/Neuentwicklung der Entwicklung.

Wie kann also eine Erwartung für ein Ergebnis erlangt werden? Die Antwort lautet *intuitive Schaltungsentwicklung*. Das prinzipielle Vorgehen hierfür beruht auf einfacher Modellbildung, wie sie in ähnlicher Form überall in der Elektrotechnik angewandt wird. Z.B. denkt beim Betrachten einer Schaltung mit Transistoren kein Schaltungsentwickler mehr über Diffusion von Ladungsträgern in der Basis nach. Ebenso denken Entwickler von Digitalschaltungen nicht mehr über Transistoren in ihren Logik-Gattern nach (und schon gar nicht über Diffusion).

Die intuitive Schaltungsentwicklung fasst die wesentlichen Zusammenhänge, Eigenschaften und Beobachtungen auf der Schaltungsebene in Modellen zusammen und verwendet diese für die Entwicklung und Optimierung der Schaltungen. Unter Modell ist bei der intuitiven Schaltungsentwicklung nicht nur die elektrische Ersatzschaltung sondern jede Art von schematischer Beschreibung zu verstehen. So ist z.B. die Beschreibung:

Eingangsstrom  $I_e$  steigt  $\Rightarrow$  Spannung an  $R_f$  steigt  $\Rightarrow$  Basis Emitterspannung sinkt  $\Rightarrow$  Kollektorstrom sinkt  $\Rightarrow$  Kollektorpotential steigt  $\Rightarrow$  Basispotential steigt (solange bis Gleichgewichtszustand)

kurz:  $I_e \uparrow \Rightarrow U_{RF} \uparrow \Rightarrow U_{BE} \downarrow \Rightarrow I_C \downarrow \Rightarrow U_{RC} \downarrow \Rightarrow U_{BE} \uparrow \Longleftrightarrow U_{BE} = const$  .

ein gut geeignetes intuitives Klein- und Großsignal-Modell zum Verständnis der Transimpedanzstufe in Abb.(2.1).

Zur Förderung und Schulung der intuitiven Modellbildung wird im weiteren Verlauf neben einer genauen aber leider meist unhandlichen Herleitung



und Darstellung von Eigenschaften und Sachverhalten auch von der Bildung intuitiver Modelle Gebrauch gemacht. In Vergleich mit der genauen Darstellung können so auch die Grenzen der einfacheren Modelle ermittelt werden. In diesem Zusammenhang werden auch Näherungen eingeführt deren Gültigkeitsbereich bei der Anwendung zu beachten und zu hinterfragen ist. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass übertriebene Genauigkeit bei der Schaltungsentwicklung aufgrund der Toleranzen der verwendeten Bauelemente meist nicht sinnvoll ist (**Ingenieurmäßiges Vorgehen**).

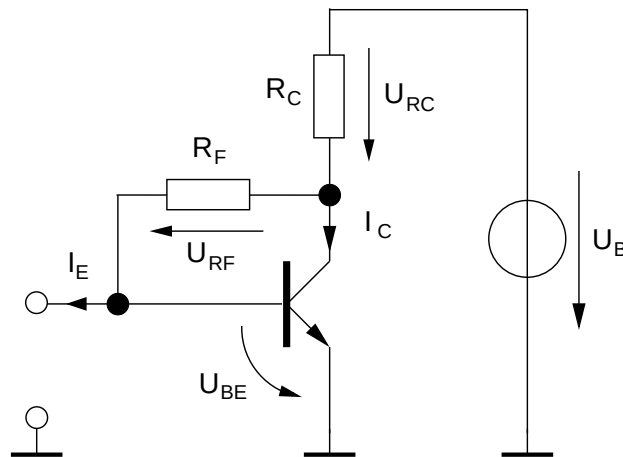


Abb. 2.1: Transimpedanzstufe zur Erläuterung der intuitiven Schaltungsanalyse.

### 3 Klassifizierung von Verstärkern

#### Einleitung

**Was ist ein Verstärker:** Schaltung mit einem oder mehreren aktiven Bauelementen (i.d. Regel Transistoren), mit der Eigenschaft, ein eingangsseitig eingespeistes Signal (Quelle) am Ausgang in vergrößerter (manchmal auch gewandelter) Form einem Abnehmer (Last, Wandler, Senke, ...  $\rightarrow$  Wirkung) zur Verfügung zu stellen.

Aus dieser Formulierung wird unmittelbar ersichtlich, dass die grundlegende Eigenschaft eines (linearen) Verstärkers durch die Wirkungsfunktion

$$\text{Wirkungsfunktion} = \frac{\text{Ausgangs(signal)größe}}{\text{Eingangs(signal)größe}} \quad (3.1)$$

beschrieben wird.

Zur **Klassifizierung** von Verstärkern könnten die verschiedensten Kriterien herangezogen werden. Die häufigsten sind:

- **Physikalische Repräsentation des Signals**
  - Spannungsverstärker,
  - Stromverstärker,
  - Leistungsverstärker.
- Bei der **Aussteuerung** genutzter Bereich der Übertragungskennlinie
  - Kleinsignalverstärker,
  - Großsignalverstärker.
- **Bandbreite der Signalübertragung**
  - Schmalbandverstärker (HF, ZF) :  
Eine absolute Zahl, bei welcher Frequenz HF (Hochfrequenz) beginnt und wo ZF (Zwischenfrequenz) endet, läßt sich nicht angeben, da von System zu System unterschiedlich (z.B. Handy  $\sim$  1GHz, Car Radar  $>$  70 GHz, Radio  $\sim$  100 MHz). Bei abwärts mischenden Systemen gilt aber immer  $f_{ZF} < f_{HF}$ .
  - Breitbandverstärker
    - \* Hochfrequenz(HF)-Verstärker

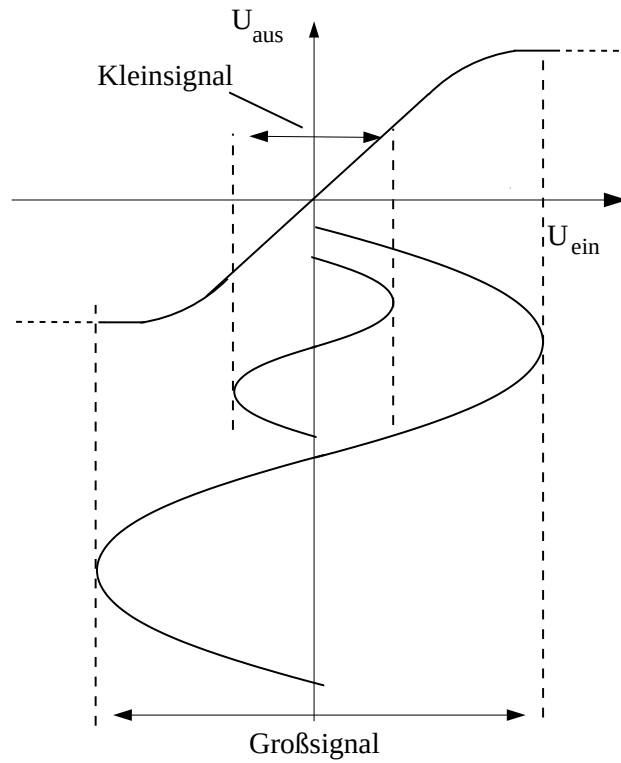


Abb. 3.1: Groß- und Kleinsignalaussteuerung (Signale müssen nicht symmetrisch zum Nullpunkt liegen).

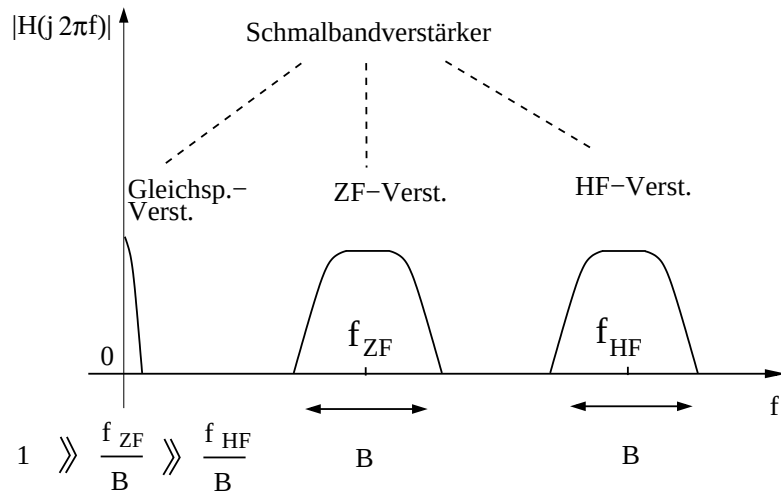


Abb. 3.2: Definition der Bandbreiten bei Schmalbandverstärkern.

\* Niederfrequenz(NF)-Verstärker

\* (Operationsverstärker)

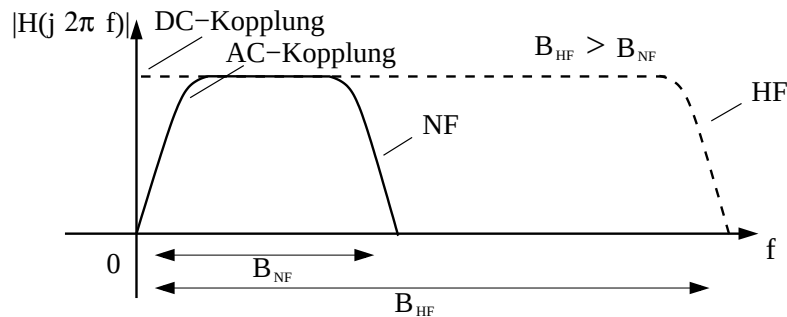


Abb. 3.3: Frequenzband Schmalbandverstärker.

Auch hier läßt sich keine Zahl angeben, wo der Niederfrequenzbereich endet und der Hochfrequenzbereich beginnt. Die Unterscheidung ist eher systembedingt und spiegelt die Gesichtspunkte und Kriterien des Entwicklers wider unter deren Maßgabe der Verstärker entwickelt wurde. Gesichtspunkte bei der Entwicklung von HF-Verstärkern sind z.B.: Reflektionsfaktor, Leitungstransformation, Skin Effekt, Abstrahlung, induktive parasitäre Elemente, magnetische Kopplung, Abstrahlung.

**Wichtig:** Breitbandverstärker gibt es mit und ohne Gleichspannungskopplung. Ohne Gleichspannungskopplung wird die Gleichspannungskomponente des Eingangssignals nicht übertragen und der Verstärker hat eine untere Grenzfrequenz (i.d. Regel Hz ... kHz Bereich). Bei zu hoher unterer Grenzfrequenz kommt es insbesondere bei der Übertragung von Datensignalen mit längeren 0- oder 1-Folgen zu Fehlern in der nachfolgenden Verarbeitung der verstärkten Signale.

Entsprechend der vorangegangenen Definition zählt auch der Operationsverstärker zu den Breitbandverstärkern. Er ist gleichspannungsgekoppelt und wird eher im Niederfrequenzbereich betrieben, obwohl es schon Operationsverstärker in Sonderanwendungen bis zum GHz-Bereich gibt.

#### – Gleichspannungsverstärker

Gemeint ist hier nicht, dass nur  $f = 0$  übertragen wird, denn dann könnte niemals die verstärkte Spannung (oder Strom) einen anderen Wert annehmen.

Der Begriff „Gleich“ drückt vielmehr aus, dass sich die zu verstärkende Größe so langsam ändert, dass der Verstärker hinsichtlich dieses Signals als quasistatisch betrachtet werden kann. Typische Anwendung von Gleichspannungsverstärkern ist z.B.  $\mu\text{V}$  und  $\text{mV}$  Eingang vom Spannungsmeßgeräten (Multimeter). Man findet in breitbandigen gleichspannungsgekoppelten Präzisionsverstärkern häufig auch eine Kombination aus einem Gleichspannungsverstärker und einem nicht gleichspannungsgekoppelten (ac coupled) Breitbandverstärker (sog. Hybridverstärker)

Durch die Aufteilung von Gleich- und Wechselspannungspfad

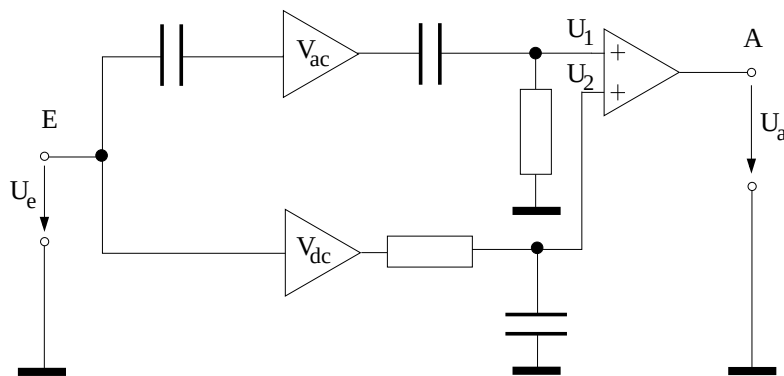


Abb. 3.4: Prinzipschaltung eines Hybridverstärkers.

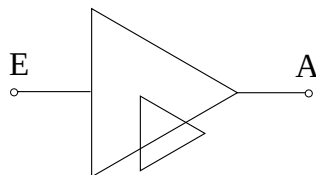


Abb. 3.5: Schaltungssymbol Hybridverstärker.

können die beiden Verstärker besser für ihre jeweiligen Aufgaben optimiert werden. Kompromisse in der Optimierung wie bei der Verwendung nur eines Verstärkers können vermieden werden (Optimierung: Gewinnen von Freiheitsgraden).

- **Lage des Arbeitspunktes (AP)** im Steuer-Kennlinienfeld des Transistors
  - A-Verstärker: Der AP liegt i.e. in der Mitte des linearen Kennlinienteils (Linearverstärker)
  - AB-Verstärker: Der AP ist in der unteren Kennlinienhälfte
  - B-Verstärker: Der AP ist im unteren Kennlinienknick (Gegentaktverstärker)(Gleichrichtung)
  - C-Verstärker: Der AP im Sperrbereich der Kennlinie (Impulsgenerator oder HF-Sendeverstärker)

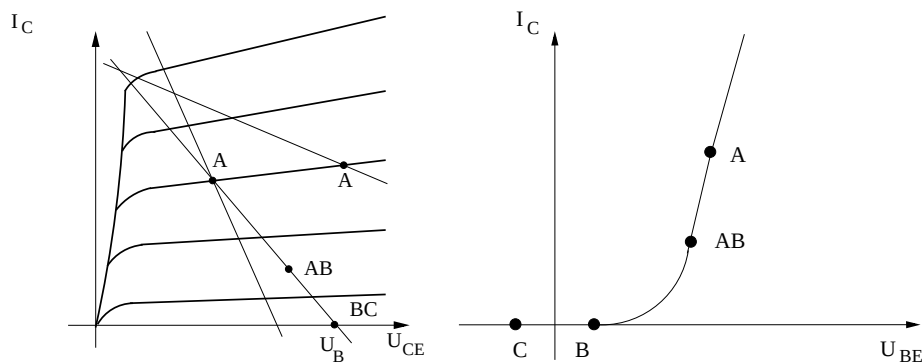
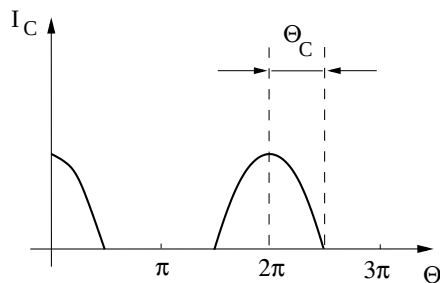


Abb. 3.6: Lage des Arbeitspunktes für verschieden Verstärkertypen. Links: Ausgangskennlinienfeld, rechts: Steuer-Kennlinie zur Definition des Arbeitspunktes.

Genauere Definition der Betriebsart über den Stromflußwinkel:



Man sagt auch „Der Verstärker/Transistor arbeitet in A, B, AB, oder C-Betrieb“.

## 4 Einstellung und Stabilisierung des Arbeitspunktes

### 4.1 Berechnung des Arbeitspunktes

**Was ist ein Arbeitspunkt?** Unter dem Arbeitspunkt versteht man den Punkt auf den Kennlinien eines Bauelementes, in dem es sich im Ruhezustand (ohne Anregung, ohne Signal) befindet.

Für einen Bipolartransistor ist der Arbeitspunkt durch Angabe des Parametersatzes  $\{I_B, U_{BE}, I_C, U_{CE}\}$  eindeutig bestimmt (in integrierten Schaltungen muß zusätzlich noch die Kollektor-Substrat-Spannung festgelegt werden). Meist stellen sich durch die Wahl eines Steuerparameters ( $I_B$  oder  $U_{BE}$ ) aufgrund der Beschaltung des Transistors die restlichen Parameter automatisch ein.

Aufgrund seiner Definition ist die Analyse des Arbeitspunktes eine statische bzw. quasistatische Analyse im Großsignalbetrieb des Transistors (nicht-lineare Gleichungen). D.h. die bezüglich des Arbeitspunktes zu analysierende Schaltung kann vereinfacht werden, indem:

- Kapazitäten als Leerlauf ( $\underline{Z} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty$ ),
- Induktivitäten als Kurzschluß ( $\underline{Z} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega L \rightarrow 0$ ),
- Signalstromquellen als Leerlauf (vgl. Abb. 4.1) und
- Signalspannungsquellen als Kurzschluß (vgl. Abb. 4.1) (evtl. vorhandene Gleichspannungsanteile müssen jedoch berücksichtigt werden)

berücksichtigt werden.

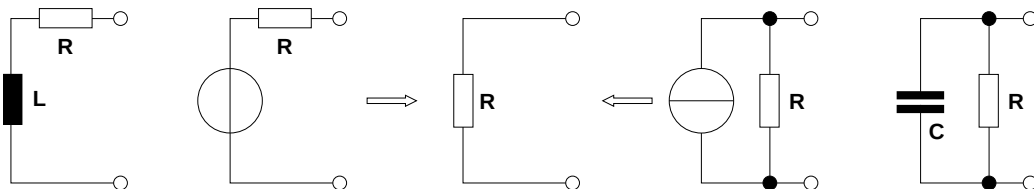
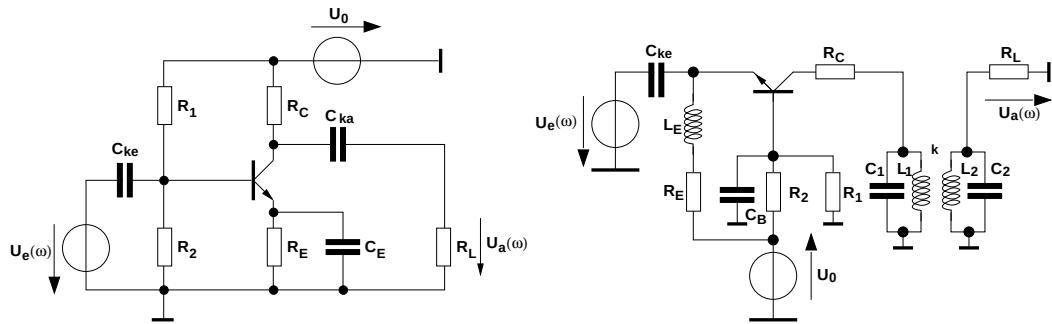


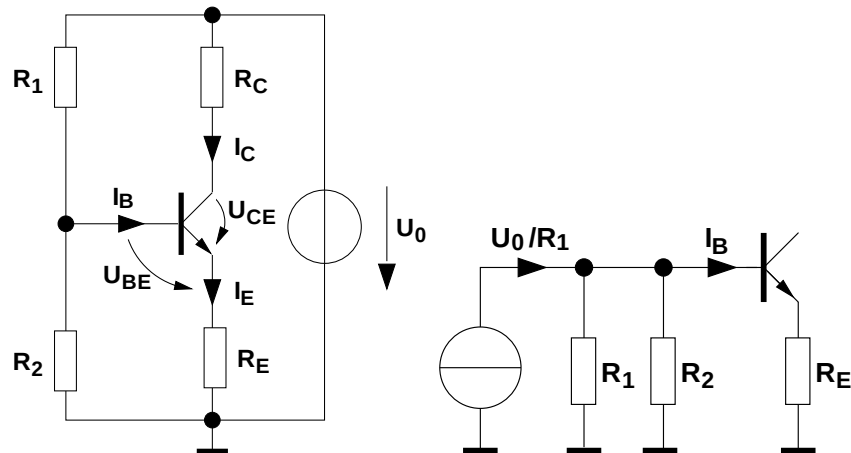
Abb. 4.1: Vereinfachungen von Schaltungen für statische Betrachtung im Arbeitspunkt.

**Beispiel:** Sowohl für die Emitterschaltung (Abb. 4.2(a)) als auch für die Basisschaltung (Abb. 4.2(b)) ergibt sich die gleiche vereinfachte Schaltung in Abb. (4.3(a)) für die Analyse des Arbeitspunktes.



(a) Emitterschaltung (mit Gegenkopplung). (b) Basisschaltung mit induktivem Koppelbandfilter am Ausgang.

Abb. 4.2: Beispiele von Schaltungen zur Analyse des Arbeitspunktes.



(a) Statisches Ersatzschaltbild der Schaltungen in Abb. 4.1. (b) Interpretation des Eingangskreises als innenwiderstandsbehaftete Stromquelle.

Abb. 4.3: Ersatzschaltungen zur Arbeitspunktanalyse.

Die Maschengleichung für den Ausgangskreis kann aus Abb. (4.3(a)) di-



rekt angegeben werden:

$$U_0 = R_C I_C + U_{CE} + I_E R_E \quad (4.1)$$

$$\text{mit } I_E = I_B + I_C \quad (4.2)$$

Durch Einsetzen von Gl. (4.1) in (4.2) ergibt sich die erste Bestimmungsgleichung für die Schaltungsparameter im Arbeitspunkt:

$$U_0 = R_E I_B + (R_C + R_E) I_C + U_{CE} \quad (4.3)$$

Die Größen  $I_B$  und  $I_C$  in Gl. (4.3) sind über die Stromverstärkung  $\beta_0$  des Transistors verknüpft (Anm.:  $1 \ll \beta_0 \approx 100$ ):

$$I_C = \beta_0 I_B \quad (4.4)$$

Auch die Gleichung für den Eingangskreis läßt sich unmittelbar hinschreiben, wenn  $U_0$  mit  $R_1$ , wie in Abb. (4.3(b)) gezeigt, als innenwiderstandsbehaftete Stromquelle interpretiert wird:

$$\left(\frac{U_0}{R_1} - I_B\right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = U_{BE} + I_E R_E. \quad (4.5)$$

Einsetzen von Gl. (4.2) für  $I_E$  und Umformen liefert die zweite Bestimmungsgleichung für die Arbeitspunktparameter  $I_B$ ,  $I_C$  und  $U_{BE}$  mit den Elementen des Eingangskreises

$$U_0 = \left(R_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} R_E\right) I_B + R_E \frac{R_1 + R_2}{R_2} I_C + \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{BE} \quad (4.6)$$

Zwischen Basisstrom und Basis-Emitter Spannung herrscht ein nichtlinearer Zusammenhang, der allgemein aus dem Ebers-Moll-Ersatzschaltbild des npn-Transistors in Abb. (4.4) hergeleitet werden kann:

$$I_E = I_F - A_R I_R \begin{cases} I_F = I_{ES} \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) \\ I_R = I_{CS} \left( e^{\frac{U_{BC}}{U_T}} - 1 \right) \end{cases} \quad (4.7)$$

Für den normal aktiven Bereich (BE-Diode leitet, BC-Diode sperrt) vereinfacht sich Gl. (4.7) zu

$$I_E = I_F = I_{ES} \left( e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) \quad (4.8)$$

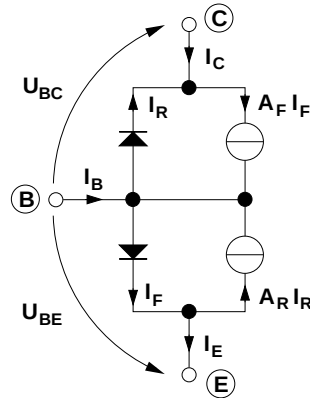


Abb. 4.4: Ebers-Moll Ersatzschaltbild eines npn-Transistors.

und mit  $U_{BE} \gg U_T$  ( $U_{BE} \approx 700 \dots 800 \text{ mV} \gg U_T \approx 25 \dots 30 \text{ mV}$ ) (25C...100C) wird  $I_E$  in guter Näherung

$$I_E \approx I_S e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} \quad (I_S \text{ statt } I_{ES} \text{ zur verkürzten Schreibweise}) \quad (4.9)$$

und damit mit Gl. (4.4) für den Basiskreis

$$I_B = \frac{1}{1 + \beta_0} I_S e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} \quad (4.10)$$

Einsetzen von Gl. (4.10) in Gl. (4.6) führt zu keiner expliziten Lösung aufgrund der Exponentialfunktion.<sup>2</sup>

Eine Lösung für den gesamten Quadranten des Ausgangskennlinienfeldes liefert das Eintragen der Steuer- und Lastgeraden in die zugehörigen Kennlinienfelder:

Gl. (4.4) in (4.3), bzw. Gl. (4.4) in Gl. (4.6) liefert nach Umstellen:

$$I_C = \frac{U_0 - U_{CE}}{R_C + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta_0}\right)} \approx \frac{U_0 - U_{CE}}{R_C + R_E} \Big|_{\beta_0 \gg 1} \quad (4.11)$$

$$I_B = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_B - U_{BE}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + (1 + \beta_0) R_E} \approx \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_B - U_{BE}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \beta_0 R_E} \Big|_{\beta_0 \gg 1} \quad (4.12)$$

<sup>2</sup>Auch eine Reihenentwicklung der Exponentialfunktion führt zu keinem anwendbaren Ergebnis, da die ersten Glieder (bis ca.  $\left(\frac{U_{BE}}{U_T}\right)^{10} / 10!$ ) vernachlässigbar sind (für  $\frac{U_{BE}}{U_T} \approx 30$  werden die Glieder  $\frac{x^{12}}{12!} \dots \frac{x^{50}}{50!}$  benötigt!)

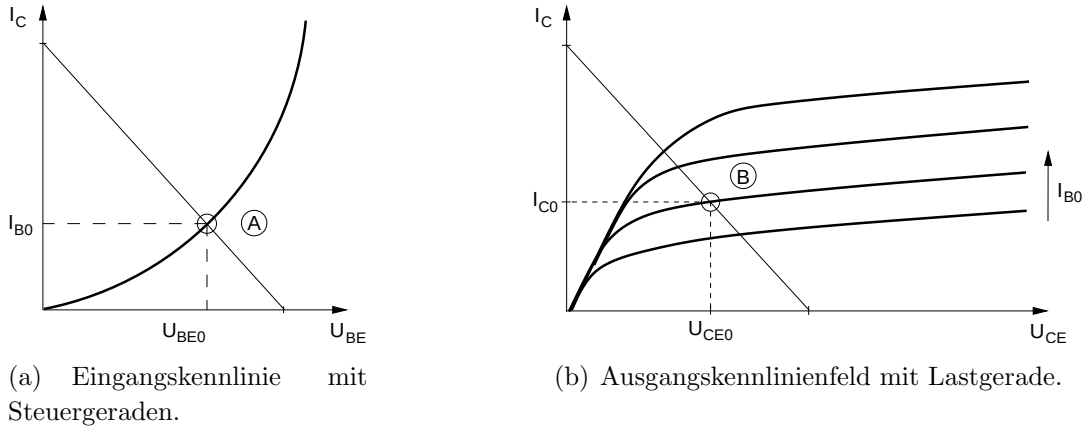


Abb. 4.5: Graphische Bestimmung des Arbeitspunktes mit Hilfe der Transistorkennlinienfelder.

Unter der Ann.  $\beta_0 = \text{const.}$  liefert der Schnittpunkt von Steuergeraden und Eingangskennlinie (A) den Basisstrom  $I_{B0}$  im Arbeitspunkt (Ruhestrom). Der Schnittpunkt (B) der zu  $I_{B0}$  gehörenden Ausgangskennlinie mit der Lastgeraden (B) liefert die entsprechenden Ausgangsgrößen  $I_{C0}$  und  $U_{CE0}$ . Ist kein Kennlinienfeld verfügbar oder genügt eine Näherungslösung, führt folgender Lösungsweg weiter:

1. Bilde mit Gl. (4.11) und (4.12)

$$I_C = \beta_0 I_B \quad (4.13)$$

2. Gl. (4.13) enthält  $U_{CE}$  und  $U_{BE}$  als Unbekannte. Umstellen nach  $U_{CE}$  liefert

$$U_{CE} = U_0 - \beta_0(R_C + R_E) \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}U_0 - U_{BE}}{\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} + \beta_0 R_E} \quad (4.14)$$

$U_{BE}$  kann in erster Näherung als konstant (0,7...0,8 V) angesehen werden. Für ein bekanntes  $\beta_0$  läßt sich damit eine Näherungslösung für  $U_{CE}$  berechnen.

**Intuitive Lösung:**

1.  $\beta_0 \gg 1 \Rightarrow I_E \approx I_C,$

2.  $U_{BE} = \text{const.} \approx 700 \text{ mV},$

3.  $\frac{U_0}{R_1+R_2} \gg I_B,$

$\Rightarrow$  Spannung an  $R_2$ :  $U_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1+R_2}$  (unbelasteter Spannungsteiler),

$\Rightarrow$  Spannung an  $R_E$ :  $U_E = U_2 - U_{BE},$

$\Rightarrow$  Strom durch  $I_E = \frac{U_E}{R_E},$

$\Rightarrow$  Spannung an  $R_C$ :  $U_C = R_C I_E,$

$\Rightarrow U_{CE} = U_0 - U_E - U_C.$

## 4.2 Einfluss der Temperatur auf den Arbeitspunkt (AP)

Die Temperatur des Transistors kann sich entweder durch äußere Einflüsse ändern (Umgebungstemperatur) oder durch die in Wärme umgesetzte Verlustleistung. Die Verlustleistung des Transistors ergibt sich (vgl. Einführung zu Berechnungsverfahren) im statischen Fall (Arbeitspunkt) zu:

$$P_V = I_B U_{BE} + I_C U_{CE} \approx I_C U_{CE} \quad (4.15)$$

Um die thermische Stabilität der Schaltung zu untersuchen, betrachten wir die Änderung der Verlustleistung mit der Temperatur. Aus Gl. (4.15) ergibt sich aufgrund der Temperaturabhängigkeit von  $I_C$  und  $U_{CE}$ :

$$\frac{d P_V}{d T} = \frac{d I_C}{d T} U_{CE} + I_C \frac{d U_{CE}}{d T} \quad (4.16)$$

Die Gleichung für den Ausgangskreis des Transistors lässt sich für alle Grundschaltungen in der Form:

$$\underbrace{U_{CE} + I_C \sum R}_{\text{Lastgerade; } U_0 = \text{Versorgungsspannung}} = U_0 \quad ^3 \quad (4.17)$$

schreiben (vgl. Kapitel Arbeitspunkt). Für das Beispiel der mit  $R_E$  gegengekoppelten EGS ergibt sich  $\sum R = R_E + R_C$  ( $R_C$  Lastwiderstand).

Differentiation nach T und einsetzen in Gl. (4.16) liefert:

$$\frac{d P_V}{d T} = \frac{d I_C}{d T} (U_{CE} - I_C \sum R) \quad (4.18)$$

Zur Auswertung von Gl. (4.18) müssen wir den Temperaturkoeffizienten  $\frac{d I_C}{d T}$  des Kollektorstroms kennen, den wir im folgenden herleiten. Um eine Darstellung des Temperaturkoeffizienten in Abhängigkeit der Steuergröße  $U_{BE}(T)$  zu bekommen, schreiben wir wegen  $I_C \approx I_s(T) e^{\frac{U_{BE}(T)}{U_T(T)}}$  für  $I_C$ :

$$I_C = I_C(T, U_{BE}(T)) = I_C(\varphi_1(T), \varphi_2(T)) \quad (4.19)$$

---

<sup>3</sup> $\sum R$  ergibt sich aus der Summe aller, in der Masche von  $U_{CE}$  und  $U_0$  liegenden Widerstände

Mit Hilfe der Kettenregel für zusammengesetzte Funktionen ergibt sich daraus formal der Temperaturkoeffizient des Kollektorstroms:

$$\frac{d I_C}{d T} = \frac{\partial I_C}{\partial T} \frac{d T}{d T} + \frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}} \frac{d U_{BE}}{d T} \quad (4.20)$$

mit:

$$\frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}} = \frac{I_C}{U_T} =: S :$$

wird aus Gl. (4.20)

$$\frac{d I_C}{d T} = \frac{d I_C}{d T} \big|_{U_{BE}=const} + \underbrace{\frac{I_C}{U_T}}_{S, \text{Steilheit}} \frac{d U_{BE}}{d T} \quad (4.21)$$

Mit:

$$U_{BE} \approx U_T \ln \frac{I_C}{I_S}; \quad U_T = \frac{kT}{q} \quad (4.22)$$

und

$$I_S \sim n_i^2 \sim T^3 e^{\frac{-W_g}{kT}} \quad (4.23)$$

läßt sich mit der Definition der Bandabstandsspannung

$$U_g(T) := \frac{1}{q} (W_g(T) - T \frac{dW_g(T)}{dT}) \quad (4.24)$$

die Abhängigkeit des Kollektorstroms von der Temperatur bei konstanter Basis-Emitter-Spannung berechnen (Übung 2). Es ergibt sich mit mit Gl. (4.22), (4.23) und (4.24) unter der Bedingung  $U_{BE} = const.$  (genauer  $\frac{dU_{BE}}{dT} \ll \frac{U_{BE}}{T}$ ):

$$\frac{dI_C}{dT} \big|_{U_{BE}=const.} = \frac{S}{T} (3U_T + U_g - U_{BE}) \quad (4.25)$$

Diese Beziehung eingesetzt in Gl. (4.21) liefert den Temperaturkoeffizienten des Kollektorstroms bei temperaturabhängiger Basis-Emitter-Spannung:

$$\frac{d I_C}{d T} = \frac{S}{T} (3U_T + U_g - U_{BE}) + \frac{I_C}{U_T} \frac{d U_{BE}}{d T} \quad (4.26)$$

Mit der ermittelten Abhängigkeit des Kollektorstroms von der Temperatur sind wir jetzt in der Lage Gl. (4.18) auszuwerten. Ohne Kompensationsmaßnahmen folgt nach Gl. (4.25) für  $U_{BE} = \text{const.} \Rightarrow \frac{dI_C}{dT} > 0$ . Die Verlustleistung nimmt dann nach Gl. (4.18) mit steigender Temperatur ab unter der Bedingung:

$$U_{CE} < \sum R I_C \quad (4.27)$$

Durch Vergleich dieser Forderung mit Gl. (4.17) ergibt sich die Dimensionierungsvorschrift für Temperaturstabilität:

$$U_{CE} < \frac{U_0}{2} < \sum R I_C \quad (4.28)$$

Diese Ungleichung wird auch das “Prinzip der halben Versorgungsspannung” genannt.

Bei einer Dimensionierung nach dieser Vorschrift führt ein Anstieg von  $I_C$  (zusammen mit der damit immer verbundenen Reduktion von  $U_{CE}$ ) immer zu einer Reduktion der Verlustleistung und damit zu einer Reduktion der Temperatur des Transistors.

Wird diese Forderung nicht erfüllt, steigt ohne zusätzliche Kompensationsmaßnahmen der Kollektorstrom und die Verlustleistung solange an, bis Gl. (4.28) wieder erfüllt ist (thermische Instabilität). Ist der Transistor für die gestiegene Verlustleistung nicht ausgelegt, kann er zerstört werden.

Die Zusammenhänge sollen anschaulich anhand des Ausgangskennlinienfeldes in Abb. (4.6) erläutert werden.

Zusätzlich zur Lastgeraden sind Hyperbeln mit  $P_V = I_C U_{CE} = \text{const.}$  eingezeichnet. Eine Hyperbel und die Lastgerade haben entweder keinen, einen oder zwei gemeinsame Punkte:

$$\text{gemeinsame(r) Punkt(e)} \iff U_{CE} + \sum R I_C \mid_{P_V=\text{const}} = U_0$$

$$U_{CE} + \frac{P_V}{U_{CE}} \sum R = U_0 \quad (4.29)$$

$$\Rightarrow U_{CE} = \frac{U_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{U_0}{2}\right)^2 - P_V \sum R} \quad (4.30)$$

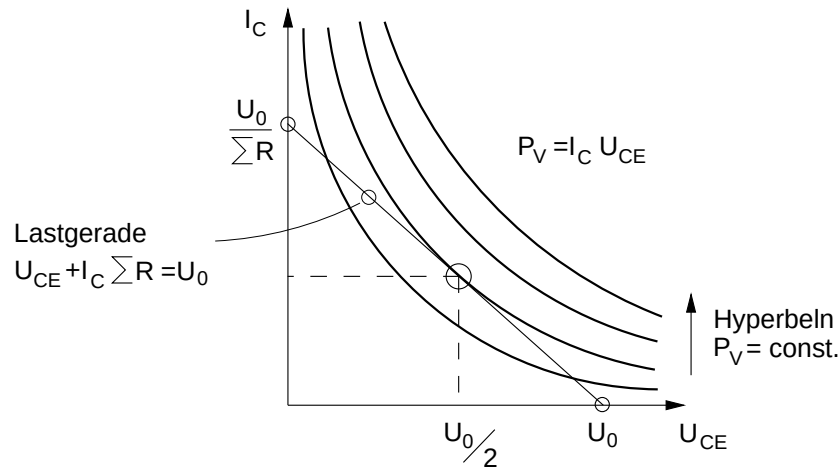


Abb. 4.6: Ausgangskennlinienfeld des Transistors mit Kurven konstanter Verlustleistung.

Aus Gl. (4.30) ergibt sich genau ein gemeinsamer Punkt in  $U_{CE} = \frac{U_0}{2}$  für  $(\frac{U_0}{2})^2 = P_V \sum R$ .

Anhand der Abbildung lässt sich anschaulich erkennen, dass ausgehend von  $U_{CE} = U_0$  mit steigendem  $I_C(T)$  die Verlustleistung zunächst steigt. Nach dem Maximum im Punkt  $U_{CE} = \frac{U_0}{2}$  sinkt die Verlustleistung wieder.

Das “Prinzip der halben Versorgungsspannung“ beruht also darauf, dass der Transistor im thermisch instabilsten Punkt des erlaubten Bereiches (bei  $\frac{U_0}{2}$ ) bereits die maximale Verlustleistung besitzt. Bei einer weiteren Erhöhung von  $I_C$  durch steigende Temperatur, nimmt die Verlustleistung und damit  $T$  wieder ab (Gegenkopplung). Die Schaltung ist somit thermisch stabil.

Thermische Stabilität lässt sich auch ohne das Prinzip der halben Versorgungsspannung erreichen. Dazu genügt es, die Temperaturabhängigkeit von  $I_C$  durch geeignete Steuerung (Einstellung) von  $U_{BE}(T)$  zu beseitigen<sup>4</sup>. Wegen Gl. (4.17) ist dann auch  $U_{CE}$  keine Funktion der Temperatur und  $P_V$  (Gl. (4.15)) bleibt konstant.

Gewünscht ist daher ein konstantes (oder abnehmendes)  $\frac{dI_C}{dT}$ ; wodurch sich

<sup>4</sup>Prinzipiell kommt auch eine Steuerung über  $\beta_0$  in Frage. Wegen der starken Exemplarstreuung von  $\beta_0$  ist jedoch davon abzuraten.



aus Gl. (4.26) ergibt:

$$\frac{d I_C}{d T} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{T}{U_T} \underbrace{\frac{d U_{BE}}{d T}}_{<0} \geq 3 + \frac{U_g - U_{BE}}{U_T} \quad (4.31)$$

umstellen liefert die Vorschrift für einen mit der Temperatur abnehmenden oder konstanten Kollektorstrom.

$$\frac{d U_{BE}}{d T} \leq -\frac{1}{T}(3U_T + U_g - U_{BE}) \quad (4.32)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite entspricht genau dem Temperaturgang der Basis-Emitterspannung, die sich ebenfalls mit Gl. (4.22), (4.23) und (4.24) für konstanten Kollektorstrom berechnen läßt:

$$\frac{dU_{BE}}{dT} \big|_{I_C=const.} = -\frac{1}{T}(3U_T + U_g - U_{BE}) \quad (4.33)$$

Indem wir die rechte Seite von Gl. (4.32) durch Gl. (4.33) ersetzen, ergibt sich:

$$\frac{dU_{BE}}{dT} \leq \frac{dU_{BE}}{dT} \big|_{I_C=const.}$$

D.h. für einen mit steigender Temperatur konstanten oder fallenden Kollektorstrom muß die Abnahme der an den Transistor im Arbeitspunkt angelegten (=eingepprägten) Basis-Emitterspannung gleich oder größer der Abnahme der Basis-Emitterspannung über der Temperatur bei konstantem Kollektorstrom sein.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>Beispiel</u> : <math>T = 300K</math>, <math>U_g(300K) = 1,205V</math>, <math>U_{BE} \approx 800 \text{ mV}</math>, <math>U_T = 26 \text{ mV}</math><br/>         aus Gl. (4.33) folgt: <math>\frac{dU_{BE}}{dT} \big _{I_C=const.} \approx -1,6 \frac{mV}{C}</math>      d.h. <math>T \uparrow \Rightarrow U_{BE} \downarrow</math><br/>         Typischer Wertebereich: <math>\frac{dU_{BE}}{dT} \approx -(1,5 \dots 1,8) \frac{mV}{C}</math></p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Wie läßt sich das, für die Basis-Emitter Spannung gewonnene Ergebnis anschaulich interpretieren?

**Anschauliche Interpretation:** Betrachtet man Gl. (4.21) für  $\frac{d I_C}{d T} \leq 0$ :

$$-\underbrace{\frac{I_C}{U_T}}_S \frac{d U_{BE}}{d T} \geq \frac{d I_C}{d T} \big|_{U_{BE} = \text{const}} \quad (4.34)$$

Darin ist  $S = \frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}}$  die Kleinsignalsteilheit. Sie gibt die Änderung des Kollektorstroms bei kleiner Änderung der Basis-Emitterspannung  $U_{BE}$  an. In diesem Fall erfolgt die Änderung von  $U_{BE}$  durch Einfluss der Temperatur, ausgedrückt durch den Quotienten  $\frac{d U_{BE}}{d T}$ .

Die linke Seite beschreibt also die Änderung des Kollektorstromes für kleine Änderungen der Basis-Emitter-Spannung aufgrund einer Temperaturänderung. Mit  $S \frac{d U_{BE}}{d T} = \frac{d I_C}{d T} \big|_{U_{BE}=U_{BE}(T)}$  läßt sich Gl. (4.34) schreiben:

$$-\frac{d I_C}{d T} \big|_{U_{BE}=U_{BE}(T)} \geq \frac{d I_C}{d T} \big|_{U_{BE}=\text{const}} \quad (4.35)$$

Die rechte Seite beschreibt die Änderung des Kollektorstromes über der Temperatur bei konstantem  $U_{BE}$ . Nach Gl. (4.25) des Hilfsblattes steigt in diesem Fall  $I_C$  mit steigender Temperatur.

Gl. (4.35) fordert also von dem Schaltungsentwickler, die Basis-Emitter-Spannung des Transistors über der Temperatur so zu verändern (verringern), dass der dadurch hervorgerufene Abfall des Kollektorstromes mindestens so groß ist, wie der Anstieg des Kollektorstroms wäre, wenn  $U_{BE}$  konstant gehalten würde.

**Temperatur-Gegenkopplung:** Die einfachste Form der  $U_{BE}$ -Steuerung liegt in dem zuvor behandelten Beispiel der mit  $R_E$  gegengekoppelten Emitter-Grundschiung vor: Wird der Querstrom durch den Basis-Spannungsteiler ( $R_1; R_2$ ) so groß gewählt, dass der Spannungsabfall  $U_2$  an  $R_2$  näherungsweise konstant ist, gilt:

$$U_2 \approx \text{const.} \approx U_{BE}(T) + R_E I_C(T, U_{BE}(T)) \quad (4.36)$$

Ein aufgrund steigender Temperatur steigender Kollektorstrom verringert also die Basis Emitterspannung und damit sich selbst. Der Temperaturgang der Basis-Emitterspannung ergibt sich aus der Differentiation von Gl. (4.36) nach der Temperatur

$$\frac{d U_{BE}}{d T} = -R_E \frac{d I_C}{d T}. \quad (4.37)$$

Durch Einsetzen dieses Temperturgangs in Gl. (4.21) ergibt sich:

$$\frac{d I_C}{d T} = \frac{d I_C}{d T} \big|_{U_{BE}=const} - S R_E \frac{d I_C}{d T} \quad (4.38)$$

da  $\frac{d I_C}{d T}$  für  $R_E \neq 0$  abgeleitet wurde, kann man Gl. (4.38) schreiben:

$$\frac{d I_C}{d T} \big|_{R_E \neq 0} = \frac{\frac{d I_C}{d T} \big|_{U_{BE}=const}}{1 + S R_E}. \quad (4.39)$$

Der Temperaturgang von  $I_C$  wird durch  $R_E$  also um den Faktor  $1 + S R_E$  reduziert. Ein von der Temperatur unabhängiger Kollektorstrom läßt sich aber nur für unendlich große Gegenkopplung erreichen. Wie sich später aber im Kapitel der rückgekoppelten Schaltungen zeigen wird, reduziert sich durch die Gegenkopplung mit  $R_E$  leider auch die Kleinsignalverstärkung der Schaltung um den gleichen Faktor.

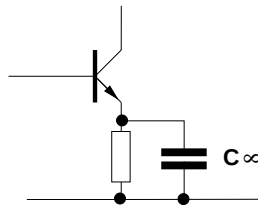


Abb. 4.7: Höhere Verstärkung durch Kurzschluss von  $R_E$  durch  $C_\infty$  für Signalfrequenzen.

Um diese Reduktion zu vermeiden, kann  $R_E$  wie in Abb. (4.7) mit einem parallel geschalteten Kondensator ausreichender Größe für alle Signalfrequenzen kurzgeschlossen werden.

**Beachten:** Durch den dynamischen Kurzschluss von  $R_E$  ergibt sich bei dynamischer Aussteuerung (‘‘Wechselspannungsbetrieb‘‘) eine versteilte Lastgerade im Ausgangskennlinienfeld:

**Praktische Vereinfachung:** Nehmen wir zur Vereinfachung an, der Temperaturkoeffizient der Basis-Emitterspannung beträgt konstant  $-1,7 \text{ mV/C}$ . Dann kann der Einfluss der Temperatur durch eine in Reihe zur Basis-Emitter Strecke geschaltete Spannungsquelle mit  $\Delta U_{BE}(\Delta T) = \frac{-1,7 \text{ mV}}{C} \Delta T$  berücksichtigt werden.

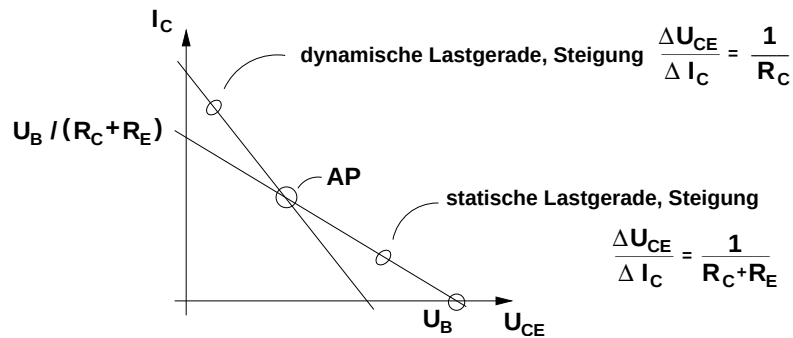


Abb. 4.8: Dynamische und statische Lastgeraden der Schaltung in Abb (4.7).

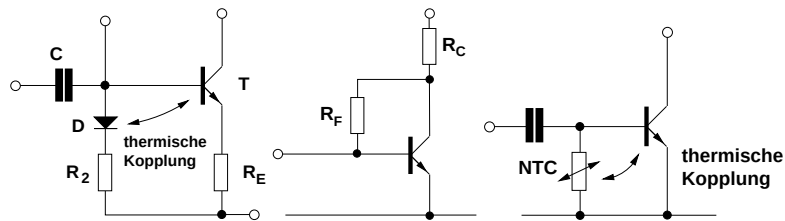


Abb. 4.9: Schaltungsvarianten zur Temperaturstabilisierung durch Einstellen von  $U_{BE}(T)$ .

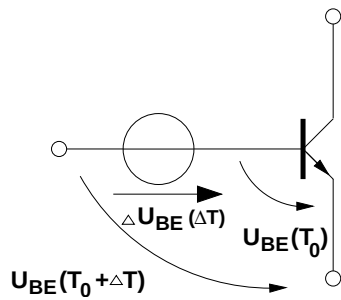


Abb. 4.10: Berücksichtigung des Temperatureinflusses durch Spannungsquelle  $\Delta U_{BE}$ .

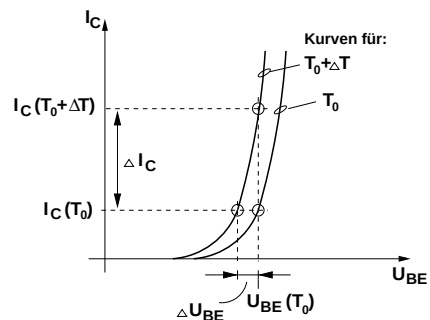


Abb. 4.11: Temperatureinfluss auf Kollektorstrom.

Hiermit lassen sich in einfacher Weise verschiedene Temperaturen in Form von Spannungsquellen berücksichtigen.

**Anmerkung zur Ansteuerung um den Arbeitspunkt:** Die Ansteuerung um den Arbeitspunkt verläuft immer auf der Lastgeraden. Damit ergibt sich für jeden Zeitwert ein bestimmter Punkt mit der dazu gehörenden Verlustleistung auf der Lastgeraden. Speziell bei Großsignalaussteuerung weicht dann die im Transistor in Wärme umgesetzte Verlustleistung von der statischen Verlustleistung im Arbeitspunkt ab. Für den Fall, dass die Signalperiodendauer klein gegen die kleinste thermische Zeitkonstante ist, befindet sich der Transistor auf einer konstanten Temperatur entsprechend der Verlustleistung

$$\overline{P_V} = \frac{1}{T} \int_0^T P_V(t) dt \quad (4.40)$$

Liegen die Zeitkonstanten in der gleichen Größenordnung kommt es zu einer Beeinflussung der Signalform durch die sich ändernde Temperatur. Dies ist insbesondere problematisch bei Impulsverstärkern, bei denen hohe Anforderungen an eine möglichst rechteckförmige Signalform gestellt werden (Droop). Siehe hierzu auch Unterkapitel zu Verlustleistungsabfuhr.

## 4.3 Weitere Kriterien bei der Einstellung des AP

### 4.3.1 Aussteuerbereich

Der Aussteuerbereich lässt sich anhand von Abb. (4.12) für minimale und maximale Ausgangsspannungen angeben:

Maximale Spannung  $U_{a,max}$ :  
 $I_C = 0 \Rightarrow U_{RC} = 0, U_a = U_0$

Minimale Spannung  $U_{a,min}$ :  
 bei  $U_{CE} \approx U_{CE,S}$   
 $U_{CE,S} \approx 100 \text{ mV}$

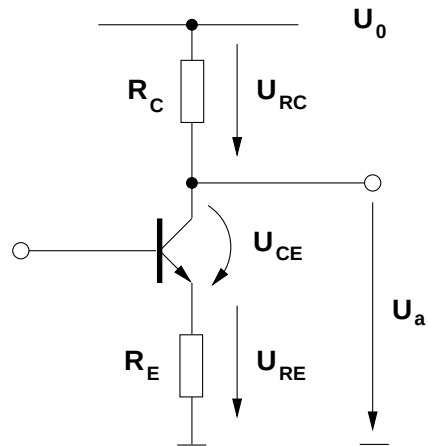


Abb. 4.12: Spannungen im Ausgangskreis zur Definition des Aussteuerbereichs

Zur Sicherheit gegen Bauelementetoleranzen, Temperatur und Betriebsspannungseinflüssen sollte, wenn möglich  $U_{CE} \geq U_{BE}$  ( $U_{CB} = 0$ ) angestrebt werden. Dann gilt:  $U_{a,min} = U_{BE} + U_{RE}$ . Der Aussteuerbereich ergibt sich damit zu:

$$\Delta U_a = U_{a,max} - U_{a,min} = U_0 - U_{BE} - U_{RE} \quad (4.41)$$

Der Aussteuerbereich (=max. Spannungshub) kann also durch Wahl einer entsprechend hohen Betriebsspannung (Verlustleistung  $\uparrow$ , Durchbruch  $\uparrow$ ) vergrößert werden. Falls  $R_E$  nur zur Einstellung des Arbeitspunktes verwendet wird, kann auch  $R_E$  kapazitiv überbrückt werden (Verstärkung  $\uparrow$ ).

### 4.3.2 Signalein-/auskopplung

Bisher wurde der Verstärker ein- und ausgangsseitig kapazitiv an Generator und Last<sup>5</sup> gekoppelt. Damit war er für die statische Analyse im AP von der

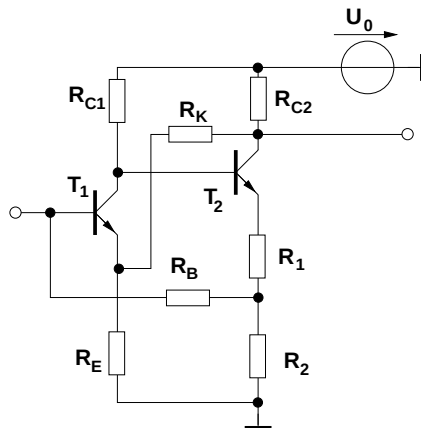
<sup>5</sup>Generator und Last bezeichnen allgemein die ansteuernde und die angesteuerte Schaltung (u.U. komplexer Aufbau)

umgebenden Schaltung entkoppelt und konnte getrennt analysiert werden.

Für gleichspannungsgekoppelte Schaltungen ist dies nicht mehr möglich. Daher müssen die entsprechenden Eigenschaften der umgebenden (Teil-) Schaltungen mit in die Analyse einbezogen werden.

Gute gleichspannungsgekoppelte Schaltungsentwürfe zeichnen sich dadurch aus, dass die Eigenschaften mehrerer Teilschaltungen vorteilhaft miteinander kombiniert werden.

### Beispiel:



Analyse:

- a) Intuitiv,
- b) durch Rechnung.

### 4.3.3 Wärmeleitung

Die im Transistor erzeugte Verlustleistung wird durch Wärmeleitung oder Konvektion abgeführt. Dafür gilt das im folgenden abgeleitete thermische Ersatzschaltbild, das sich als Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichungen:

$$C_{th} \frac{d \Delta T}{dt} + \frac{\Delta T}{R_{th}} = P_V(t) \quad (4.42)$$

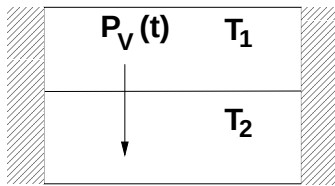
ergibt. Darin ist

$P_V(t)$  : Wärmestrom aufgrund der Temperaturdifferenz  $\Delta T$

$\Delta T$  : Temperaturdifferenz zwischen zwei Körpern

$R_{th}$  : Thermischer Widerstand des Übergangs  $T_1 \rightarrow T_2$  in  $\frac{K}{W}$

$C_{th}$  : Wärmekapazität in  $\frac{Ws}{K}$



$$\Delta T = T_1 - T_2$$

Substituiert man:

$$P_V(t) \rightarrow i(t)$$

$$\Delta T(t) \rightarrow u(t) = u_1 - u_2$$

$$C_{th} \rightarrow C$$

$$R_{th} \rightarrow R$$

ergibt sich aus (4.42):

$$C \frac{d u(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R} = i(t)$$

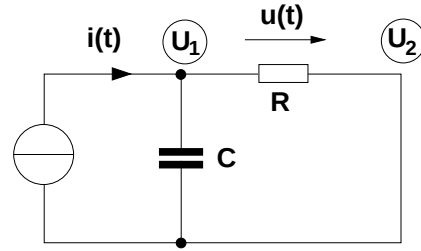
Lösung der DGL mit Laplace Transformation:



$$Cs\underline{U} + \frac{\underline{U}}{R} = \underline{I} \bullet \circ i(t) \quad (4.43)$$

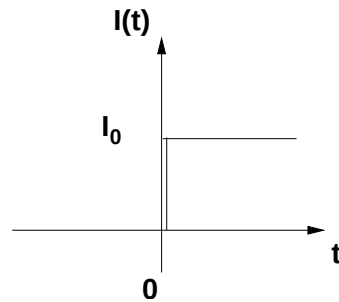
$$\Rightarrow \underline{U} = \frac{\underline{I}}{\frac{1}{R} + Cs} \quad (4.44)$$

$$= \frac{R \underline{I}}{1 + RCs} \quad (4.45)$$



Für den Sonderfall einer sprungförmigen Anregung folgt mit  $RC = \tau$ :

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ I_0 & t > 0 \end{cases} \quad \bullet \circ \underline{I} = \frac{1}{s} I_0$$



$$\underline{U} = \frac{R I_0}{s(1 + \tau s)} \bullet \circ RI_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = u(t) \quad (4.46)$$

Resubstitution liefert:

$$\Delta T(t) = R_{th} P_{V0} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{th}}}), \quad \tau_{th} = R_{th} C_{th} \quad (4.47)$$

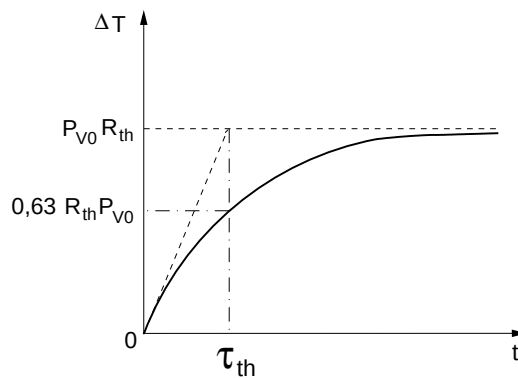


Abb. 4.13: Temperaturdifferenz über einem thermischen Übergang mit  $\tau_{th} = R_{th} C_{th}$  bei einem Verlustleistungssprung nach Gl. (4.48).

Die Lösung in Gl. (4.47) beschreibt die Reaktion des thermischen Übergangs auf einen Verlustleistungssprung

$$P(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ P_{V0} & t > 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Im stationären Zustand:  $\frac{d\Delta T}{dt} = 0$  wird aus Gl. (4.47):

$$\Delta T = R_{th} P_{V0} \quad (4.49)$$

In Anwendungen, in denen die Verlustleistung eines Transistors eine Temperaturerhöhung des Transistors (oder anderer umgebender Bauelemente) hervorruft, die die elektrischen Eigenschaften oder die Lebensdauer unzulässig verschlechtert, muss die Wärme mit gezielten Maßnahmen abgeführt werden. In der Praxis strebt man einen sog. “thermischen Kurzschluss“ an, ( $R_{th} = 0$ ) bei dem die Sperrschichttemperatur nahezu den Wert der kühleren Soll-Temperatur annimmt. Im einfachsten und häufigsten Fall ist die Soll-Temperatur durch die Umgebungstemperatur vorgegeben. Die Sperrschicht gibt dann über die zwischen ihr und der Umgebungstemperatur liegenden thermischen Widerstände ihre Wärme ab. Die Temperaturdifferenz zwischen Sperrschicht und Umgebung ist dann die Summe der Temperaturabfälle an den einzelnen thermischen Widerständen des Übergangs. Ist:

$P_V = P_{tot,max}$  die maximal erlaubte Verlustleistung

$T_j = T_{j,max}$  die maximal erlaubte Sperrschichttemperatur

$T_a = T_{a,max}$  die maximal mögliche Umgebungstemperatur

dann gilt folgende Dimensionierungsvorschrift für Kühlkörper mit Kühlmechanismus (Abstrahlung, Konvektion,...).

$$R_{thch} + R_{thha} < \frac{T_{j,max} - T_{a,max}}{P_{tot,max}} - R_{thjc} \quad (4.50)$$

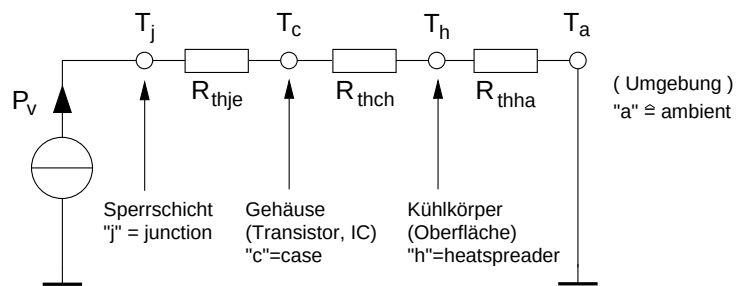


Abb. 4.14: Elektrisches Ersatzschaltbild eines thermischen Übergangs zwischen Sperrschicht- und Umgebungstemperatur im stationären Zustand.

## 4.4 Einstellung des Arbeitspunktes bei Feldeffekttransistoren (FET)

Wie bei Bipolartransistoren (npn, pnp) wird auch bei den FET zwischen dem Elektronen- oder Löcherleitungstyp unterscheiden d.h. dem n- oder p-Kanal-FET. Die Kennlinien des jeweils anderen Typs erhält man durch Spiegelung an der x- und y-Achse der Kennlinienfelder. Daher beschränken wir uns im Folgenden auf die Darstellung des n-Kanal-Typen.

### 4.4.1 Kennlinien der n-Kanal-Typen

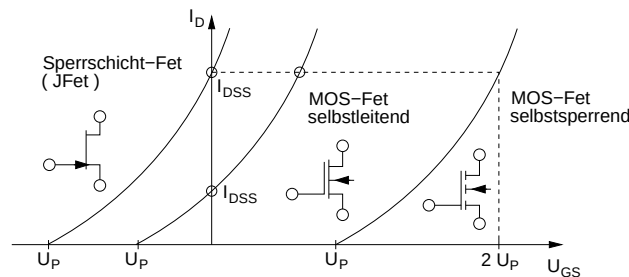


Abb. 4.15: Steuerkennlinien verschiedener n-Kanal Feldeffekttransistoren.

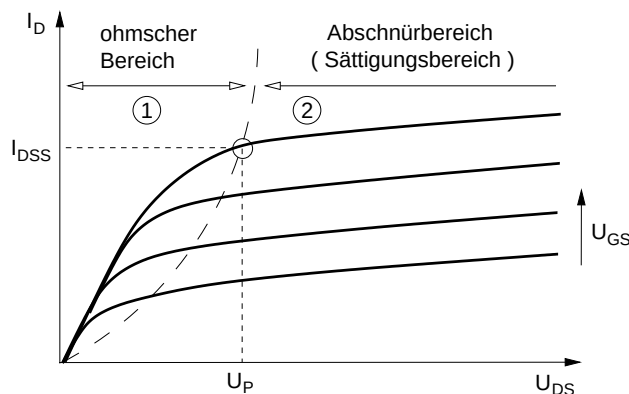


Abb. 4.16: Ausgangskennlinienfeld eines n-Kanal Feldeffekttransistors.

Das Ausgangskennlinienfeld besitzt für alle n-Kanal-Typen die gleiche Charakteristik. Nach [sze..] kann unter der Annahme idealisierter Ladungsverteilungen im Kanal für JFET und MOSFET der Ausgangsstrom in

Abhängigkeit von der Steuerspannung in gleicher Weise angenähert werden:

Sperrbereich ( $U_{GS} < U_p$ ):

$$I_D \approx 0 \quad . \quad (4.51)$$

Ohmscher Bereich ( $0 \leq U_{DS} < U_{GS} - U_p$  und  $U_{GS} \geq U_p$ ):

$$I_D \approx \frac{2I_{DSS}}{U_p^2} (U_{GS} - U_p - \frac{U_{DS}}{2}) U_{DS} \quad . \quad (4.52)$$

Abschnür-(Sättigungs)bereich ( $U_{DS} \geq U_{GS} - U_p$  und  $U_{GS} > U_p$ ):

$$I_D \approx \frac{I_{DSS}}{U_p^2} (U_{GS} - U_p)^2 \quad . \quad (4.53)$$

Für den MOS-FET wird oft  $k$  statt

$$I_{DSS} = \frac{kU_p^2}{2} \quad (4.54)$$

verwandt.  $k$  läßt sich direkt aus der Geometrie, der Dielektrizitätskonstante des Gateoxids  $\epsilon_{0x}$  und der Beweglichkeit der Ladungsträger des jeweiligen Kanaltypes bestimmen:

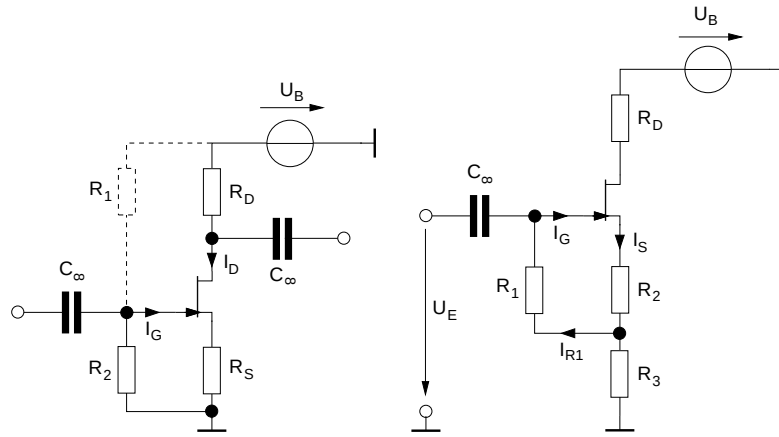
$$k = \mu_n \frac{\epsilon_{0x}}{d_{0x}} \frac{b}{L} \quad (4.55)$$

### **Gemeinsamkeiten mit AP-Einstellungen des Bipolartransistors:**

Aufgrund der Ähnlichkeit der Kennlinien der FETs untereinander kann auf die Diskussion der einzelnen Typen verzichtet werden. Auch ergeben sich aufgrund der ähnlichen Verläufe der Steuer- und Ausgangskennlinien analoge Überlegungen und Berechnungen wie bei Bipolartransistoren.

**Unterschiede (Vorspannung):** Bezüglich der Arbeitspunkteinstellung benötigen (n-Kanal-)Sperrschicht-FET und selbstleitender MOS-FET im Unterschied zum vergleichbaren npn-Transistor eine negative Gate-Source-Spannung. Diese kann wie in Abb. (4.17(a)) z. B. mit Hilfe der gleichen Schaltung wie für den Bipolartransistor eingestellt werden: Aufgrund des sehr kleinen Gate-Stroms im nA-Bereich ergibt sich

$$U_{GS} = -I_D R_S \quad (4.56)$$



(a) Beschaltung mit Gate-Spannungsteiler wie für den Bipolartransistor

(b) Bootstrap-Variante.

Abb. 4.17: Arbeitpunkteinstellung für Sperrschicht-FET und selbstleitenden MOS-FET (beide n-Kanal) in Sourceschaltung.

Für den Betrieb im Sättigungsbereich (Gl. (4.53)) gilt:

$$I_D = \frac{I_{DSS}}{U_p^2} (U_{GS} - U_p)^2 \quad (4.57)$$

Umgestellt nach  $U_{GS}$  ergibt sich für Gl. (4.56)

$$U_{GS} = -R_S I_D = U_p \left( \sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}} - 1 \right) \quad (4.58)$$

Hieraus ergibt sich der für einen Strom  $I_S$  im Arbeitspunkt erforderliche Wert

$$R_S = \frac{U_p}{I_D} \left( 1 - \sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}} \right) \quad (4.59)$$

Nachteil dieser Art der Arbeitpunkteinstellung ist, daß der Gate-Widerstand  $R_2$  die Eingangsimpedanz der Stufe reduziert. Die Wahl eines sehr hochohmigen  $R_2$  sollte aber vermieden werden, da

- $I_G R_2 \approx 0$  (Gate-Potential soll unabhängig von  $I_G$  bleiben),
- Rauschspannung durch  $R_2 \sim \sqrt{4kTBR_2}$ ,

- Realisierungsprobleme (Langzeitstabilität).

Die in Abb. 4.17(b) gezeigte Bootstrap-Variante vermeidet dieses Problem: Wir analysieren die Wirkungsweise der Schaltung für Wechselspannung durch intuitive Überlegungen: Für einen Querstrom  $I_S$  durch  $R_2 + R_3$  groß gegen  $I_{R_1}$ , ist die Spannung über  $R_3$  unabhängig von  $I_{R_1}$ . Da der FET bezogen auf den Source-Anschluß als Source-Folger (Spannungsverstärkung  $\approx 1$ ) arbeitet, liegt über  $R_3$  die Spannung  $U_E \frac{R_3}{R_2 + R_3}$ . Gemäß dem Millerschen Theorem transformiert sich  $R_1$  bezüglich des Eingangs zu:

$$R_1^* \approx \frac{1}{1 - v} R_1 \quad \text{mit } v \approx \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (4.60)$$

$$R_1^* \approx \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) R_1 \quad (4.61)$$

Durch kapazitive Überbrückung (Wechselspannungs-Kurzschluß) von  $R_2$  können sehr hohe Werte für  $R_1^*$  erzielt werden (theoretisch:  $R_1^* \rightarrow \infty$ )

**Unterschiede (Temperatur):** Für den Sperrschicht-FET gilt:

$$\frac{dI_D}{dT} = \underbrace{-\frac{3I_D}{2T}}_{<0} + \underbrace{\frac{S}{T} \left(3U_T + \frac{W_g(T)}{q} - U_D\right)}_{>0} \quad (4.62)$$

Für den MOS-FET gilt:

$$\frac{dI_D}{dT} = \underbrace{\frac{I_D}{\mu_{n0}} \frac{d\mu_{n0}}{dT}}_{<0} - \underbrace{\frac{\mu_{n0} c_{0x}}{L^2} \underbrace{(U_{GS} - U_p)}_{>0} \underbrace{\frac{dU_p}{dT}}_{<0}}_{<0} \quad (4.63)$$

(vgl. Vorlesung Halbleiterbauelemente)

Für beide Typen gilt, daß für große Ströme von  $I_D$  der erste Term in Gl. (4.62) und (4.63) überwiegt, und damit der Drain-Strom mit steigender Temperatur abnimmt. Diese thermische Gegenkopplung erlaubt einen stabilen Betrieb der FETs ohne zusätzliche schaltungstechnische Maßnahmen wie bei den Bipolar-Transistoren.

## 5 Die Transistorgrundsaltungen im Kleinsignalbetrieb

### 5.1 NF-Eigenschaften der Grundsaltungen mit Bipolar-Transistoren

Im folgenden betrachten wir den Kleinsignalbetrieb von Transistoren in Grundsaltungen. Wir zeigen die Vorgehensweise bei der Modellbildung, der Herleitung und der Interpretation der Ergebnisse beispielhaft für den NPN-Bipolar-Transistor. Der Transistor befindet sich jetzt in einem geeigneten Arbeitspunkt. Ein geeignetes Kleinsignalmodell für den Einsatz bis zu höchsten Frequenzen<sup>6</sup> zeigt Abb. 5.1. Es wurde in der Vorlesung Halbleiterbauelemente hergeleitet und kann für die hier angestellten Betrachtungen vereinfacht werden.

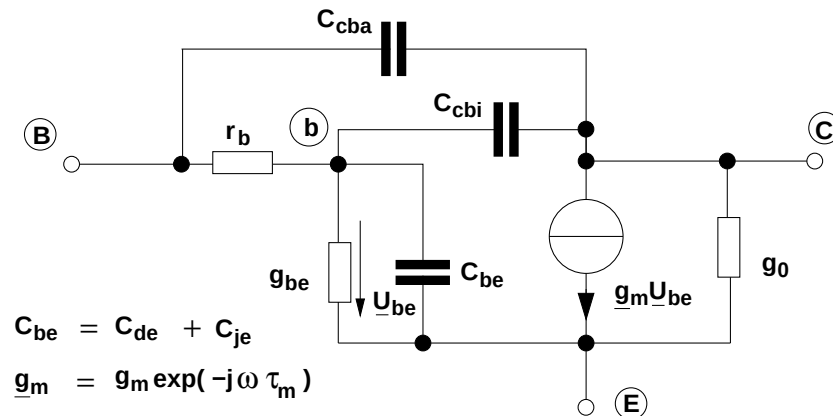


Abb. 5.1: Breitbandiges Kleinsignalmodell des Bipolar-Transistors mit Gültigkeit bis ca.  $\frac{2}{3}f_T$ .

Zur Analyse und zum Verständnis der Eigenschaften der Transistorgrundsaltungen genügt die Betrachtung bei tiefen Frequenzen, bzw. für den Fall, daß die Eigenschaften der äußeren Beschaltung des Transistors über der Frequenz dominieren. Das Ersatzschaltbild kann dann wie in Abb. 5.2 verein-

<sup>6</sup>In der Praxis hat sich dieses Modell zur Analyse von integrierten Schaltungen bis ca.  $\frac{2}{3}f_T$  bewährt (Es gilt auch bei sehr hohen Transitfrequenzen wie z.B. für  $f_T = 150$  GHz). Für die Untersuchung bei hohen Frequenzen können meist  $g_0$  und  $g_{be}$  vernachlässigt werden (Vertiefungsvorlesung).



facht werden (vgl. auch Anhang Zusammenhang zwischen AP und Kleinsignalparametern).

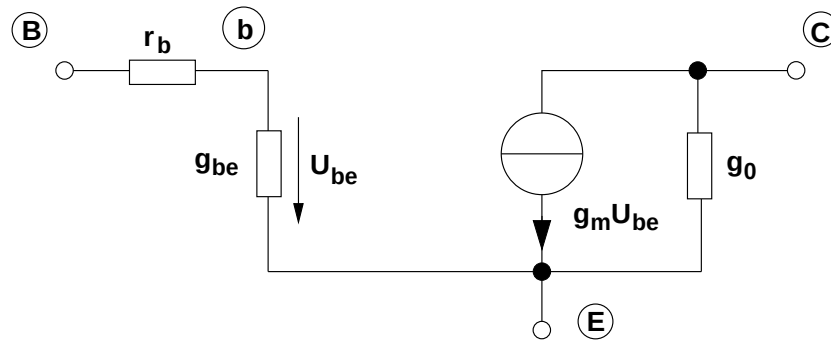


Abb. 5.2: Vereinfachtes NF-Ersatzschaltbild des Bipolar-Transistors.

**Beachten:** Dieses vereinfachte Transistormodell besitzt keine Rückwirkung vom Ausgang (Kollektor) zum Eingang (Basis) und eignet sich nur für Schaltungen, in denen die durch Miller-Transformation im Basiskreis liegende vergrößerte Kollektor-Basis-Kapazität vernachlässigbar ist.

Definiert man ein Eingangs- und ein Ausgangstor<sup>7</sup>, dann lassen sich die drei Anschlüsse<sup>8</sup> des Transistors mit diesen Toren in drei sinnvollen Konfigurationen verbinden. Man spricht von den drei Transistorgrundsaltungen.

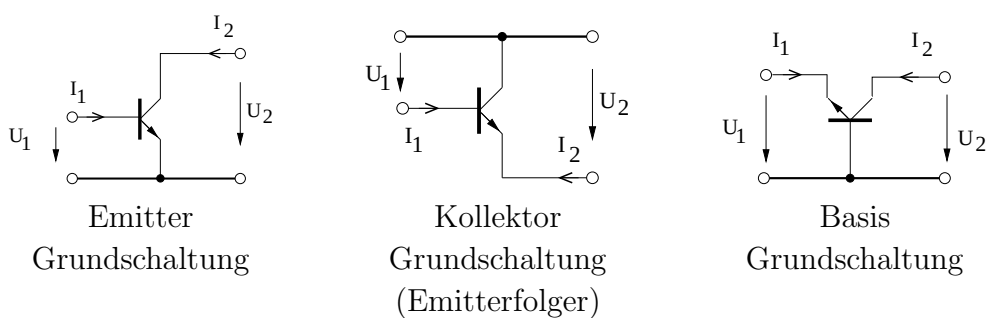


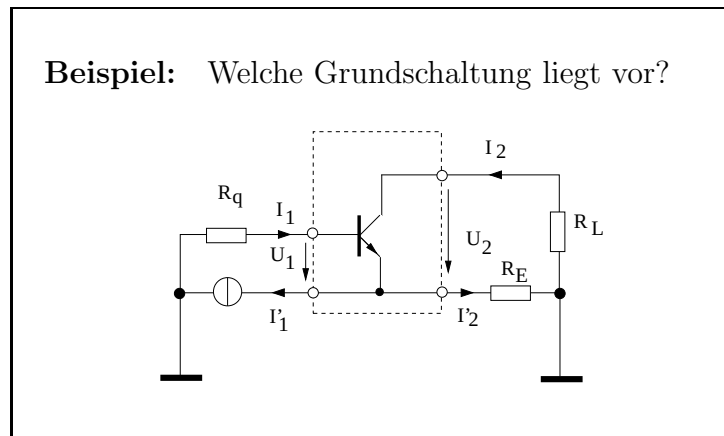
Abb. 5.3: Die drei möglichen Grundsaltungen eines Transistors.

<sup>7</sup>Es lässt sich zeigen, daß für einen Dreipol die Torbedingung immer erfüllt ist.

<sup>8</sup>Genauer sind es meist (immer bei integrierten Schaltungen) vier Anschlüsse. Der vierte Anschluss ist das Halbleitersubstrat.

Der Begriff „Grundsaltungen“ besitzt hierbei zwei Bedeutungen. Zum einen lassen sich alle Transistorschaltungen aus diesen Grundsaltungen aufbauen. Sie sind somit die Grundbestandteile komplexerer Schaltungen. Zum anderen stellt der gemeinsame Anschluß von Ein- und Ausgang den Bezugspunkt, also die Signalmasse („ground“) für Ein- und Ausgangssignal dar. Der Transistoranschluß, der mit diesem Bezugspunkt verbunden ist, gibt der Grundsaltung ihren Namen.

**Beachten:** Die Grundsaltung besitzt nur dann die für sie typischen (und vom Entwickler erwarteten) Eigenschaften, wenn die *Torbedingung* ( $I_1 + I'_1 = 0$ ,  $I_2 + I'_2 = 0$ ) erfüllt wird. Dies muß der Entwickler durch geeignete schaltungstechnische Maßnahmen erreichen<sup>9</sup>.



In der 1. Übung zur Vorlesung „Einführung in die Elektronik II“, Sommersemester 2003, Prof. Blum, (Download von EuS Homepage) werden die vier Betriebskenngrößen Spannungs- und Stromverstärkung, Ein- und Ausgangswiderstand für die drei Grundsaltungen berechnet. Im folgenden sollen zur vereinfachten Schreibweise die dort verwendeten Symbole wie folgt ersetzt werden:

$$\beta := \beta_{AC}, \quad r_b := r_{bb}, \quad g_m := g_{mf}(= S)^{10} \quad (5.1)$$

verwendet werden. Anstelle  $g_m$  kann auch alternativ

$$r_e = \frac{1}{g_m} \quad (5.2)$$

<sup>9</sup>Dies geht aufgrund parasitärer Eigenschaften der Beschaltung des Transistors mit steigender Frequenz zunehmend schlechter. Bei höchsten Frequenzen liegen alle Grundsaltungen gleichzeitig vor (vgl. Elektronik III).

<sup>10</sup> $g_m$  wird bevorzugt, da  $S$  leicht mit Laplace Operator verwechselt werden kann.

verwendet werden. Davon wird besonders dann Gebrauch gemacht, um den Widerstandscharakter ( $r_e$ ) von dem Verstärkungscharakter (Transkonduktanz oder Steilheit)  $g_m$  bei der Interpretation zu unterscheiden.

Das Ergebnis der Berechnung ist in der Tabelle 5.1 der folgenden Seite zusammengefaßt.

|                                   | EGS                                                                                                                                           | KGS                                                                                                                                                                                    | BGS                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wechselstrom-<br>ersatzschaltbild |                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Kleinsignal-<br>ersatzschaltbild  |                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $\frac{U_2}{U_1} = V_u$           | $\frac{-\frac{g_m}{1+g_{be}r_b}}{g_o + \frac{1}{R_L}} \approx -g_m R_L$<br>Näherung für:<br>$\frac{1}{R_L} \gg g_o, r_b \ll \frac{1}{g_{be}}$ | $\frac{\frac{1}{r_b}(g_{be}+g_m)}{\left(g_o + \frac{1}{R_L}\right)\left(g_{be} + \frac{1}{r_b}\right)_a + \frac{1}{r_b}(g_m+g_{be})_b} \approx 1$<br>für: $a \ll b$                    | $\frac{g_o\left(\frac{1}{r_b}+g_{be}\right) + \frac{g_m}{r_b}}{\left(g_o + \frac{1}{R_L}\right)\left(\frac{1}{r_b}+g_{be}\right)} \approx R_L \frac{1}{\frac{r_b}{\beta} + r_e}$<br>Näherung für:<br>$g_o \rightarrow 0$                                            |
| $\frac{I_2}{I_1} = V_I$           | $\beta \frac{1}{1+R_L g_o} \approx \beta$<br>Näherung für:<br>$R_L g_o \ll 1$                                                                 | $\frac{\frac{1}{R_L}(g_{be}+g_m)}{g_{be}\left(g_o + \frac{1}{R_L}\right)} \approx -\beta$<br>Näherung für:<br>$\frac{1}{R_L} \gg g_o$                                                  | $\frac{-\frac{1}{R_L}\left(g_o\left(\frac{1}{r_b}+g_{be}\right) + \frac{g_m}{r_b}\right)}{g_o\left(\frac{1}{r_b}\left(g_{be} + \frac{1}{R_L}\right) + \frac{g_{be}}{R_L}\right) + \frac{r_b}{R_L}(g_{be}+g_m)} \approx -1$<br>für: $g_o \rightarrow 0, \beta \gg 1$ |
| $R_{ein} = \frac{U_1}{I_1}$       | $r_b + \beta r_e$                                                                                                                             | $r_b + \frac{g_o + \frac{1}{R_L} + g_{be} + g_m}{g_{be}\left(g_o + \frac{1}{R_L}\right)}$<br>$\approx r_b + \beta(R_L + r_e)$<br>Näherung für:<br>$\frac{1}{R_L} \gg g_o, R_L \gg r_e$ | $\frac{\left(\frac{1}{g_o} + R_L\right)\left(\frac{1}{r_b} + g_{be}\right)}{\frac{1}{r_b}(R_L g_{be} + 1) + g_{be} + \frac{g_{be}}{g_o}(g_{be} + g_m)}$<br>$\approx r_e + \frac{r_b}{\beta}$<br>Näherung für:<br>$g_o \rightarrow 0$                                |
| $R_{aus} = \frac{U_2}{I_2}$       | $\frac{1}{g_o}$                                                                                                                               | $\frac{1}{g_o + \frac{1+\beta}{R_G + r_b + \frac{1}{g_{be}b}}} \approx \frac{R_G + r_b}{\beta} + r_e$<br>Näherung für:<br>$\beta \gg 1, g_o \ll b$                                     | $\frac{1}{g_o} \left( 1 + \frac{\frac{g_m}{r_b} + g_o\left(g_{be} + \frac{1}{r_b}\right)}{\frac{1}{R_G}\left(g_{be} + \frac{1}{r_b}\right) + \frac{g_{be}}{r_b}} \right) > \frac{1}{g_o}$                                                                           |

Tabelle 5.1: NF-Eigenschaften der (Bipolar-) Transistor Grundschaltungen.

 Umrechnung:  $\beta = \frac{g_m}{g_{be}} = \frac{1}{r_e g_{be}}$

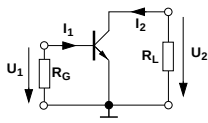
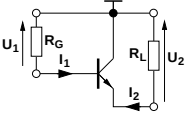
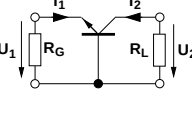
|                                              | EGS                                                                               | KGS                                                                               | BGS                                                                                | Kommentar                 |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| $V_I = \frac{I_2}{I_1}$                      | $\beta$                                                                           | $-\beta$                                                                          | $-1$                                                                               | Strom-<br>verstärkung     |
| $V_U = \frac{U_2}{U_1}$                      | $-g_m R_L$                                                                        | $1$                                                                               | $R_L \frac{1}{r_e + \frac{r_b}{\beta}}$                                            | Spannungs-<br>verstärkung |
| $R_{ein} = \frac{U_1}{I_1}$                  | $\beta r_e + r_b$                                                                 | $\beta(R_L + r_e) + r_b$                                                          | $r_e + \frac{r_b}{\beta}$                                                          | Eingangs-<br>widerstand   |
| $R_{aus} = \frac{U_2}{I_2}$<br>(ohne $R_L$ ) | $\infty, (\frac{1}{g_0})$                                                         | $\frac{R_G + r_b}{\beta} + r_e$                                                   | $\infty, (\gg \frac{1}{g_0})$                                                      | Ausgangs-<br>widerstand   |
|                                              |  |  |  | Schaltbild                |

Tabelle 5.2: Näherungen der Kenngrößen bei quasistatischem Kleinsignalbetrieb von Transistorgrundsaltungen mit Bipolartransistoren.

Aus der Berechnung ergeben sich die in Tabelle 5.2 zusammengefaßten Näherungen für die Kenngrößen des quasistatischen Kleinsignalbetriebes der Grundsaltungen:

Interpretation der Ergebnisse:

$V_I$  : Wegen  $\beta_{DC} \approx \beta$  und  $I_E \approx I_C \approx \beta I_B$  läßt sich das Ergebnis direkt ableiten.

$V_U$  : Unter der für  $V_U$  in der Regel gerechtfertigten Näherung ( $r_b \ll \beta r_e$  ;  $R_L \ll \frac{1}{g_0}$  ) lassen sich die Gleichungen für die EGS und BGS direkt aus dem Ersatzschaltbild herleiten. Bei der EGS ist wegen  $r_b \ll \beta r_e$  die Eingangsspannung  $U_1$  identisch mit  $U_{BE}$  und steuert über  $g_m$  direkt den Ausgangsstrom  $g_m U_{be}$  durch den Lastwiderstand. Mit dem Spannungsabfall  $U_1 g_m R_L = U_2$  ergibt sich das Ergebnis in der Tabelle. Das negative Vorzeichen läßt sich erklären über die unterschiedliche Richtung von Strom und Spannungszählpfeil. Bei der BGS ist der Eingangsstrom aufgrund des Eingangswiderstandes  $I_1 = \frac{U_1}{R_{ein}}$ . Da Kollektorstrom und Emitterstrom in etwa gleich sind, gilt  $I_2 \approx I_1 = \frac{U_1}{R_{ein}}$ . Mit dem durch  $I_2$  am Lastwiderstand hervorgerufenen Spannungsabfall

ergibt sich das Ergebnis in der Tabelle.

Für die KGS kann man sich erinnern, daß  $U_{be0}$  für einen Arbeitspunkt im Normal-aktiven Bereich auf der Steuerkennlinie näherungsweise konstant ist. Das gleiche gilt daher auch im Kleinsignalbetrieb. Zur Verdeutlichung dient die folgende Abschätzung:

Die Extremwerte des Emittorstroms bei konstanter Basis-

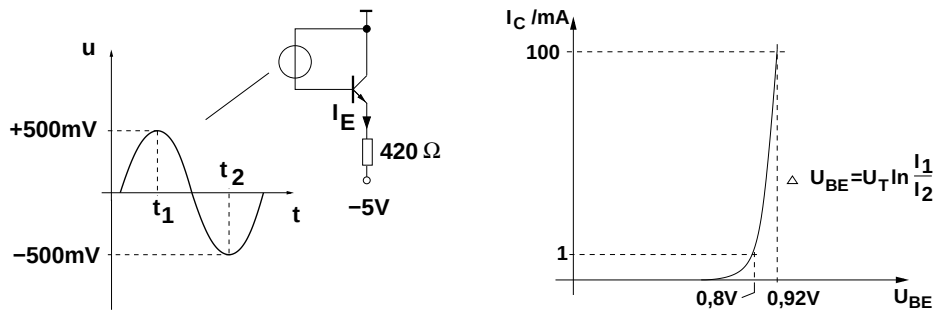


Abb. 5.4: Beispiel zur Konstanz der Basis-Emitterspannung. Links: Emittorfolger mit sinusförmiger Aussteuerung. Rechts: Geringe Änderung von  $U_{be}$  trotz Änderung des Kollektorstroms um den Faktor 100

Emitterspannung ergeben sich in dem Beispiel in Abb. (5.4) zu:

$$\begin{aligned} I_E(t_1) &\approx (5V - 0,8V + 0,5V) = 11,2mA = I_{E_{max}} \\ I_E(t_2) &\approx (5V - 0,8V - 0,5V) = 8,8mA = I_{E_{min}} \end{aligned}$$

wird die Stromabhängigkeit von  $U_{be}$  berücksichtigt, ergibt sich ein maximaler Unterschied  $\Delta U_{be}$  der Basis-Emitterspannungen von

$$\Rightarrow \Delta U_{be} = U_T \ln \frac{11,2}{8,8} = 6,3mV$$

Bezogen auf den Spannungshub ergibt sich damit ein Fehler von  $\frac{6,3}{1000} \approx 0,6\%$ . Daher kann in guter Näherung gelten:

Die Spannungsverstärkung des Emittorfolgers im quasistatischen Betrieb kann mit  $V_U \approx 1$  angenommen werden.

$R_{ein}$  : Durch die Wirkung der gesteuerten Quelle werden die Impedanzen zwischen der Emittor- und Basisseite mit der Stromverstärkung  $\beta$  transformiert. Impedanzen auf der Basisseite ( $R_G$  und  $r_b$ ) erscheinen durch  $\beta$

dividiert (verkleinert) auf der Emmitterseite. Impedanzen auf der Emmitterseite ( $R_L$  und  $r_e$ ) erscheinen mit  $\beta$  multipliziert (vergrößert) auf der Basisseite.

Dieses Verhalten kann in verallgemeinerter Form durch einen „T-Operator“ auch für den HF-Bereich beschrieben werden. (Inhalt der Vertiefungsvorlesung).

$R_{aus}$  : Für die EGS und BGS bildet die hochohmige ( $= \frac{1}{g_o}$ ) Kollektorstromquelle (vgl. Ersatzschaltbild) parallel zu dem hochohmigen Ausgangsleitwert die Ausgangsimpedanz. Sie kann in guter Näherung ( $\frac{1}{g_o} \gg R_L$ ) als  $\infty$  angenommen werden.

Für die KGS stellt der Emmitterknoten die Ausgangsimpedanz. Hier gilt wieder das Gleiche wie unter  $R_{ein}$ .

Entsprechend der vorangegangenen Interpretationen kann für die Tabelle (5.3) der Kenngrößen eine äquivalente Tabelle der Wirkungsersatzschaltbilder angegeben werden. Die Wirkungsersatzschaltbilder dienen dazu, die Wirkung des Transistors bei Betrachtung der jeweiligen Kenngröße darzustellen. Zu beachten ist, daß die angegebenen Ersatzschaltbilder nur bei der Ermittlung/Beobachtung der Kenngröße der jeweiligen Zeile ihre Gültigkeit besitzen. Die Ersatzschaltbilder gelten nur in ihrer Zeile aber für alle drei Grundsaltungen. Dies vereinfacht die Analyse von Schaltungen enorm, da anstelle von 12 Gleichungen nur drei ESB angewendet werden müssen. Zudem kommt der Bild-Charakter dem gewünschten intuitiven Vorgehen am nächsten.

Selbstverständlich gelten die Wirkungsersatzschaltbilder, wie auch die gesamte vorhergehende Herleitung nur für den Bipolartransistor im normal-aktiven Bereich.

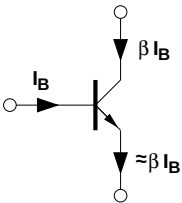
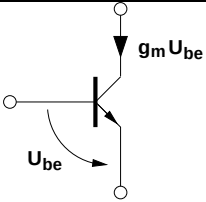
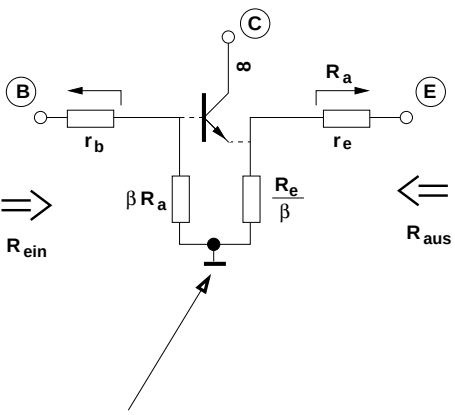
| Kenn-<br>größe     | EGS/KGS/BGS                                                                                                                             | Anmerkung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $V_I$              |                                                        | Die Wirkungs-Ersatzschaltbilder für $V_I$ und $V_U$ können bei der Schaltungsanalyse sowohl gleichzeitig, als auch alternativ angewandt werden.                                                                                                                                                                                         |
| $V_U$              |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $R_{ein}, R_{aus}$ |  <p>Bezugspotential der jeweiligen Grundsaltung.</p> | 1) Transistor ist nicht angeschlossen! (Nur symbolisch zur Orientierung)<br>2)  <p>Symbol bedeutet: Gesamter Widerstand von diesem Punkt <math>\otimes</math> aus in Richtung des Pfeiles gegen den Bezugspunkt (<math>\perp</math>) gemessen.</p> |

Tabelle 5.3: Wirkungsersatzschaltbilder der Transistorgrundsaltungen mit Bipolar-Transistoren. Das Wirkungsersatzschaltbild für die Ein- und Ausgangswiderstände kann nicht ohne weiteres mit denen von  $V_U$ ,  $V_I$  kombiniert werden.



## 5.2 NF-Eigenschaften der Grundsaltungen mit Feldeffekt-Transistoren

Die Eigenschaften der Grundsaltungen mit Feldeffekttransistoren lassen sich einfach aus den Ergebnissen der Bipolartransistoren herleiten. Hierzu wird die Ähnlichkeit der Kleinsignalmodelle verwendet. Das Kleinsignalmodell des Feldeffekttransistors nach Abb. (5.5) geht aus dem des Bipolartransistors durch  $r_b \rightarrow \infty$ ,  $g_{be} \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ , hervor, alles Eigenschaften aufgrund des hochohmigen Gates des Feldeffekttransistors.

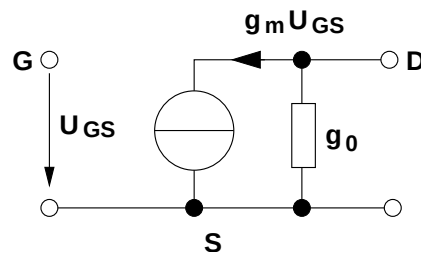


Abb. 5.5: Quasistatisches Kleinsignalmodell des Feldeffekttransistors.

|           | Source-<br>Grundsaltung             | Drain-<br>Grundsaltung                               | Gate-<br>Grundsaltung                   |
|-----------|-------------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $V_I$     | $\infty$                            | $\infty$                                             | -1                                      |
| $V_U$     | $-g_m R_L$                          | $\left(\frac{g_m R_L}{g_m R_L + 1}\right) \approx 1$ | $g_m R_L$                               |
| $R_{ein}$ | $\infty^{11}$                       | $\infty^{11}$                                        | $r_e$                                   |
| $R_{aus}$ | $\infty \left(\frac{1}{g_0}\right)$ | $r_e$                                                | $\infty \left(\gg \frac{1}{g_0}\right)$ |

<sup>11</sup>Wert in der Praxis nicht erzielbar, wegen am Gate angeschlossener Widerstände zur Arbeitspunkt-Einstellung. Dem Idealfall am nächsten kommt die Schaltungsvariante mit Bootstrap nach Abb.(4.17(b))

### 5.3 Eigenschaften und Anwendungen der Grundsaltungen

**Emitter-Grundsaltung (EGS):** Durch hochohmigen Eingang und hohe Spannungsverstärkung geeignet, um kleine Spannungen, speziell bei hochohmigem Generatorwiderstand zu verstärken. Wird Wert auf einen besonders hochohmigen Eingang gelegt, ist ein Feldeffekttransistor vorzuziehen. Für hohe Verstärkungen sollte ein Bipolartransistor verwendet werden. Dies zeigt das Beispiel eines Vergleichs der Steilheit beider Typen bei gleichem Strom im Arbeitspunkt:

| Bipolar-Transistor                                    | FET                                                                         |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $I_{C0} \approx I_{S0} e^{\frac{U_{BE0}}{U_T}}$       | $I_{D0} \approx \frac{k}{2} (U_{GS0} - U_p)^2$                              |
|                                                       | $k = \mu_n \frac{\epsilon_{0X}}{d_{0X}} \frac{b}{L}$                        |
|                                                       | Beispiel:                                                                   |
|                                                       | $k = 600 \frac{cm^2}{Vs} \frac{4\epsilon_0}{50nm} \frac{30\mu m}{2,5\mu m}$ |
|                                                       | $k = 510 \frac{\mu A}{V^2}, (\epsilon_r(SiO_2) \approx 4)$                  |
| $g_m = \frac{I_{C0}}{U_T}$                            | $g_m = k(U_{GS0} - U_p)$                                                    |
| AP bei $I_{C0}=4mA$                                   | $I_{D0}=4mA \Leftrightarrow U_{GS0} - U_p \approx 4V$                       |
| $g_m = \frac{4mA}{26mV} = 154mS$                      | $g_m = k(U_{GS0} - U_p) \approx 2mS$                                        |
| $\Rightarrow$ Mehr als Faktor 70 (in diesem Beispiel) |                                                                             |

Eine Definition von  $k$ :

$$k = \frac{\sqrt{\hat{U}_2^2 + \hat{U}_3^2 + \dots}}{\hat{U}_1} \quad (5.3)$$

$k$  ist das Verhältnis des Effektivwertes aller Oberwellen (unterschiedliche Frequenzen sind unkorreliert  $\rightarrow$  quadratische Addition) zu dem Effektivwert  $\frac{\hat{U}_1}{\sqrt{2}}$  der Grundwelle.

Der wesentliche Beitrag zur Nichtlinearität des Bipolartransistors rührt von der stark nichtlinearen Eingangskennlinie  $I_B = I_B(U_{BE})$  her. Der Zusammenhang  $I_C = I_C(I_B)$  ist vergleichsweise linear.

Für eine Ansteuerung  $u_{be}(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$  im Arbeitspunkt  $U_{BE0}$  ergibt sich im quasistatischen Fall der Kollektorstrom:

$$i_C \approx I_S e^{\frac{u_{be}}{U_T}} = I_S e^{\frac{U_{be0} + u_{be}(t)}{U_T}} \quad (5.4)$$

$$= \underbrace{I_S e^{\frac{U_{be0}}{U_T}}}_{I_{C0}} e^{\frac{\hat{U}}{U_T} \sin(\omega t)} \quad (5.5)$$

Bei geringer Aussteuerung genügt als Näherungslösung die Entwicklung der Exponentialfunktion bis zum quadratischen Glied:  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Geringe Aussteuerung liegt z. B. vor, wenn der kubische Term nur ein Zehntel des quadratischen Terms beträgt:  $\frac{x^2}{2} \geq 10 \frac{x^3}{6} \Rightarrow x \leq 0,3 \Leftrightarrow \hat{U} \leq 0,3 U_T$  (Anmerkung: der Faktor 10 wird durch das Quadrieren in der Klirrfaktorberechnung zu einem Faktor 100.)

Für  $i_C$  gilt dann die quadratische Näherung

$$i_C = I_{C0} \left( 1 + \frac{\hat{U}}{U_T} \sin(\omega t) + \left( \frac{\hat{U}}{2U_T} \right)^2 (1 - \cos(2\omega t)) \right) \quad (5.6)$$

Der quadratische Klirrfaktor  $k_2$  ergibt sich damit zu

$$k_2 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{(\frac{\hat{U}}{2U_T})^2}{\frac{\hat{U}}{U_T}} = \frac{\hat{U}}{4U_T} \quad \underline{\text{unabhängig vom Arbeitspunkt!}} \quad (5.7)$$

Für einen Klirrfaktor von max. 1% ( $k_2 = 0,01$ ) muß die Amplitude der Eingangsspannung  $\hat{U} \leq 0,04 U_T \approx 1 \text{ mV}$  betragen.

Eine entsprechende Rechnung liefert für den Feldeffekttransistor:

$$k_2 = \frac{\hat{U}}{4 \cdot |U_{GS} - U_P|} \quad \underline{\text{abhängig vom Arbeitspunkt!}} \quad (5.8)$$

Mit den Zahlen des vorangegangenen Beispiels ergibt sich für den Feldeffekttransistor ein Klirrfaktor von 1% erst bei einer Eingangsamplitude von  $\hat{U} = 0,01 \cdot 4 \cdot |U_{GS0} - U_P| = 0,04 \cdot 4 \text{ V} = 160 \text{ mV}$

**Kollektor-Grundsaltung (KGS):** Gegenüber der EGS besitzt die KGS einen um den Betrag  $\beta R_L$  größeren Eingangswiderstand. Dieser ist jedoch immer noch klein gegenüber dem einer KGS mit Feldeffekttransistor. Wesentliche Eigenschaft und Unterschied zur EGS ist der niederohmige

Ausgangswiderstand der KGS. Aufgrund des hohen Ein- und niedrigen Ausgangswiderstandes wird die KGS (Emitterfolger) meist als Impedanzwandler eingesetzt. Ist die Treiberfähigkeit des Ausgangs wichtigstes Kriterium ( $r_e!$ ), sollte ein Bipolar-Transistor gewählt werden. Steht der hochohmige Eingang im Vordergrund, fällt die Wahl auf den Feldeffekttransistor.

**Basis-Grundsaltung (BGS):** Die BGS besitzt die gleiche Spannungsverstärkung und den gleichen Ausgangswiderstand wie die EGS. Ihr Eingangswiderstand ist jedoch näherungsweise so niederohmig wie der Ausgangswiderstand des Emitterfolgers. Sie eignet sich damit eher für die Ansteuerung mit Strömen ( $\rightarrow$  Kaskade). Durch entsprechende Dimensionierung des Eingangswiderstandes<sup>12</sup> läßt sich eine Anpassung an niederohmige Leitungssysteme ( $50/75\ \Omega$ ) in HF-Anwendungen erzielen. Da die BGS vornehmlich wegen ihres niederohmigen Eingangs eingesetzt wird, bietet sich die Verwendung eines Bipolartransistors an.

---

<sup>12</sup>Für diesen HF-Einsatzzweck muß von einer Eingangsimpedanz gesprochen werden.

## 5.4 Eigenschaften der Grundsaltungen bei hohen Frequenzen

Für analytische Betrachtungen bei hohen Frequenzen genügt meist das Giacoletto-Ersatzschaltbild:

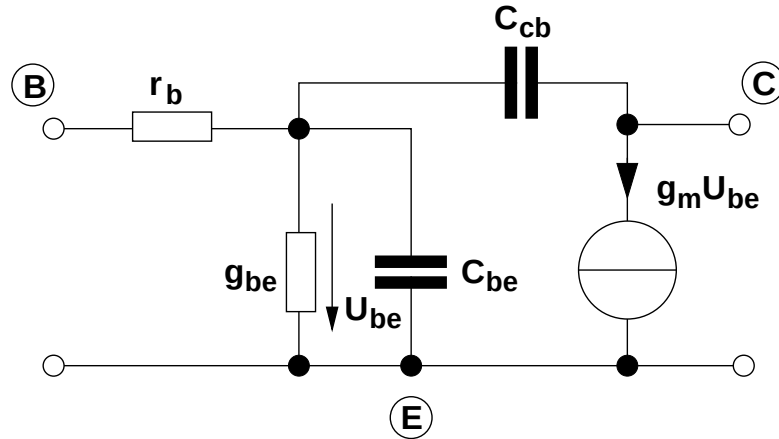


Abb. 5.6: Giacoletto-Ersatzschaltbild

Der hochohmige Ausgangsleitwert  $g_0$  kann in der Regel gegenüber der angeschlossenen Lastimpedanz vernachlässigt werden und wurde aus diesem Grund in Abb. 5.6 nicht berücksichtigt. Meist kann auch  $g_{be}$  gegenüber den parallel liegenden Impedanzen vernachlässigt werden (ergibt sich z.B. in der Berechnung der EGS). Zur Vereinfachung wird die gesamte Kollektor-Basis-Kapazität an den inneren Basisknoten gelegt. Dies schränkt die Genauigkeit gegenüber der Verwendung eines verteilten Modells bei hohen Frequenzen ( $f \geq \frac{f_T}{2}$ ) zwar ein, ergibt jedoch überschaubare, „leicht“ zu interpretierende Ausdrücke, bei in der Regel ausreichender Genauigkeit. Aus dem gleichen Grund wird anstelle der ab  $f \geq \frac{f_T}{2}$  an Bedeutung gewinnenden komplexen Steilheit und Diffusionskapazität mit den reellen Größen als Näherung gearbeitet. Die auf Basis des so vereinfachten Giacoletto-Ersatzschaltbild gewonnenen Ergebnisse können in einem zweiten Schritt mit Hilfe eines Schaltungssimulators präzisiert werden.

Falls in der Berechnung von Vorteil, kann  $C_{cb}$  auch bei i. e. gleicher Genauigkeit (technologie- und anwendungsabhängig) an den äußeren Basisknoten gelegt werden.<sup>13</sup>

<sup>13</sup>Dann entfällt jedoch die recht praktische Eigenschaft, daß  $r_b$  in Reihe zu einer eventuell

Zur Berechnung empfiehlt sich die formale Knotenspannungsanalyse (vgl. Übung), das Aufstellen von Knoten- und Maschengleichungen von Hand (Erfahrung) oder zunächst eine Vereinfachung durch Umformung des Netzwerkes mit Hilfe des Miller-Theorems und geeigneten Annahmen/Näherungen.

Letzteres Vorgehen liefert schon zu Beginn der Rechnung interpretierbare und damit in der Umformung und Näherung gezielt beeinflussbare Ergebnisse.

### 5.4.1 HF-Eigenschaften der EGS

Als Beispiel hierfür wird in einer Übung die Berechnung und Auswertung der Spannungsübertragungsfunktion  $\underline{V}_u$  sowie der Ein- und Ausgangsimpedanz  $\underline{Z}_{\text{ein}}$  und  $\underline{Z}_{\text{aus}}$  der EGS mit parasitärer Last ( $R_L \parallel C_L$ ) gezeigt.

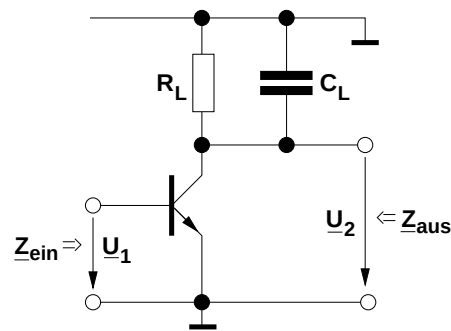


Abb. 5.7: Wechselstromersatzschaltung zur Berechnung der EGS.

Es ergibt sich für die Spannungsübertragung

$$\underline{V}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{V_0}{1 + j\omega(\tau'_b + \tau_L) - \omega^2\tau_L\tau_b} \quad (5.9)$$

mit

$$V_0 = -g_m R_L \quad \text{„Gleichspannungsverstärkung“} \quad (5.10)$$

$$\tau_b = r_b C_{be} \quad \text{„Basis-Zeitkonstante“} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \tau'_b &= r_b (C_{be} + |V_0|C_{Cb}) && \text{„vergrößerte Basis-Zeitkonstante“} \\ &= r_b C'_{be} && \text{aufgrund des Miller-Effektes} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\tau_L = R_L C_C \quad \text{„Last-Zeitkonstante“} \quad (5.13)$$

vorhandenen Generatorimpedanz  $\underline{Z}_G$  liegt, die einfach durch Austausch  $r_b \rightarrow r_b + \underline{Z}_G$  berücksichtigt werden kann.

$R_L$ : gesamte am Ausgang liegende ohmsche Last

$C_C$ : gesamte am Ausgang liegende Kapazität  
( $C_C = C_{cb} + C_L$  der Last)

sowie für die Ein- und Ausgangsimpedanzen

$$\underline{Z}_{ein} = \frac{1}{j\omega C'_{be}} + r_b + R_L \frac{C_C}{C'_{be}} \quad (5.14)$$

mit

$$C'_{be} := C_{be} + |V_0|C_{cb} \quad (5.15)$$

und

$$\underline{Z}_{aus} = R_L \parallel g_0 \parallel (C_{cb} + C_L) \approx C_{cb} \parallel C_L \parallel R_L \quad (5.16)$$

Die Berechnung der Eigenschaften von BGS und Emitterfolger (KGS) erfolgen analog zur Berechnung der EGS. Dies sollte zur Übung jeder Student einmal selbst berechnen. Hervorzuheben sind die Besonderheiten bei  $\underline{Z}_{ein}$  und  $\underline{Z}_{aus}$  des Emitterfolgers und bei  $\underline{Z}_{ein}$  der Basisschaltung.

Anstelle der Berechnung können die Ergebnisse auch mit Hilfe einfacher Überlegungen anhand der bereits hergeleiteten NF Ersatzschaltbilder bestimmt werden. Dies soll im Folgenden am Beispiel der KGS in Abb. 5.8 gezeigt werden:

**HF-Eigenschaften des Emitterfolgers** In dem HF-Ersatzschaltbild wurden die bereits bei der EGS angewandten, im HF-Fall gut erfüllten Näherungen  $g_{be} \ll \frac{1}{r_b}$ ,  $g_{be} \ll \omega C_{be}$  und  $g_0 \ll |Z_L|^{-1}$  berücksichtigt. Weiterhin wurde  $C_{cb}$  an den äußeren Knoten gelegt, wodurch sich bei gleichbleibender Genauigkeit [remo04] die Berechnung erheblich vereinfacht.<sup>14</sup> Durch Austausch  $g_{be} \rightarrow j\omega C_{be}$ ,  $R_L \rightarrow Z_L$  können aufgrund der identischen Topologie die bereits hergeleiteten NF-Formeln verwendet werden. Für den Austausch von  $\beta \rightarrow \underline{\beta}(j\omega)$  kann die im HF-Fall erfüllte Näherung

$$\underline{\beta} = \frac{\beta_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega_\beta}} \underset{\omega \gg \omega_\beta}{\approx} \frac{\beta_0 \omega_\beta}{j\omega} = \frac{\omega_T}{j\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_T}{j\omega} \approx \frac{1}{j\omega C_{be} r_e} \Leftrightarrow \hat{=} \text{NF-Fall} \frac{1}{g_{be} r_e} \quad (5.17)$$

<sup>14</sup>Es fällt auf, daß  $C_{cb}$  nun von der Eingangsspannungsquelle kurzgeschlossen ist und keine Auswirkung auf die Übertragungsfunktion besitzt. Dies wird jedoch bei realer Ansteuerung mit endlichem Generatorwiderstand durch ein kleineres  $\underline{Z}_{ein}$  kompensiert.

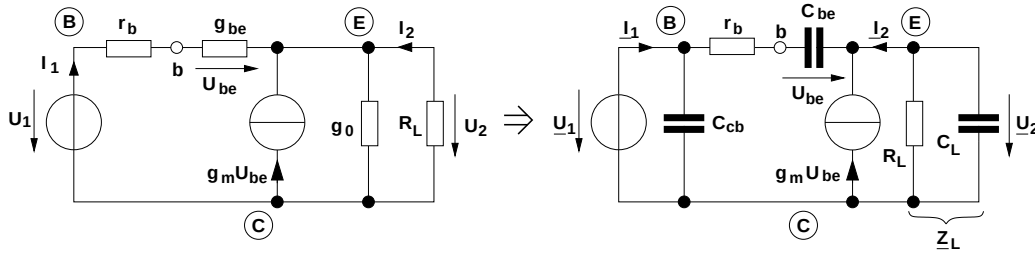


Abb. 5.8: Ermittlung des HF-Ersatzschaltbildes durch Austausch der NF-Elemente durch entsprechende HF-Elemente am Beispiel der KGS.

Links: NF-Kleinsignalersatzschaltbild, rechts:  
HF-Kleinsignalersatzschaltbild mit Elementen des  
Giacoletto-Ersatzschaltbildes.

wegen der Definition der  $\beta$ -Grenzfrequenz  $\omega_\beta = \frac{g_{be}}{C_{be}}$  verwendet werden. Die verwendete Näherung für  $\omega \gg \omega_\beta$  ist gleichbedeutend mit  $g_{be} \ll \omega C_{be}$ . Bei der Berechnung von  $V_I$ ,  $R_{ein}$  und  $R_{aus}$  ist die im HF-Fall zusätzlich am Eingang liegende Kollektor-Basis-Kapazität zu berücksichtigen.

Eine Auswertung des HF-Ersatzschaltbildes für die Spannungsverstärkung ergibt, dass die Näherung  $|V_u| \approx 1$  für den Emitterfolger auch im HF-Fall ( $\lesssim \omega_T$ ) gut erfüllt ist.<sup>15</sup>

Als Beispiel für die Auswertung des HF-Ersatzschaltbildes soll hier die Berechnung der Eingangsimpedanz des Emitterfolgers gezeigt werden: (Formel aus Tabelle 5.1)

$$\text{NF-Fall: } R_{ein} = \frac{U_1}{I_1} = r_b + \frac{g_0 + \frac{1}{R_L} + g_{be} + g_m}{g_{be}(g_0 + \frac{1}{R_L})} \quad (5.18)$$

Durch Austausch:  $g_0 + \frac{1}{R_L} \rightarrow \frac{1}{Z_L}$ ,  $g_{be} \rightarrow j\omega C_{be}$  ergibt sich die Eingangsimpedanz für hohe Frequenzen:

$$\text{HF-Fall: } Z_{ein} = \frac{U_1}{I_1} = \left( r_b + \frac{\frac{1}{Z_L} + j\omega C_{be} + \frac{1}{r_e}}{j\omega C_{be} \frac{1}{Z_L}} \right) \parallel j\omega C_{cb} \quad (5.19)$$

$$= \left( r_b + \frac{r_e + j\omega C_{be} r_e Z_L + Z_L}{j\omega C_{be} r_e} \right) \parallel j\omega C_{cb} \quad (5.20)$$

<sup>15</sup>Achtung: Diese Aussage gilt nur bei der hier untersuchten Ansteuerung mit einer idealen Spannungsquelle.



Mit der Näherung aus Gl. (5.17):

$$\underline{\beta} \approx \frac{1}{j\omega C_{be} r_e}, \quad (f \gg f_\beta) \quad (5.21)$$

gilt

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ein} &= (r_b + \underline{\beta} r_e + \underline{Z}_L + \underline{\beta} \underline{Z}_L) \parallel j\omega C_{cb} \\ \underline{Z}_{ein} &= (r_b + \frac{1}{j\omega C_{be}} + \underline{Z}_L(1 + \underline{\beta})) \parallel j\omega C_{cb} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Multiplikation  $(1 + \underline{\beta})$  vor der Lastimpedanz wird auch als T-Operator bezeichnet und spielt in der Entwicklung schneller Bipolar-Schaltungen eine wichtige Rolle ( $\rightarrow$  Vertiefungsvorlesung)

Die Eingangsimpedanz lässt sich auch in Form eines Ersatzschaltbildes nach Abb. 5.9 angeben.

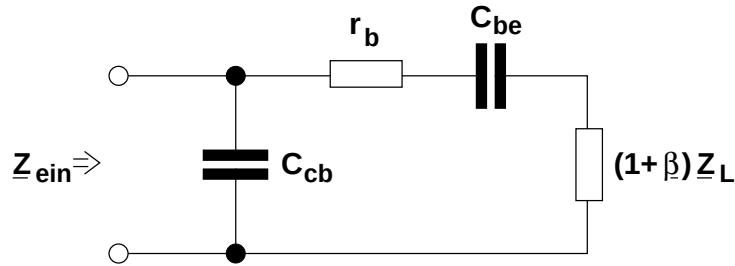


Abb. 5.9: Ersatzschaltung der Eingangsimpedanz eines Emitterfolgers.

**Beachten:** Für  $\underline{Z}_L = \frac{1}{j\omega C}$  ergibt sich der Term

$$\underline{\beta} \underline{Z}_L = \frac{\omega_T}{j\omega} \frac{1}{j\omega C} = -\frac{\omega_T}{\omega^2 C} \quad (5.23)$$

Man erhält also einen sich quadratisch mit der Frequenz verringernden negativen Widerstand. Dies kann unter bestimmten Voraussetzungen zu einer instabilen Schaltung führen.

**Dynamische Eigenschaften der BGS:** Die exemplarisch bereits für den Emitterfolger gezeigte Vorgehensweise lässt sich auch hier zu einer vereinfachten Herleitung der HF-Eigenschaften anwenden. Bei der BGS liegt die Kollektor-Basis-Kapazität parallel zum Ausgang und führt dort mit einer evtl. vorhandenen Lastkapazität  $C_L$  zu der Tiefpasskonstante

$$\underline{V}_u \approx g_m R_L \parallel (C_{cb} + C_L) \quad (5.24)$$

Die Kollektor-Basis-Kapazität bildet auch in erster Näherung die Ausgangsimpedanz. Die Eingangsimpedanz der BGS ist in erster Näherung identisch mit der Ausgangsimpedanz des Emitterfolgers bei idealer Ansteuerung ( $R_G = 0$ ). Die Überprüfung dieser Eigenschaft wird als Übung empfohlen.

### 5.4.2 Verstärkungs-Bandbreite Produkt

Unter der Voraussetzung, dass die Grenzfrequenz der BGS (gut erfüllt, da kein Miller-Effekt) und der EGS (nur bei dominanter Lastzeitkonstante  $\tau_L$ , vgl. Gl. (5.13)) beschrieben wird durch

$$R_L C_C \approx \frac{1}{2\pi f_g}, \quad R_L: \text{Lastwiderstand} \quad (5.25)$$

$C_C$ : gesamte an  $R_L$  wirksame Kapazität

gilt mit

$$V_{U0} = g_m R_L \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{2\pi f_g} = \frac{V_0}{g_m} C_C \Rightarrow f_g V_0 = \frac{g_m}{2\pi C_c} = \text{const. für gewählten AP} \quad (5.27)$$

### 5.4.3 HF-Eigenschaften der Grundsaltungen mit Feldeffekttransistoren

Für den Feldeffekttransistor läßt sich ein vergleichbares Modell wie für den Bipolartransistor angeben: Mit Hilfe dieses Kleinsignalmodells gelten alle be-

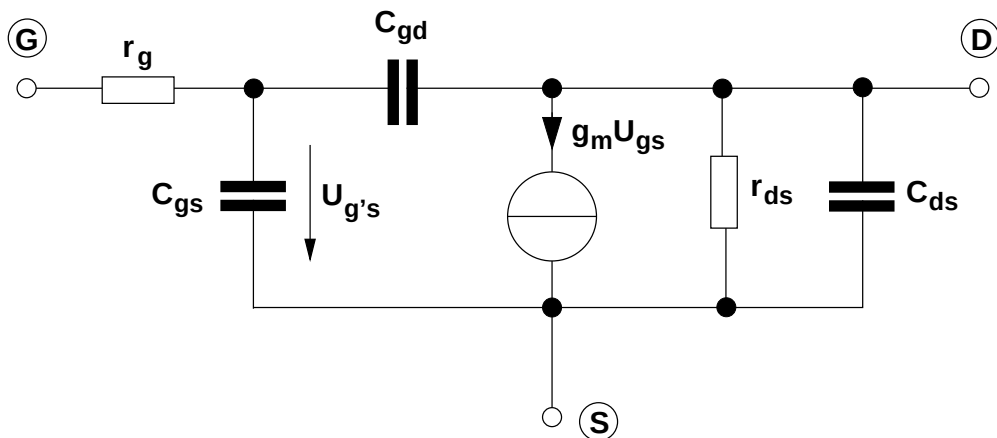


Abb. 5.10: HF-Kleinsignalersatzschaltbild eines Feldeffekttransistors.

reits für den Bipolartransistor hergeleiteten Formeln.

Wesentliche Unterschiede in den Parametern ergeben sich bezüglich  $C_{gs}$  ( $\rightarrow$  enthält keinen Diffusionsanteil) und  $g_m$  (deutlich kleiner).

## 6 Rückgekoppelte Schaltungen

### 6.1 Motivation aus Sicht der Verstärker-Optimierung

Bisher wurden Verstärker-Schaltungen betrachtet, die ein am Eingang angelegtes Signal z.B.  $(\underline{U}_1(j\omega), \underline{I}_1(j\omega))$  um eine Verstärkung  $\underline{V}_U(j\omega), \underline{V}_I(j\omega)$  vergrößert, am Ausgang in der Form  $\underline{U}_2(j\omega) = \underline{U}_1(j\omega)\underline{V}_U(j\omega)$  bzw.  $\underline{I}_2(j\omega) = \underline{I}_1(j\omega)\underline{V}_I(j\omega)$  bereitstellen. Wir schreiben im Folgenden zur Abkürzung und Verallgemeinerung für das Eingangssignal  $\underline{X}(s)$ ,  $(s = \sigma + j\omega)$  und das Ausgangssignal  $\underline{Y}(s)$ . Anstelle der Verstärkung soll allgemein die Übertragungsfunktion  $\underline{F}_1(s)$  treten. Die bisher behandelten Verstärker lassen sich dann mit dem in Abb. (6.1) folgenden einfachen Signalflussdiagramm beschreiben.

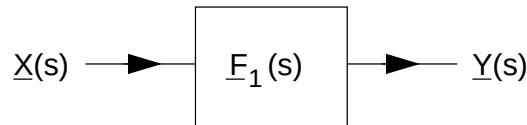


Abb. 6.1: Signalflussdiagramm zur Darstellung eines Verstärkers im Kleinsignalbetrieb.

In dieser Darstellung besteht, wie auch in den vorangegangenen Kapiteln, mit Ausnahme der Kollektor-Basis-Kapazität und der Bootstrap-Schaltung keine Rückwirkung des Ausgangs auf den Eingang.<sup>16</sup>

Die Qualität des Ausgangssignals  $\underline{Y}(s)$  wird entsprechend dem Signalflussdiagramm ausschließlich durch die Eigenschaften von  $\underline{F}_1(s)$  bestimmt. Weicht  $\underline{F}_1(s)$  vom Idealfall ab, dann entspricht  $\underline{Y}(s)$  nicht mehr dem, von dem Entwickler gewünschten Ausgangssignal. Abweichungen sind möglich z.B. aufgrund von Bauelementetoleranzen, Parameterdrift (Temperatur, Langzeitstabilität) oder Abhängigkeiten von  $\underline{F}_1(j\omega)$  vom Eingangssignal. Auch ist  $\underline{F}_1(s)$  i.d. Regel nicht ideal aufgrund von Einschränkungen durch Realisierbarkeit, oder nichtideale Bauelementeeigenschaften.

<sup>16</sup>In der Tat können  $C_{cb}$  und die Rückkopplungsschleife bei der Bootstrapvariante als Rückkopplung der Schaltung aufgefasst und entsprechend analysiert werden. Sie lassen sich aber auch, ohne Einschränkung der nachfolgenden Aussagen mit Hilfe des Miller-Theorems durch geänderte Ersatzschaltbild-Werte berücksichtigen. Der Verstärker mit der Übertragungsfunktion  $\underline{F}_1(s)$  ist dann rückkopplungsfrei.

Die Idee der Rückkopplung bei Verstärkern<sup>17</sup> beruht darauf, die Abweichung des Ausgangssignals  $\underline{Y}(s)$  von dem idealen Signal zu ermitteln, und ein entsprechendes Korrektursignal derart wieder in den Eingang einzuspeisen (Rückkopplung), dass die Abweichung möglichst klein wird.

Für die Ermittlung der Abweichung ist ein Vergleich mit einer Referenz nötig. Abbildung (6.2) zeigt als Gedankenexperiment die hier zugrunde liegende Idee.

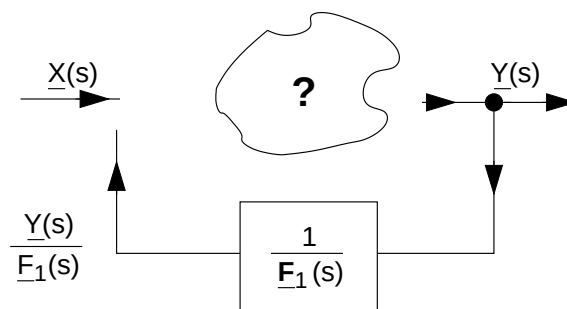


Abb. 6.2: Gedankenmodell zur Ermittlung der Beschaffenheit eines idealen rückgekoppelten Verstärkers.

Wir überlegen, welche Eigenschaften und Verknüpfungen den, in Abb. (6.2) gezeigten Elementen zuzuweisen sind. Ziel ist es, ein Ausgangssignal  $\underline{Y}(s)$  zu erzeugen, das möglichst identisch mit  $\underline{X}(s)\underline{F}_1(s)$  übereinstimmt (vgl. Abb.(6.1)). Dabei ist zu beachten, dass die Realisierung von  $\underline{F}_1(s)$  den zuvor beschriebenen nichtidealen Einschränkungen unterliegt. Am Ausgang eines zunächst noch unbekannten, verstärkenden Netzwerkes (?) soll das Ausgangssignal  $\underline{Y}(s)$  liegen. Dieses Signal wird mit der Inversen der gewünschten Übertragungsfunktion  $\underline{F}_1(s)$  multipliziert, wieder an den Eingang zurückgeführt. Dort wird es mit dem Eingangssignal  $\underline{X}(s)$  verglichen. Für den Fall, dass das gesamte System die gewünschte Übertragungsfunktion  $\underline{F}_1(s)$  besitzt und nur  $\underline{X}(s)$  in das Netzwerk (?) eingespeist würde, wären  $\underline{X}(s)$  und  $\underline{Y}(s)\underline{F}_1^{-1}(s)$  identisch.

Die Abweichung von  $\underline{Y}(s)$  von dem idealen Signal ergibt sich rückgerechnet auf den Eingang des Netzwerkes, aus der Differenz  $\underline{E}(s) = \underline{X}(s) - \underline{F}_1^{-1}(s)\underline{Y}(s)$ . Die Differenzbildung zur Ermittlung der

<sup>17</sup>Dies gilt mit ähnlicher Motivation ebenfalls für alle Regelsysteme.

Abweichung soll durch das Symbol in Abb. (6.3) dargestellt werden.

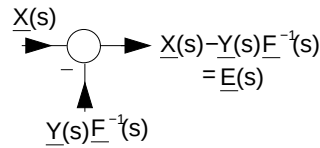


Abb. 6.3: Symbol zur Darstellung einer schaltungstechnischen Subtraktion im Signalflussdiagramm.

Je besser  $\underline{Y}(s)$  dem Idealfall  $\underline{F}(s)\underline{X}(s)$  entspricht, umso kleiner wird die Differenz. Im Idealfall geht sie gegen Null. Das verstärkende Netzwerk (?) muss daher einen Verstärker mit möglichst hoher Verstärkung enthalten, um selbst bei kleinsten Eingangsdifferenzen ( $|\underline{E}(s)| \rightarrow 0$ ) noch den endlichen Wert  $|\underline{Y}(s)|$  am Ausgang zu liefern. Hieraus wird klar, dass die schaltungstechnische Repräsentation des verstärkenden Netzwerkes im Idealfall ein Differenzverstärker mit unendlich hoher Verstärkung ist. Die Übertragungseigenschaften werden dann ausschließlich durch die inverse Übertragungsfunktion des Rückkopplungsnetzwerkes bestimmt. Der später behandelte Operationsverstärker entspricht dieser Forderung weitestgehend.

Das rückgekoppelte System lässt sich in Abb. (6.4) basierend auf den vorangegangenen Überlegungen zeichnen. Dabei ist die Darstellung prinzipiell für alle rückgekoppelten Schaltungen anwendbar. Im Rahmen dieser Vorlesung bezeichnet  $\underline{F}_a(s)$  jedoch immer eine Schaltung mit verstärkenden (a  $\hat{=}$  "amplifier") Eigenschaften.

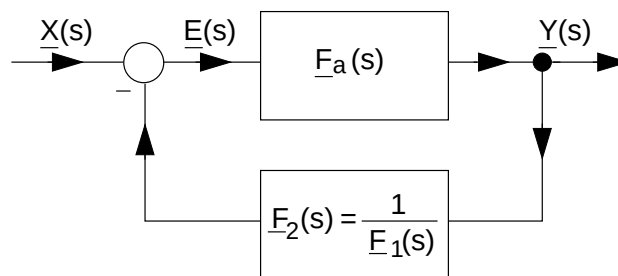


Abb. 6.4: Allgemeine Darstellung einer rückgekoppelten Schaltung.

Die zuvor angestellten Überlegungen sollen im Folgenden mathematisch formuliert, überprüft und auf Verstärker-Schaltungen zugeschnitten werden.

Aus dem Signalflussdiagramm läßt sich mit der Übertragungsfunktion des Rückkopplungsnetzwerkes  $\underline{F}_2(s) = \underline{F}_1^{-1}(s)$  ablesen

$$\underline{Y}(s) = \underline{F}_a(s)(\underline{X}(s) - \underline{Y}(s)\underline{F}_2(s)) \quad (6.1)$$

oder umgestellt

$$\underline{Y}(s) = \frac{\underline{F}_a(s)}{1 + \underline{F}_a(s)\underline{F}_2(s)} \underline{X}(s). \quad (6.2)$$

Dies ist die allgemein bekannte Beschreibung eines rückgekoppelten Systems. Die Größe  $\underline{F}_2(s)$  wurde eingeführt, um die Identität des hier behandelten Falles mit der allgemeinen Darstellung aufzuzeigen, und daraus resultierende Anwendungen direkt zu ermöglichen.

Für die zuvor intuitiv hergeleitete Forderung nach hoher Verstärkung folgt das gewünschte Ergebnis:

$$\underline{Y}(s) = \frac{1}{\underline{F}_2(s)} \Big|_{|\underline{F}_a(s)| \rightarrow \infty} = \underline{F}_1(s) \underline{X}(s) \quad (6.3)$$

Es gehen in diesem Fall also nur die Eigenschaften des Rückkopplungsnetzwerkes mit  $\underline{F}_2(s)$  ein, d.h.  $\underline{Y}(s)$  ist unabhängig von  $\underline{F}_a(s)$ . Natürlich sind in diesem Fall die Eigenschaften von  $\underline{F}_2(s)$  entscheidend für die Qualität des Verstärkers.

Da  $\underline{F}_2(s)$  aber die Inverse der gewünschten Übertragungsfunktion darstellt, läßt sich  $\underline{F}_2(s)$  in den meisten Fällen sehr einfach realisieren. Für einen idealen Verstärker mit der Verstärkung 100 ist  $\underline{F}_2(s) = \frac{1}{100}$  und läßt sich durch einen einfachen Spannungsteiler realisieren. Die Grenzen der Realisierbarkeit liegen in diesem Fall eher in der endlichen Verstärkung von  $\underline{F}_a(s)$ .

Die zuvor beschriebene Rückkopplung wird als Gegenkopplung bezeichnet. Sie läßt sich anwenden zur Stabilisierung von Schaltungseigenschaften bei Parameterveränderungen aufgrund Bauelemente-Toleranzen, Alterung, Temperaturänderungen, zur Frequenzgangskorrektur, zur Verbesserung der Linearität und zur Beeinflussung der Ein- und Ausgangsimpedanzen. Diese Vorteile werden auf Kosten einer Verringerung der Verstärkung gegenüber dem nicht gegengekoppelten Betrieb erzielt.

Auch muß der Schaltungsentwickler sicher stellen, dass aus der Gegenkopplung keine Mitkopplung wird. Dabei überlagern sich das Eingangs- und das rückgekoppelte Signal konstruktiv aufgrund eines durch Phasendrehung in der Schleifenverstärkung  $\underline{F}_a(s) \cdot \underline{F}_2(s)$  hervorgerufenen Vorzeichenwechsels

(Addition statt Differenzbildung).

Gezielt wird die Auswirkung der Mitkopplung angewandt zur Schwingungserzeugung, zur Erhöhung der Verstärkung bei frequenzselektiven HF-Verstärkern und zur Vergrößerung der Bandbreite bei breitbandigen Verstärkern (z.B. in optischen Übertragungssystemen  $\Rightarrow$  Vertiefungsvorlesung).

Zur Unterscheidung zwischen Gegen- und Mitkopplung kann der Betrag des Frequenzganges der Gesamtübertragungsfunktion mit- und ohne Rückkopplungsnetzwerk verglichen werden. Für die Mitkopplung gilt:

$$\left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| > \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right|_{|F_2(j\omega)|=0} = |\underline{F}_a(j\omega)| \quad (6.4)$$

Beachten: Aufgrund der Frequenzabhängigkeit kann in Teilen des Übertragungsfrequenzbandes Gegenkopplung, in anderen Teilen Mitkopplung vorliegen. Häufig bewegen sich die Eigenschaften einer rückgekoppelten Schaltung mit steigender Frequenz immer mehr von einer Gegenkopplung in Richtung Mitkopplung (speziell bei Breitbandverstärkern).

## 6.2 Systematische Untersuchung von Rückkopplungen von Verstärkerzweitoren

Die zuvor behandelten Verstärker- und Rückkopplungsschaltungen lassen sich jeweils durch Zweitore beschreiben.<sup>18</sup> Zur Verallgemeinerung soll das Verstärkerzweitor im Weiteren als Hauptzweitor bezeichnet werden. Es ergeben sich prinzipiell vier Möglichkeiten, wie ein Signal aus dem Hauptzweitor aus und wieder eingekoppelt werden kann.

---

<sup>18</sup>Für den, in den Beispielen gezeigten Fall von rückgekoppelten Dreitoren ist die Torbedingung immer erfüllt.



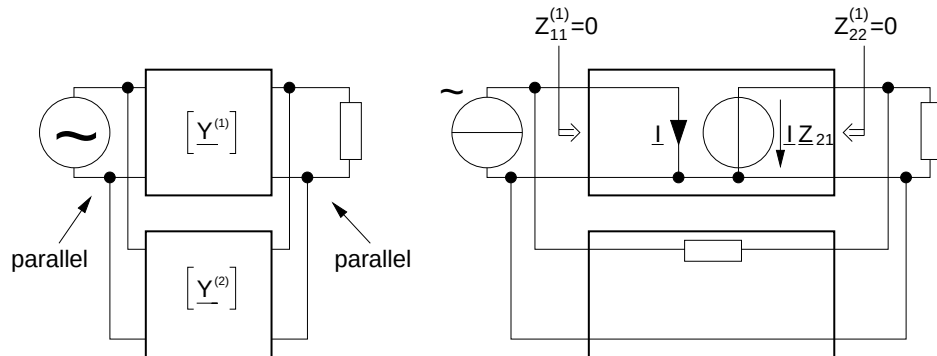


Abb. 6.5: Links: Parallel-Parallel-Kopplung (PPK):  $[\underline{\mathbf{Y}}] = [\underline{\mathbf{Y}}^{(1)}] + [\underline{\mathbf{Y}}^{(2)}]$ .  
Rechts: Idealisiertes Beispiel für optimale Rückwirkung der PPK.

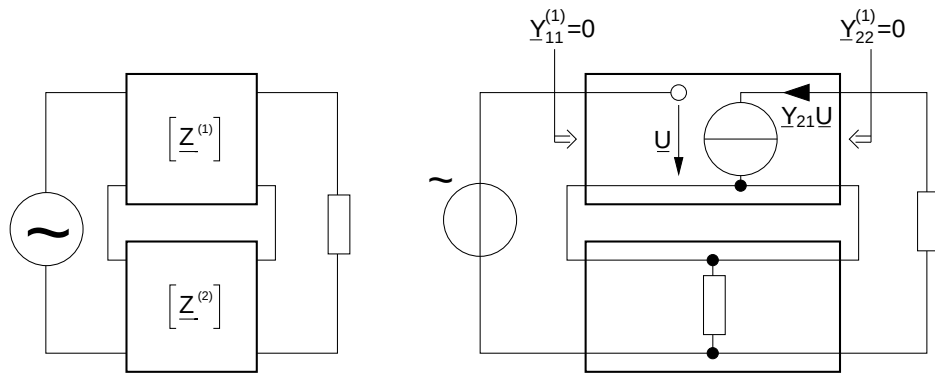
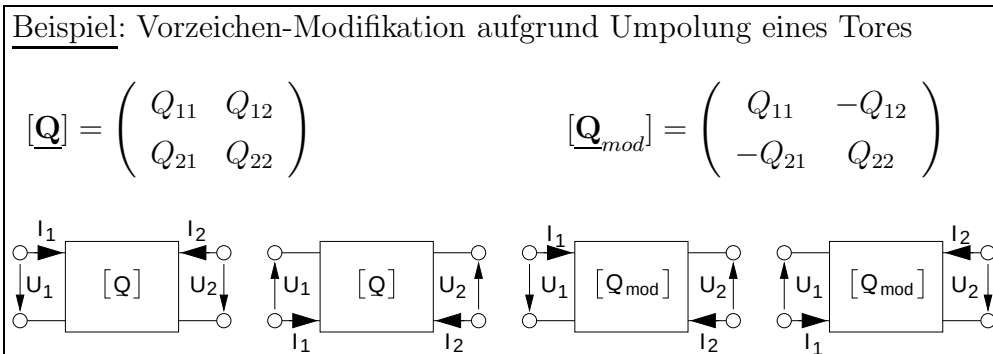


Abb. 6.6: Links: Serien-Serien-Kopplung (SSK):  $[\underline{\mathbf{Z}}] = [\underline{\mathbf{Z}}^{(1)}] + [\underline{\mathbf{Z}}^{(2)}]$ . Rechts:  
Idealisiertes Beispiel für optimale Rückwirkung der SSK.



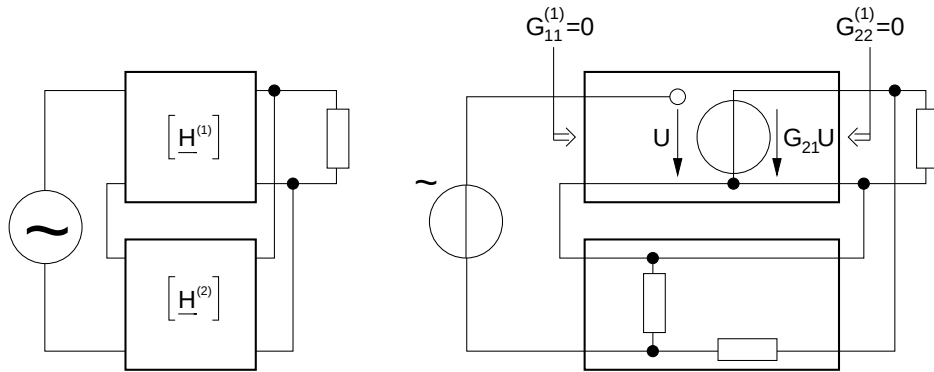


Abb. 6.7: Links: Serien-Parallel-Kopplung (SPK):  $[\underline{\mathbf{H}}] = [\underline{\mathbf{H}}^{(1)}] + [\underline{\mathbf{H}}^{(2)}]$ .  
Rechts: Idealisiertes Beispiel für optimale Wirkung der SPK mit umgepoltem Ausgangstor (Vorzeichenmodifikation erforderlich).

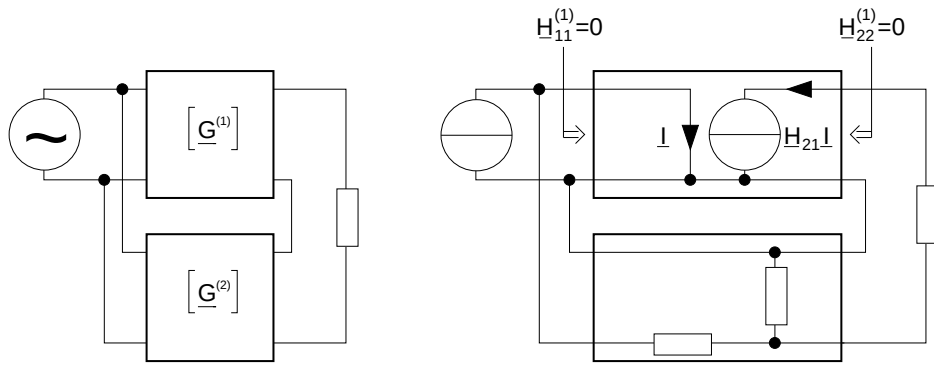


Abb. 6.8: Links: Parallel-Serien-Kopplung (PSK):  $[\underline{\mathbf{G}}] = [\underline{\mathbf{G}}^{(1)}] + [\underline{\mathbf{G}}^{(2)}]$ .  
Rechts: Idealisiertes Beispiel für optimale Wirkung der PSK mit umgepoltem Eingangstor (Vorzeichenmodifikation erforderlich).

Die vier Rückkopplungsvarianten lassen sich einheitlich behandeln. Dafür werden zur Verallgemeinerung die Matrizen des Hauptzweiters in der jeweiligen, zur Matrizenaddition geeigneten Darstellung mit  $[\underline{\mathbf{Q}}^{(1)}]$  bezeichnet. Für das Hauptzweitor soll die Rückwirkung vernachlässigt werden ( $Q_{12}^{(1)} = 0$ ). Die Matrix des Rückkopplungszweiters in der jeweiligen, zur Matrizenaddition geeigneten Darstellung wird mit dem Index (2) versehen  $[\underline{\mathbf{Q}}^{(2)}]$ .

Wird für die Rückkopplung ein Dreipol mit umgepoltem Ein- oder Ausgangstor verwendet, ist die Vorzeichenmodifikation in  $[\underline{\mathbf{Q}}^{(2)}]$  entsprechend Beispiel

(Vorzeichen-Modifikation aufgrund Umpolung eines Tores) zu berücksichtigen.

Bei der Verwendung idealer gesteuerter Quellen in den Hauptzweiten ergeben sich wie in Abb. (6.5,6.6,6.7,6.8) auf der rechten Seite gezeigt, für  $\underline{Q}_{11}^{(1)}$  und  $\underline{Q}_{22}^{(1)}$  infinite Werte. Dies kann umgangen werden, indem das Hauptzweitor durch die inverse Matrix  $[\underline{\mathbf{P}}^{(1)}]$  dargestellt wird.

$$[\underline{\mathbf{Q}}^{(1)}] = [\underline{\mathbf{P}}^{(1)}]^{-1} = \frac{1}{\text{Det}([\underline{\mathbf{P}}^{(1)}])} \begin{pmatrix} \underline{P}_{22}^{(1)} & -\underline{P}_{12}^{(1)} \\ \underline{P}_{21}^{(1)} & \underline{P}_{11}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Für vernachlässigbare Rückwirkung ( $\underline{Q}_{12}^{(1)} = 0$ ) ergibt sich  $\underline{P}_{12}^{(1)} = 0$  und damit der Zusammenhang

$$[\underline{\mathbf{Q}}^{(1)}] = [\underline{\mathbf{P}}^{(1)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\underline{P}_{11}^{(1)} & 0 \\ \frac{-\underline{P}_{21}^{(1)}}{\underline{P}_{11}^{(1)}\underline{P}_{22}^{(1)}} & 1/\underline{P}_{22}^{(1)} \end{pmatrix}_{\underline{P}_{12}^{(1)}=0}. \quad (6.6)$$

Für die idealen Ein- und Ausgangsimpedanzen/-admittanzen  $\underline{Q}_{11}^{(1)}$ ,  $\underline{Q}_{22}^{(1)}$  ergeben sich in der  $[\underline{\mathbf{P}}^{(1)}]$  Darstellung die Einträge „Null“. Die inversen Matrizen für die verschiedenen Kopplungsarten sind dabei entsprechend der jeweiligen Art der Rückkopplung zu wählen. Mit den in Tab. 5.1 und Tab. 5.2 ermittelten Kleinsignalparametern der Verstärkungsschaltungen ergibt sich:

$$SSK : [\underline{\mathbf{P}}^{(1)}] = [\underline{\mathbf{Y}}^{(1)}] = \begin{pmatrix} \underline{G}_{ein}^{(1)} & 0 \\ \underline{g}_m^{(1)} & \underline{G}_{aus}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

$$PPK : [\underline{\mathbf{P}}^{(1)}] = [\underline{\mathbf{Z}}^{(1)}] = \begin{pmatrix} \underline{R}_{ein}^{(1)} & 0 \\ \underline{r}_m^{(1)} & \underline{R}_{aus}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

$$SPK : [\underline{\mathbf{P}}^{(1)}] = [\underline{\mathbf{G}}^{(1)}] = \begin{pmatrix} \underline{G}_{ein}^{(1)} & 0 \\ \underline{V}_U^{(1)} & \underline{R}_{aus}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

$$PSK : [\underline{\mathbf{P}}^{(1)}] = [\underline{\mathbf{H}}^{(1)}] = \begin{pmatrix} \underline{R}_{ein}^{(1)} & 0 \\ \underline{V}_I^{(1)} & \underline{G}_{aus}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

In allen Fällen stellen die Elemente der Hauptdiagonalen die Ein- bzw. Ausgangsimpedanzen/-admittanzen des Hauptzweitores dar. Je kleiner die

Beträge der Elemente der Hauptdiagonalen sind, umso mehr nähert sich das Hauptzweitor einer idealen gesteuerten Quelle.

Ist die Hauptdiagonale von  $[\underline{\mathbf{P}}^{(1)}]$  hinreichend klein (ideale gesteuerte Quellen) sind alle Elemente bis auf  $\underline{Q}_{12}^{(2)}$  des Rückkopplungszweitors vernachlässigbar. Es gilt dann für die Gesamtschaltung des rückgekoppelten Systems mit vernachlässigbarer Rückwirkung:

$$[\underline{\mathbf{Q}}] = [\underline{\mathbf{Q}}^{(1)}] + [\underline{\mathbf{Q}}^{(2)}] = [\underline{\mathbf{P}}^{(1)}]^{-1} + [\underline{\mathbf{Q}}^{(2)}] = \begin{pmatrix} 1/\underline{P}_{11}^{(1)} & \underline{Q}_{12}^{(2)} \\ -\underline{P}_{21}^{(1)}/\underline{P}_{11}^{(1)}\underline{P}_{22}^{(1)} & 1/\underline{P}_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \quad \underline{P}_{12}^{(1)}=0 \quad (6.11)$$

Nachdem in Gl. (6.11) nun die Addition der Matritzen in der für die jeweilige Kopplungsart erforderlichen Form erfolgt ist, wird die Matrix der Gesamtschaltung  $[\underline{\mathbf{Q}}]$  in die inverse Darstellung gebracht. Damit bleibt  $[\underline{\mathbf{Q}}]^{-1}$  auch für ideale Quellen, bei  $|\underline{P}_{11}^{(1)}| \rightarrow 0$ ,  $|\underline{P}_{22}^{(1)}| \rightarrow 0$  regulär:

$$[\underline{\mathbf{P}}] = [\underline{\mathbf{Q}}]^{-1} = \frac{1}{\text{Det}([\underline{\mathbf{Q}}])} \begin{pmatrix} \underline{Q}_{22} & -\underline{Q}_{12} \\ -\underline{Q}_{21} & \underline{Q}_{11} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

$$[\underline{\mathbf{P}}] = [\underline{\mathbf{Q}}]^{-1} = \frac{\underline{P}_{11}^{(1)}\underline{P}_{22}^{(1)}}{1 + \underline{P}_{21}^{(1)}\underline{Q}_{12}^{(2)}} \begin{pmatrix} 1/\underline{P}_{22}^{(1)} & -\underline{Q}_{12}^{(2)} \\ \underline{P}_{21}^{(1)}/\underline{P}_{11}^{(1)}\underline{P}_{22}^{(1)} & 1/\underline{P}_{11}^{(1)} \end{pmatrix} \quad \underline{P}_{12}^{(1)}=0 \quad (6.13)$$

$$[\underline{\mathbf{P}}] = [\underline{\mathbf{Q}}]^{-1} = \frac{1}{1 + \underline{P}_{21}^{(1)}\underline{Q}_{12}^{(2)}} \begin{pmatrix} \underline{P}_{11}^{(1)} & -\underline{Q}_{12}^{(2)}\underline{P}_{11}^{(1)}\underline{P}_{22}^{(1)} \\ \underline{P}_{21}^{(1)} & \underline{P}_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \quad \underline{P}_{12}^{(1)}=0 \quad (6.14)$$

Für ideale gesteuerte Quellen vereinfacht sich Gl. (6.14) zu

$$[\underline{\mathbf{P}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\underline{P}_{21}^{(1)}}{1 + \underline{P}_{21}^{(1)}\underline{Q}_{12}^{(2)}} & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{P}_{11}^{(1)}=0, \underline{P}_{22}^{(1)}=0, \underline{P}_{12}^{(1)}=0 \quad (6.15)$$

Für die darin enthaltenen Nennerterme wollen wir zwei allgemein gebräuchliche Bezeichnungen definieren, die wir im weiteren Verlauf immer wieder benötigen. Es sind

$$\underline{P}_{21}^{(1)}\underline{Q}_{12}^{(2)} =: \text{Schleifenverstärkung}, \quad (6.16)$$

$$1 + \underline{P}_{21}^{(1)}\underline{Q}_{12}^{(2)} =: \text{Rückführungsdifferenz}. \quad (6.17)$$

Entsprechend den einführenden Überlegungen anhand des Signalflussdiagramms nimmt  $\underline{P}_{21}$  in Gl. (6.15) genau die in Gl. (6.2) hergeleitete Form an  $\underline{P}_{21}^{(1)} := \underline{F}_a$ ,  $\underline{Q}_{12}^{(2)} := \underline{F}_2$ .

Es gilt für  $\underline{P}_{21}$  ebenfalls die Überlegung für hohe Verstärkung des Hauptzweiters ( $|\underline{P}_{21}^{(1)} \underline{P}_{12}^{(2)}| \gg 1$ ), bei der die Übertragungsfunktion der Gesamtschaltung unabhängig von der Übertragungsfunktion des Hauptzweiters wird:

$$\underline{P}_{21} = \frac{1}{\underline{Q}_{12}^{(2)}} \bigg|_{|\underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{21}^{(2)}| \gg 1}. \quad (6.18)$$

Je nach Kopplungsart ist  $\underline{P}_{11}$  die Eingangsimpedanz oder -admittanz. Gleiches gilt für  $\underline{P}_{22}$  am Ausgang. Aus Gl. (6.14) lassen sich die Beziehungen

$$\underline{P}_{11} = \frac{\underline{P}_{11}^{(1)}}{1 + \underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{12}^{(2)}} \quad (6.19)$$

und

$$\underline{P}_{22} = \frac{\underline{P}_{22}^{(1)}}{1 + \underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{12}^{(2)}} \quad (6.20)$$

entnehmen. Der Nenner enthält jeweils die Schleifenverstärkung und ist identisch mit der Rückwirkungsdivergenz. D.h. durch die Rückkopplung kann die Ein-/Ausgangs-Impedanz/Admittanz des Hauptzweiters gezielt verändert werden. Nicht verändern lassen sich (invariant)

$$\frac{\underline{P}_{21}}{\underline{P}_{11}} = \frac{\underline{P}_{21}^{(1)}}{\underline{P}_{11}^{(1)}} \quad \text{und} \quad \frac{\underline{P}_{21}}{\underline{P}_{22}} = \frac{\underline{P}_{21}^{(1)}}{\underline{P}_{22}^{(1)}}. \quad (6.21)$$

Die optimale Wirkung besitzt die Rückkopplung dann, wenn die Generator- und Abschlußimpedanzen/-admittanzen  $\underline{Z}_{G/L}, \underline{Y}_{G/L}$  entgegengesetzt den Ein- bzw. Ausgangsimpedanzen/-admittanzen  $\underline{Z}_{11/22}^{(1)}, \underline{Y}_{11/22}^{(1)}$  an dem jeweiligen Hauptzweiter (Verstärker) gewählt werden. Dies läßt sich einfach auch anhand der Beispielschaltungen Abb. (6.5, 6.6, 6.7, 6.8) erkennen:

Würde z. B. im Fall der PPK die Ansteuerung mit einer Spannungsquelle anstelle einer Stromquelle erfolgen, wäre die Rückkopplung wirkungslos. In diesem Fall würde der rückgekoppelte Strom vollständig über die Spannungsquelle anstatt durch eine endliche Eingangsimpedanz des Hauptzweiters

fließen. Um dies zu vermeiden, muß also gelten:  $|\frac{1}{\underline{Y}_{11}}| \ll |\underline{Z}_G|$ . Mit dieser Überlegung lassen sich als Bedingung für optimale Ansteuerung formulieren:

SSK:  $(\underline{Z}_G, \underline{Z}_L)$  klein gegen Torimpedanz

PPK:  $(\underline{Y}_G, \underline{Y}_L)$  klein gegen Toradmittanz

PSK:  $(\underline{Z}_G, \underline{Y}_L)$  klein gegen jeweilige Torimpedanz/-admittanz

SPK:  $(\underline{Y}_G, \underline{Z}_L)$  klein gegen jeweilige Torimpedanz/-admittanz

Dies bedeutet, daß im Idealfall die Ansteuerung bei SSK und SPK mit einer (idealen) Spannungsquelle, bei PPK und PSK mit einer (idealen) Stromquelle erfolgen sollte.

Die Betriebsparameter für die vier Arten der Rückkopplung bei idealer Ansteuerung und Abschluss ergeben sich durch Berechnung mit Gl. (6.15):

SSK:

$$\underline{Z}_{ein} \approx \frac{1}{\underline{Y}_{11}} = \frac{1 + \underline{Z}_{12}^{(2)} \underline{g}_m^{(1)}}{\underline{Y}_{ein}^{(1)}}, \quad (6.22)$$

$$\underline{Z}_{aus} \approx \frac{1}{\underline{Y}_{22}} = \frac{1 + \underline{Z}_{12}^{(2)} \underline{g}_m^{(1)}}{\underline{Y}_{aus}^{(1)}}, \quad (6.23)$$

$$\underline{V}_I \approx \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} = \frac{\underline{g}_m^{(1)}}{\underline{Y}_{ein}^{(1)}} \quad (\text{invariant}), \quad (6.24)$$

$$\underline{V}_U \approx -\frac{\underline{g}_m^{(1)} \underline{Z}_L}{1 + \underline{Z}_{12}^{(2)} \underline{g}_m^{(1)}} \quad (\text{stabilisierbar}), \quad (6.25)$$

$$\underline{g}_m \approx \underline{Y}_{21} = -\frac{\underline{g}_m^{(1)}}{1 + \underline{Z}_{12}^{(2)} \underline{g}_m^{(1)}} \quad (\text{stabilisierbar}). \quad (6.26)$$

PPK:

$$\underline{Z}_{ein} \approx \underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Z}_{ein}^{(1)}}{1 + \underline{Y}_{12}^{(2)} \underline{r}_e^{(1)}} , \quad (6.27)$$

$$\underline{Z}_{aus} \approx \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{Z}_{aus}^{(1)}}{1 + \underline{Y}_{12}^{(2)} \underline{r}_e^{(1)}} , \quad (6.28)$$

$$\underline{V}_I \approx -\underline{Z}_{21} \underline{Y}_L = -\frac{\underline{r}_e^{(1)} \underline{Y}_L}{1 + \underline{Y}_{12}^{(2)} \underline{r}_e^{(1)}} \quad (\text{stabilisierbar}) , \quad (6.29)$$

$$\underline{V}_U \approx \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} = \frac{\underline{r}_e^{(1)}}{\underline{Z}_{ein}^{(1)}} \quad (\text{invariant}) , \quad (6.30)$$

$$\underline{r}_e \approx \underline{Z}_{21} = \frac{\underline{r}_e^{(1)}}{1 + \underline{Y}_{12}^{(2)} \underline{r}_e^{(1)}} \quad (\text{stabilisierbar}) . \quad (6.31)$$

-SPK:

$$\underline{Z}_{ein} \approx \frac{1}{\underline{G}_{11}} = \frac{1 - \underline{H}_{12}^{(2)} \underline{V}_U^{(1)}}{\underline{Y}_{ein}^{(1)}} , \quad (6.32)$$

$$\underline{Z}_{aus} \approx \underline{G}_{22} = \frac{\underline{Z}_{aus}^{(1)}}{1 - \underline{H}_{12}^{(2)} \underline{V}_U^{(1)}} , \quad (6.33)$$

$$\underline{r}_e \approx \frac{\underline{G}_{21}}{\underline{G}_{11}} = \frac{\underline{V}_U^{(1)}}{\underline{Y}_{ein}^{(1)}} \quad (\text{invariant}) , \quad (6.34)$$

$$\underline{V}_I \approx -\frac{\underline{G}_{21}}{\underline{G}_{11}} \underline{Y}_L = -\frac{\underline{V}_U^{(1)}}{\underline{Y}_{ein}^{(1)}} \underline{Y}_L \quad (\text{invariant}) , \quad (6.35)$$

$$\underline{V}_U \approx \underline{G}_{21} = \frac{\underline{V}_U^{(1)}}{1 - \underline{H}_{12}^{(2)} \underline{V}_U^{(1)}} \quad (\text{stabilisierbar}) . \quad (6.36)$$

-PSK:

$$\underline{Z}_{ein} \approx \underline{H}_{11} = \frac{\underline{Z}_{ein}^{(1)}}{1 - \underline{G}_{12}^{(2)} \underline{V}_I^{(1)}} , \quad (6.37)$$

$$\underline{Z}_{aus} \approx \frac{1}{\underline{H}_{22}} = \frac{1 - \underline{G}_{12}^{(2)} \underline{V}_I^{(1)}}{\underline{Y}_{aus}^{(1)}} , \quad (6.38)$$

$$\underline{V}_I \approx \underline{H}_{21} = -\frac{\underline{V}_I^{(1)}}{1 - \underline{G}_{12}^{(2)} \underline{V}_I^{(1)}} \quad (\text{stabilisierbar}) , \quad (6.39)$$

$$\underline{g}_m \approx \frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} = \frac{\underline{V}_I^{(1)}}{\underline{Z}_{ein}^{(1)}} \quad (\text{invariant}) , \quad (6.40)$$

$$\underline{V}_U \approx -\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} \underline{Z}_L = -\frac{\underline{V}_I^{(1)}}{\underline{Z}_{ein}^{(1)}} \underline{Z}_L \quad (\text{invariant}) . \quad (6.41)$$

Die in den Formeln verwendeten Parameter des Hauptzweiters können z.B. für den quasistatischen Betrieb aus Tab. (5.1) entnommen werden.

Um angeben zu können, wie stark das Hauptzweitor mit seiner Übertragungsfunktion  $\underline{P}_{21}^{(1)}$  in die Übertragungsfunktion  $\underline{P}_{21}$  der Gesamtschaltung eingeht, bestimmt man den relativen Fehler oder die relative Abweichung von  $\underline{P}_{21}$  in Abhängigkeit des relativen Fehlers von  $\underline{P}_{21}^{(1)}$ :

Mit der Übertragungsfunktion der Gesamtschaltung

$$\underline{P}_{21} = \frac{\underline{P}_{21}^{(1)}}{1 + \underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{12}^{(2)}} \quad (6.42)$$

läßt sich die Abweichung in Differentialform angeben

$$d\underline{P}_{21} = \frac{\partial \underline{P}_{21}}{\partial \underline{P}_{21}^{(1)}} d\underline{P}_{21}^{(1)} = \frac{1 + \underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{12}^{(2)} - \underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{12}^{(2)}}{(1 + \underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{12}^{(2)})^2} d\underline{P}_{21}^{(1)} = \frac{1}{(1 + \underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{12}^{(2)})^2} d\underline{P}_{21}^{(1)} \quad (6.43)$$

Ein Klammerterm des Nenners wird durch den Nenner in Gl. (6.42) identisch ersetzt und es ergibt sich aus Gl. (6.43) durch Umstellen der relative Fehler:

$$\frac{d\underline{P}_{21}}{\underline{P}_{21}} = \frac{1}{1 + \underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{12}^{(2)}} \frac{d\underline{P}_{21}^{(1)}}{\underline{P}_{21}^{(1)}} \quad (6.44)$$



Aus der Betragsdarstellung:

$$\left| \frac{d\underline{P}_{21}}{\underline{P}_{21}} \right| = \underbrace{\left| \frac{1}{1 + \underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{12}^{(2)}} \right|}_{\text{Empfindlichkeit}} \left| \frac{d\underline{P}_{21}^{(1)}}{\underline{P}_{21}^{(1)}} \right| \quad (6.45)$$

ergibt sich die Bestimmungsgleichung der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion der Gesamtschaltung gegenüber  $\underline{P}_{21}^{(1)}$ :

$$S_{\underline{P}_{21}^{(1)}}^{\underline{P}_{21}} = \left| \frac{\underline{P}_{21}^{(1)}}{\underline{P}_{21}} \frac{d\underline{P}_{21}}{d\underline{P}_{21}^{(1)}} \right| = \left| \frac{1}{1 + \underline{P}_{21}^{(1)} \underline{Q}_{12}^{(2)}} \right| \quad (6.46)$$

Der Ausdruck  $S_{\underline{P}_{21}^{(1)}}^{\underline{P}_{21}}$  ist die Proportionalitätskonstante in Gl. (6.45) und gibt an, wie stark Änderungen der durch  $\underline{P}_{21}^{(1)}$  beschriebenen Eigenschaften des Verstärkerzweiters (Hauptzweiter) in die Übertragungsfunktion  $\underline{P}_{21}$ , der Gesamtschaltung eingehen. Durch Vergleich mit Gl. (6.17) ergibt sich die Empfindlichkeit als Kehrwert des Betrags der Rückführungsdifferenz.

Für Schleifenverstärkungen groß gegen Eins ist die Empfindlichkeit proportional dem Kehrwert des Betrags der Schleifenverstärkung (vgl. Gl. (6.16)). Ist die Empfindlichkeit = 1, geht das Hauptzweiter zu 100% in die Übertragungsfunktion ein ( $\underline{P}_{21} = \underline{P}_{21}^{(1)}$ ) (vgl. Gl. (6.42)). Geht  $S_{\underline{P}_{21}^{(1)}}^{\underline{P}_{21}} \rightarrow 0$  besitzt das Hauptzweiter keinen Einfluß mehr und es gilt  $\underline{P}_{21} = \frac{1}{\underline{Q}_{12}^{(1)}}$ .

### 6.3 Gegengekoppelte Netzwerke mit Störung

Betrachtet wird das schon zuvor behandelte rückgekoppelte Netzwerk in Abb. (6.9) in dem zusätzlich am Ausgang des Hauptweiters eine Störung  $\underline{Z}(j\omega)$  eingespeist wird.

Das Ausgangssignal dieses Systems ergibt sich mit

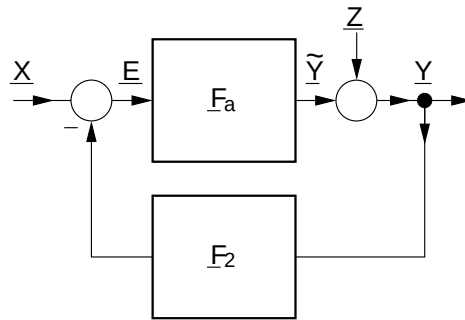


Abb. 6.9: Rückgekoppeltes Netzwerk mit Störung  $\underline{Z}$ .

$$\underline{Y} = (\underline{X} - \underline{F}_2 \underline{Y}) \underline{F}_a + \underline{Z} \quad (6.47)$$

zu

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{\underline{F}_a}{1 + \underline{F}_2 \underline{F}_a} \underline{X} + \frac{\underline{Z}}{1 + \underline{F}_2 \underline{F}_a} \\ \underline{Y}(j\omega) &= \frac{\underline{F}_a(j\omega) \underline{X}(j\omega)}{1 + \underline{F}_2(j\omega) \underline{F}_a(j\omega)} + \frac{\underline{Z}(j\omega)}{1 + \underline{F}_2(j\omega) \underline{F}_a(j\omega)}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Für  $1 + \underline{F}_2 \underline{F}_a \approx \underline{F}_2 \underline{F}_a$  wird also eine am Ausgang des Hauptweiters auftretende Störung um die Schleifenverstärkung  $\underline{F}_2 \underline{F}_a = \underline{p}_{21}^{(1)} \cdot \underline{q}_{12}^{(2)}$  verringert. Entsprechend der Herleitung über Phasoren im Frequenzbereich gilt diese Aussage zunächst nur für lineare Systeme bei Betrachtung einer einzigen, aber beliebigen Kreisfrequenz  $\omega$ .

Im folgenden soll diese Aussage auf nichtlineare und mehrfrequente Systeme erweitert werden. Zur Vereinfachung soll das Eingangssignal  $\underline{X}(j\omega)$  weiterhin monofrequent bleiben. Das Ergebnis lässt sich jedoch leicht auch für mehrfrequente Anregungen erweitern.

Für die folgenden Betrachtungen soll das Rückkopplungszweitor weiterhin linear sein. Das Hauptzweitor sei nichtlinear. Das Ausgangssignal  $\tilde{Y}$  läßt sich im Zeitbereich für ein Hauptzweitor mit stetig gekrümmter Übertragungskennlinie als Taylor Polynom darstellen. Bei einer Entwicklung um einen (Arbeits-) Punkt der durch die Eingangsgröße  $E_0$  eingestellt wird gilt:

$$\tilde{y}(e) = \tilde{y}(E_0 + e(t)) = \sum_{n=0}^N a_n e^n(t) + R_n(e). \quad (6.49)$$

Darin sind die Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n \tilde{y}(e)}{d e^n} \right) \bigg|_{e=E_0} \quad (6.50)$$

und das Restglied nach Lagrange

$$R_n(e) = \frac{e^{N+1}(t)}{(N+1)!} \left( \frac{d^{N+1} \tilde{y}(e)}{d e^{N+1}} \right) \bigg|_{e=\eta \in [E_0+e(t)]}. \quad (6.51)$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass  $\tilde{y}(e)$  für geeignet große  $N$  bei vernachlässigbar kleinem Restglied ( $R_n(e) = 0$ ) durch eine endliche Reihe dargestellt werden kann

$$\tilde{y}(e) = \sum_{n=0}^N a_n e^n(t) = a_0 + a_1 e(t) + a_2 e^2(t) + a_3 e^3(t) + \dots + a_N e^N(t). \quad (6.52)$$

Darin ist  $a_0$  der Arbeitspunkt der Ausgangsgröße, der sich im Punkt  $E_0$  der Eingangsgröße ergibt.

Formal läßt sich diese Nichtlinearität allgemein durch n-fache Faltung der Eingangsspektren  $\underline{E}(j\omega) \bullet \circ e(t)$  im Frequenzbereich lösen. Der Rahmen dieser Vorlesung beschränkt sich jedoch auf die Behandlung einfacher Fälle im Zeitbereich. Dafür soll der allgemeine Fall eines Zweiton-Signales

$$e(t) = u \cos(\omega_u t) + v \cos(\omega_v t) \quad (6.53)$$

untersucht werden, das auf eine nichtlineare Kennlinie dritter Ordnung trifft:

$$\tilde{y}(e) = a_0 + a_1 e(t) + a_2 e^2(t) + a_3 e^3(t). \quad (6.54)$$

Einsetzen von (6.53)  $\rightarrow$  (6.54) liefert

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) = & a_0 + a_1 (u \cos(\omega_u t) + v \cos(\omega_v t)) \\ & + a_2 (u \cos(\omega_u t) + v \cos(\omega_v t))^2 \\ & + a_3 (u \cos(\omega_u t) + v \cos(\omega_v t))^3\end{aligned}\quad (6.55)$$

Nach etwas Rechnung und Umstellen mit Additionstheoremen ergibt sich für Gl. (6.55) die Identität

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) = & a_0 + \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) a_2 & + & \left| \begin{array}{l} \text{Gleichspannung} \\ \text{(Arbeitspunkt)} \end{array} \right. \\ & (ua_1 + (\frac{3}{4}u^3 + \frac{3}{2}uv^2)a_3) \cos(\omega_u t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } \omega \end{array} \right. \\ & (va_1 + (\frac{3}{4}v^3 + \frac{3}{2}vu^2)a_3) \cos(\omega_v t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } 2\omega \end{array} \right. \\ & \frac{1}{2}a_2u^2 \cos(2\omega_u t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } 2\omega \end{array} \right. \\ & \frac{1}{2}a_2v^2 \cos(2\omega_v t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } 2\omega \end{array} \right. \\ & a_2uv \cos((\omega_u - \omega_v)t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } \sum \omega, \Delta\omega \end{array} \right. \\ & a_2uv \cos((\omega_u + \omega_v)t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } \sum \omega, \Delta\omega \end{array} \right. \\ & \frac{3}{4}a_3v^2u \cos((2\omega_v - \omega_u)t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } \sum \omega, \Delta\omega \end{array} \right. \\ & \frac{3}{4}a_3v^2u \cos((2\omega_v + \omega_u)t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } \sum \omega, \Delta\omega \end{array} \right. \\ & \frac{3}{4}a_3vu^2 \cos((2\omega_u - \omega_v)t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } \sum \omega, \Delta\omega \end{array} \right. \\ & \frac{3}{4}a_3vu^2 \cos((2\omega_u + \omega_v)t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } \sum \omega, \Delta\omega \end{array} \right. \\ & \frac{1}{4}a_3u^3 \cos(3\omega_u t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } 3\omega \end{array} \right. \\ & \frac{1}{4}a_3v^3 \cos(3\omega_v t) & + & \left| \begin{array}{l} \text{Terme mit } 3\omega \end{array} \right.\end{aligned}\quad (6.56)$$

Es ergeben sich in diesem einfachen Beispiel 12 Frequenzterme und ein Gleichspannungsanteil.

### Interpretation der Ergebnisse:

1. Arbeitspunkt: Der quadratische Term der Kennlinie  $a_2$  liefert einen Gleichanteil, der zu einer Veränderung des Arbeitspunktes führt.

Würde die Kennlinie nach höheren Ordnungen entwickelt, zeigte sich, daß alle geradzahligen Koeffizienten  $a_{2n}$  Gleichanteile liefern. Die Ursache liegt in dem Gleichrichteffekt einer ungeraden Kennlinie:

Für gerade Kennlinien nach Abb. (6.10) gilt mit  $\tilde{y}(E_0) = \tilde{y}_0$  aufgrund der Punktsymmetrie:

$$\tilde{y}(E_0 + \Delta e) - \tilde{y}_0 = -(\tilde{y}(E_0 - \Delta e) - \tilde{y}_0). \quad (6.57)$$

Damit ist bei einem Eingangssignal ohne Gleichanteil (z.B. sin, cos) das

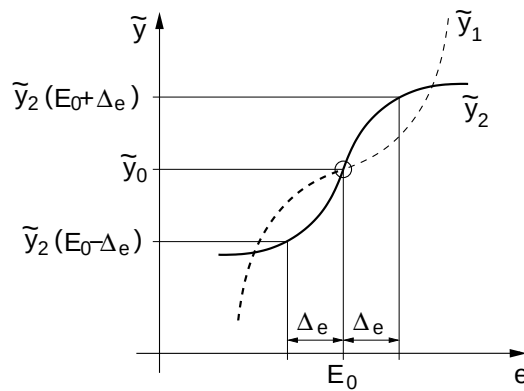


Abb. 6.10: Beispiele gerader Kennlinienverläufe.

Ausgangssignal (bezogen auf den Arbeitspunkt) ebenfalls ohne Gleichanteil.

Bei einer ungeraden Kennlinie wie z.B. in Abb. (6.11) geht die Gleichung in eine Ungleichung über und das Signal besitzt unterschiedliche Amplituden oberhalb bzw. unterhalb des Arbeitspunktes  $\tilde{y}_0$ . Damit ergibt der Gleichspannungsmittelwert

$$\bar{\tilde{y}} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \tilde{y}(t) dt \quad (6.58)$$

einen Wert ungleich Null.

Nach der Definition der Koeffizienten der Taylor-Reihe als Ableitungen n-ter Ordnung unterscheidet sich eine gerade Übertragungskennlinie von einer ungeraden dadurch, daß die gerade Kennlinie aufgrund der Punktsymmetrie im Arbeitspunkt einen Wendepunkt besitzt (zweite

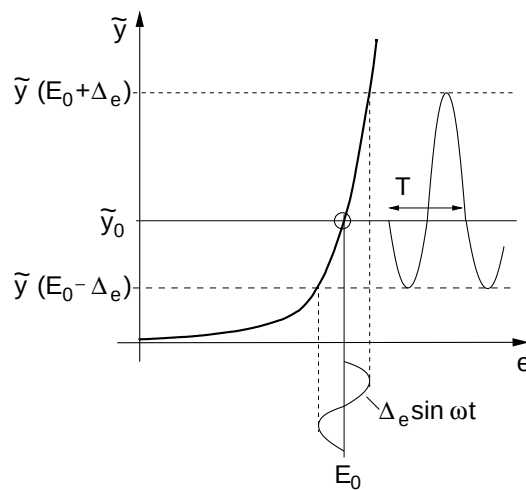


Abb. 6.11: Beispiel einer ungeraden Kennlinie.

Ableitung hat den Wert Null).

2. Grundwelle  $\omega$ : Die lineare Übertragung der Grundwelle erfolgt mit dem Koeffizienten  $a_1$ , der identisch mit der Kleinsignalverstärkung ist. Zusätzlich trägt auch der kubische Term  $a_3$  der Kennlinie zur Amplitude der Grundwelle bei. Bei Entwicklung der Reihe zu höheren Graden zeigt sich, daß nur die ungeraden Koeffizienten  $a_{2n+1}$  zur Grundwelle beitragen.

Neben der eigenen Amplitude ( $u$  bei  $\cos(\omega_u t)$ ,  $v$  bei  $\cos(\omega_v t)$ ) gibt es auch einen Term ( $\frac{3}{2}uv^2$  bzw.  $\frac{3}{2}vu^2$ ) bei dem die Amplitude ( $v$  bzw.  $u$ ) des jeweiligen anderen Eingangssignals zur eigenen Amplitude beiträgt. Dies ist in sofern bemerkenswert, da für beide Signale keine Annahmen über deren Frequenz gemacht wurden. Dennoch liefert das Signal mit der einen (beliebigen) Frequenz einen Beitrag zur Amplitude des Signals mit der anderen Frequenz.

Abb. (6.12) stellt den Zusammenhang der Ein- und Ausgangsschwingungen bei den Grundwellen  $\omega_u, \omega_v$  über die Verknüpfung mit den Koeffizienten der Taylor-Entwicklung in Form eines Signalfussdiagramms dar.

3. Zweite Harmonische (erste Oberwelle)  $2\omega$ : Durch den quadratischen Term  $a_2$  der Nichtlinearität entsteht am Ausgang eine neue Fre-

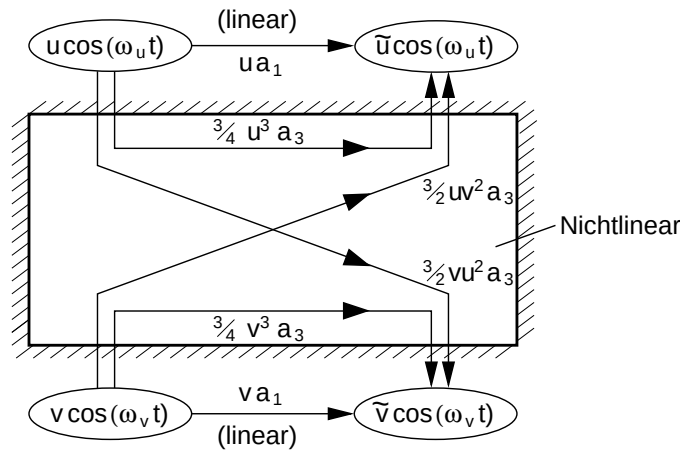


Abb. 6.12: Anschauliche Darstellung der Verknüpfung der Grundwellenanteile von Eingangs- (links) und Ausgangs-Signal (rechts) über die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung.

quenzkomponente  $2\omega_u$  bzw.  $2\omega_v$ . Die Amplitude hängt von der Eingangsamplitude des jeweiligen Eingangssignals ab. Es handelt sich hierbei also um eine, von der Eingangsamplitude des jeweiligen Signals gesteuerte Quelle mit der doppelten Frequenz.

4. Kombinationsschwingungen (Mischterme)  $\sum \omega, \Delta\omega$ : Wegen des quadratischen Termes  $a_2 e^2(t)$  der Taylor-Entwicklung treten Kombinationsschwingungen mit den Frequenzen  $\omega_u \pm \omega_v$  auf. Hervorzuheben ist dabei, daß für  $u = v$  doppelt so große Amplitude wie für die zweite Harmonische auftreten.

Ähnliches gilt für die Mischterme aufgrund des kubischen Anteils  $a_3 e^3$ . Hier treten Kombinationsschwingungen der Frequenzen  $2\omega_u \pm \omega_v$  bzw.  $2\omega_v \pm \omega_u$  auf, deren Amplitude dreimal so groß ist wie die Amplitude der dritten Harmonischen ( $3\omega$ ).

Diese Mischterme können speziell in nachrichtentechnischen Systemen von großer Schädlichkeit sein, da neben der hohen Amplitude besonders die Differenzfrequenzen z.B.  $2\omega_u - \omega_v$  in der gleichen Größe wie  $\omega_u$  und  $\omega_v$  sein können. Eine Unterdrückung durch Filter ist dann nicht mehr möglich, auch nicht, wenn die quadratischen oder kubischen Frequenzen ( $2\omega_{u,v}$  bzw.  $3\omega_{u,v}$ ) ausgefiltert werden.

Besteht zwischen den Frequenzen ein geradzahliger Zusammenhang:

$$m \cdot \omega_u = n \cdot \omega_v \quad \text{mit} \quad m, n = 1, 2, 3 \dots \infty \quad (6.59)$$

liefern die Mischterme Beiträge zu den Amplituden der Harmonischen ( $\omega, 2\omega, 3\omega \dots$ ). Hiervon wird im weiteren Verlauf Gebrauch gemacht. Auch bei den Mischtermen ist wie schon bei der Grundwelle zu sehen, daß die Amplituden beider Signale zur Amplitude des Mischsignals beitragen.

5. Dritte Harmonische (zweite Oberwelle)  $3\omega$ : Es gilt analog das Gesagte von 3) mit  $a_3 e^3(t)$  als Ursache der neuen Frequenzkomponente.

Für das zuvor behandelte System ohne Rückkopplung läßt sich ein noch relativ einfaches Schema nach Abb. (6.13) für die Erzeugung der Harmonischen bei der Übertragung durch das nichtlineare Hauptzweitor angeben. Dabei wird angenommen, daß die Erzeugung der Harmonischen idealerweise direkt am Eingang, also vor dem frequenzabhängigen Teil  $\underline{F}'_a(j\omega)$  der Übertragungsfunktion des Hauptzweitors stattfindet.  $\underline{F}'_a(j\omega)$  ist Frequenzgang des Hauptzweitors geteilt durch die statische Verstärkung im Arbeitspunkt

$$\underline{F}'_a(j\omega) = \frac{\underline{F}_a(jn\omega)}{a_1} \quad . \quad (6.60)$$

Die Amplituden der einzelnen Schwingungen ergeben sich aus Gl. (6.56) unter der Annahme nur eines Signals, d.h.  $u=0$  oder  $v=0$ .

Unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten  $a_n$  der nichtlinearen Kennlinie nach Gl. (6.52) nicht frequenzabhängig sind, repräsentiert  $\underline{F}'_a(j\omega)$  den frequenzabhängigen Teil der Übertragungsfunktion des Hauptzweitors. Dieses Modell ist dann richtig, wenn die Frequenzabhängigkeit des Zweitors nach der Erzeugung der Harmonischen stattfindet. Ist auch der Teil vor der Erzeugung frequenzabhängig, muß das Eingangssignal  $\underline{E}_1(j\omega)$  entsprechend modifiziert werden ( $\underline{E}_1(j\omega) \underline{F}''_a(j\omega)$ ).

Durch die Einführung einer Rückkopplung gelangen die Schwingungen der Frequenz  $n\omega$  vom Ausgang auch an den Eingang des Hauptzweitors. Durch dieses mehrfrequente Eingangssignal kommt es aufgrund der nichtlinearen Kennlinie zur Mischung und Generation von Harmonischen mit allen



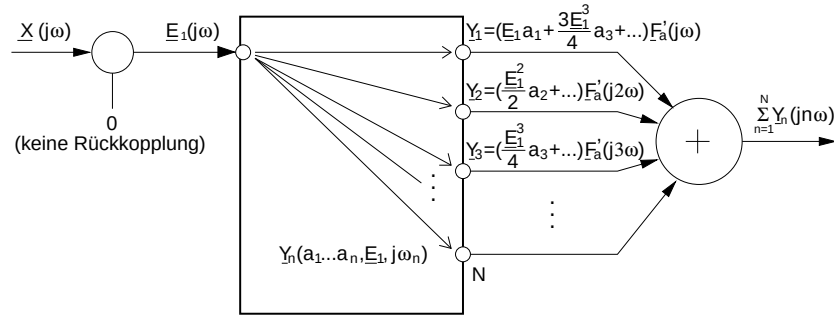


Abb. 6.13: Schema für die Erzeugung von Harmonischen bei der Übertragung durch ein nichtlineares Hauptzweitor. Der ebenfalls auftretende Gleichanteil  $E_1^2 a_2$ ,  $E_2^2 a_2$  wird im Schema nicht gezeigt.

Schwingungen untereinander.

Wie an dem zuvor gezeigten einfachen Beispiel demonstriert, leisten alle Schwingungen  $\underline{E}_n$  des Eingangssignals des Hauptzweitors

$$\underline{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{E}_n(n\omega, a_0 \dots a_N, \underline{E}_0 \dots \underline{E}_n, \underline{F}_a(j\omega), \underline{F}_2(j\omega)) \quad (6.61)$$

einen Beitrag zu jeder Harmonischen  $\underline{Y}_n$  des Ausgangssignals

$$\underline{Y} = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{Y}_n(n\omega, a_0 \dots a_N, \underline{E}_0 \dots \underline{E}_n, \underline{F}_a(j\omega)). \quad (6.62)$$

Das Schema für die Erzeugung von Harmonischen in einem rückgekoppelten System mit nichtlinearem Hauptzweitor läßt sich daher entsprechend Abb. (6.14) angeben. Die Terme  $a_0$ ,  $E_0$  werden in den Argumenten der Amplituden der Harmonischen in das Schema aufgenommen, um anzudeuten, daß durch die Nichtlinearität ein Gleichspannungsanteil entsteht, der den Arbeitspunkt verschiebt, und damit auch die Koeffizienten  $a_n$  ändern kann. Die Aufteilung auf  $N$  Rückkopplungszweitore  $\underline{F}_2$  ist nur symbolisch und nicht physikalisch zu verstehen. Sie deutet die getrennte Behandlung der einzelnen Harmonischen an, indem der Frequenzgang  $\underline{F}_2(j\omega)$  bei der Frequenz der jeweiligen Harmonischen ausgewertet wird.

Die Harmonischen entstehen für alle  $\underline{Y}_n$  außer für  $n = 1$  ausschließlich durch „Generation“ aufgrund der Nichtlinearität in dem Hauptzweitor. Auch ein Anteil an der Grundschwingung von  $\underline{Y}_1$  entsteht durch diese Generation.

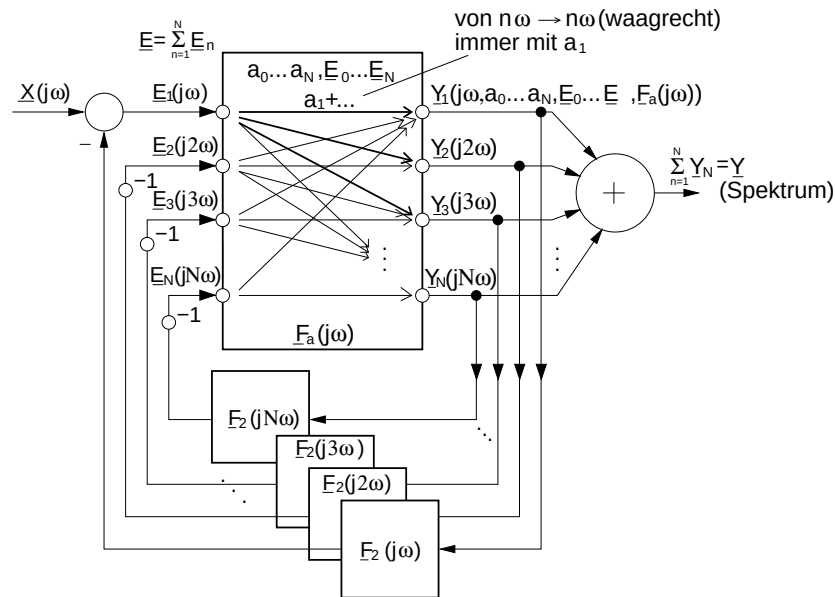


Abb. 6.14: Schema für die Erzeugung von Harmonischen in einem rückgekoppelten Netzwerk mit nichtlinearem Hauptzweigtor.

Es liegt daher nahe, die generierten Beiträge getrennt für jede Frequenz als am Ausgang eingekoppelte Störung  $Z_n$  zu berücksichtigen. Es ergibt sich das Modell des rückgekoppelten Netzwerkes für eine Frequenz  $n\omega$  ( $n = 1 \dots N$ ) in Abb. (6.15). Das Hauptzweigtor ist darin linear. Die Erzeugung und

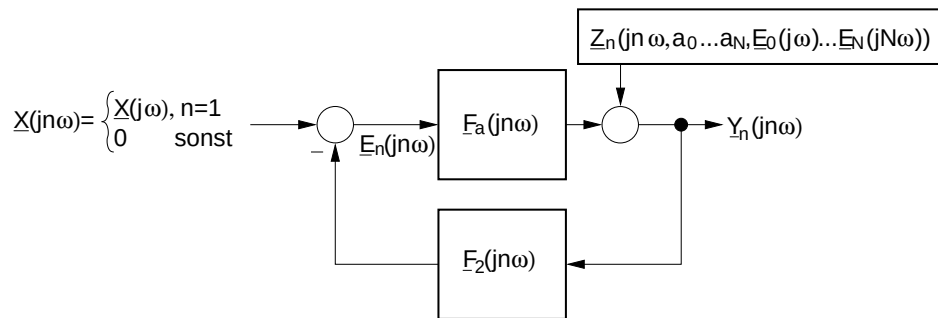


Abb. 6.15: Modell eines rückgekoppelten Netzwerkes mit nichtlinearem Hauptzweigtor bei einer Frequenz  $n\omega$ , ( $n = 1 \dots N$ ). Das Hauptzweigtor der Modells ist linear.

Verkopplung der Harmonischen untereinander geschieht in dem Modell über die Abhängigkeit der Störung  $Z_n$  von allen  $E_n(jn\omega)$  (vgl. Abb.(6.15) mit Abb. (6.14)).

Das rückgekoppelte System mit Störung wurde Eingangs bereit behandelt. Mit Gl. (6.48) kann die Lösung für das Spektrum des Ausgangssignals direkt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \sum_{n=1}^N \underline{Y}_n(jn\omega) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\underline{F}_a(jn\omega) \underline{X}(jn\omega)}{1 + \underline{F}_2(jn\omega) \underline{F}_a(jn\omega)} + \frac{\underline{Z}_n(jn\omega, a_0 \dots a_n, \underline{E}_0 \dots \underline{E}_n)}{1 + \underline{F}_2(jn\omega) \underline{F}_a(jn\omega)} \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\text{mit } \underline{X}(jn\omega) = \begin{cases} \underline{X}(j\omega), & n=1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die durch Nichtlinearität erzeugten Harmonischen, sowie die durch Harmonische verursachte geänderte Amplitude der Grundwelle, werden durch die Rückkopplung um den Betrag der Rückführungsdifferenz bzw. bei  $\underline{F}_2 \underline{F}_a \gg 1$  um den Betrag der Schleifenverstärkung reduziert.

Die Anwendung von Gl. (6.63) soll am Beispiel einer SSK gezeigt werden: Wir betrachten zunächst den Verstärker nach Abb. (6.16) ohne Gegenkopplung und kennzeichnen die in diesem Fall auftretenden Ströme und Spannungen mit einem hochgestellten Index <sup>(a)</sup>. Das erste Glied der Taylor-Reihe ist die Kleinsignalverstärkung

$$a_1 = \left. \frac{d\tilde{y}(e)}{de} \right|_{e=e_0} = g_m \quad . \quad (6.64)$$

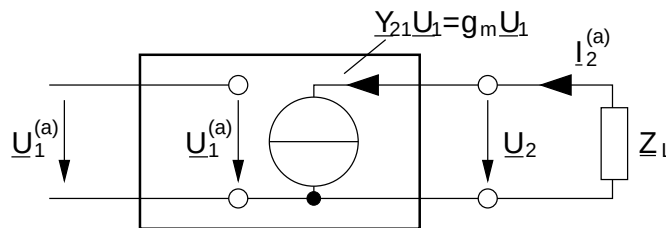


Abb. 6.16: Verstärker ohne Gegenkopplung.

Im linearen Fall gilt also für die Grundwelle (Index 1 rechts des Kommas)

$$\underline{I}_{2,1}^{(a)}(j\omega) = g_m(j\omega) \underline{U}_{1,1}^{(a)}(j\omega) \quad . \quad (6.65)$$

Bei größerer Eingangsspannung  $\underline{U}_1^{(a)}$ , die zur Übersteuerung führt, ergibt sich das Spektrum (Gleichanteil und Rückwirkung der Oberwellen auf die Grundwelle werden vernachlässigt, d.h. die Summe beginnt mit  $n=2$ )

$$\begin{aligned} \underline{I}_2^{(a)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underline{I}_{2,n}^{(a)}(jn\omega, \underline{U}_{1,1}^{(a)}(j\omega)) \\ &= g_m(j\omega) \underline{U}_{1,1}^{(a)}(j\omega) + \sum_{n=2}^{\infty} \underline{I}_{2,n}^{(a)}(jn\omega, \underline{U}_{1,1}^{(a)}(j\omega)) \end{aligned} \quad (6.66)$$

Die Beiträge zur Summe können wie in Gl. (6.56) berechnet werden. Aufgrund der mit höherer Ordnung und Frequenz stark abfallenden Amplituden, reicht für physikalische Systeme eine endliche obere Grenze von  $N$  für die Summe.

Für den Verstärker mit Gegenkopplung<sup>19</sup> wird zur Vergleichbarkeit ein Ausgangssignal mit der gleichen Amplitude der Grundwelle wie im nicht gegengekoppelten Fall gefordert. Das Verstärkerhauptzweitor soll bei diesem Vergleich unverändert bleiben. Vernachlässigt man die Rückwirkung der Oberwellen auf die Grundwelle, kann die notwendige Eingangsamplitude für den gegengekoppelten Fall anhand der Übertragungsgleichung (6.47) des rückgekoppelten Systems überlegt werden:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{F}_a}{1 + \underline{F}_a \underline{F}_2} \underline{X} \xrightarrow{SSK} \underline{I}_2 = \frac{g_m}{1 + g_m \underline{Z}_{12}} \underline{U}_1 \quad (6.67)$$

Darin ist  $\underline{F}_2 = \underline{q}_{12}^{(2)} = \underline{Z}_{12}$  die Übertragungsfunktion des Rückkopplungszweitors.

Da die Verstärkung des nicht gegengekoppelten Verstärkers  $g_m \underline{U}_1$  beträgt, muss die Eingangsspannung des gegengekoppelten Verstärkers um den Faktor  $(1 + g_m \underline{Z}_{12})$  größer gewählt werden, um die gleiche Amplitude des Ausgangssignals zu erhalten.<sup>20</sup> Im folgenden wird die Eingangsspannung  $\underline{U}_e^{(b)} = (1 + g_m \underline{Z}_{12}) \underline{U}_1^{(a)}$  angenommen, d.h. die Amplituden der Grundwelle

<sup>19</sup>Im folgenden mit <sup>(b)</sup> indiziert.

<sup>20</sup>In einigen Literaturstellen wird behauptet, die bessere Linearität gegengekoppelter Verstärker rühre von der um  $\left(\frac{1}{1 + \underline{F}_a \underline{F}_2}\right)$  geringeren Eingangsspannung her. Wir fordern hier jedoch gleiche Amplituden der Ausgangssignale, wodurch die Eingangsspannung im gegengekoppelten Fall entsprechend vergrößert wird. Die Eingangsspannung des Hauptzweitors ist bei dieser Forderung in beiden Fällen identisch.

des linearen Ausgangsstromes (Beiträge durch Koeffizient  $a_1$  der Taylor-Entwicklung) sind gleich.

Formal lässt sich das Ausgangsspektrum der SSK mit Hilfe von Gl. (6.63) direkt angeben:

$$\underline{I}_2^{(b)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{g_m}{1 + g_m \underline{Z}_{12}} \underline{U}_{en} + \frac{\underline{Z}_n(jn\omega)}{1 + g_m \underline{Z}_{12}} \right) \text{ mit } \underline{U}_{en} = \begin{cases} \underline{U}_e(j\omega) & n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.68)$$

Zu bestimmen bleiben die Störungsbeiträge  $\underline{Z}_n$ :

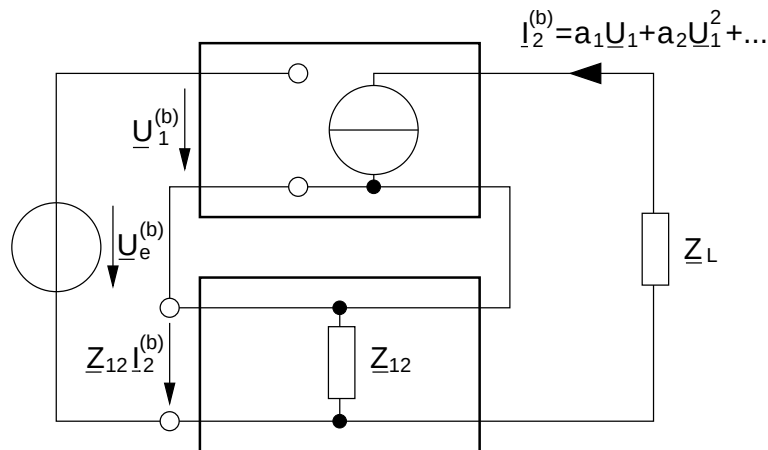


Abb. 6.17: SSK des Verstärkers aus Abb. 6.16.

Hierzu soll eine Näherung für schwache Nichtlinearität überlegt werden. Zur Überlegung dient das Schema für die Erzeugung von Harmonischen von Abb. (6.13), das sich aufgrund der nachfolgenden Überlegungen entsprechend Abb. (6.18) vereinfachen lässt. Durch seine im Vergleich zu den Oberwellen große Amplitude wird die eingespeiste Schwingung der Grundwelle  $\underline{U}_{1,1}$  den größten Beitrag zum Ausgangsstrom  $\underline{I}_{2,1}$  liefern. Rückwirkungen von Oberwellen auf  $\underline{I}_{2,1}$  sollen dazu im Vergleich vernachlässigbar sein. Die Grundwelle erzeugt aber ihrerseits Oberwellen die Beiträge für  $\underline{I}_{2,n}$  ( $n=2, 3 \dots N$ ) liefern. Diese Beiträge kommen über  $\underline{Z}_{12}(jn\omega)$  zurück auf den Eingang als  $\underline{U}_{1,n}$  ( $n=2 \dots N$ ). Die Amplitude dieser Schwingungen soll so klein sein, dass nur der direkte Pfad mit der größten Verstärkung zum Ausgang<sup>21</sup> ( $a_1 = g_m$ ) einen merklichen

<sup>21</sup>Hierbei ist zu beachten, daß  $g_m$  aufgrund einer Frequenzabhängigkeit durchaus unter-

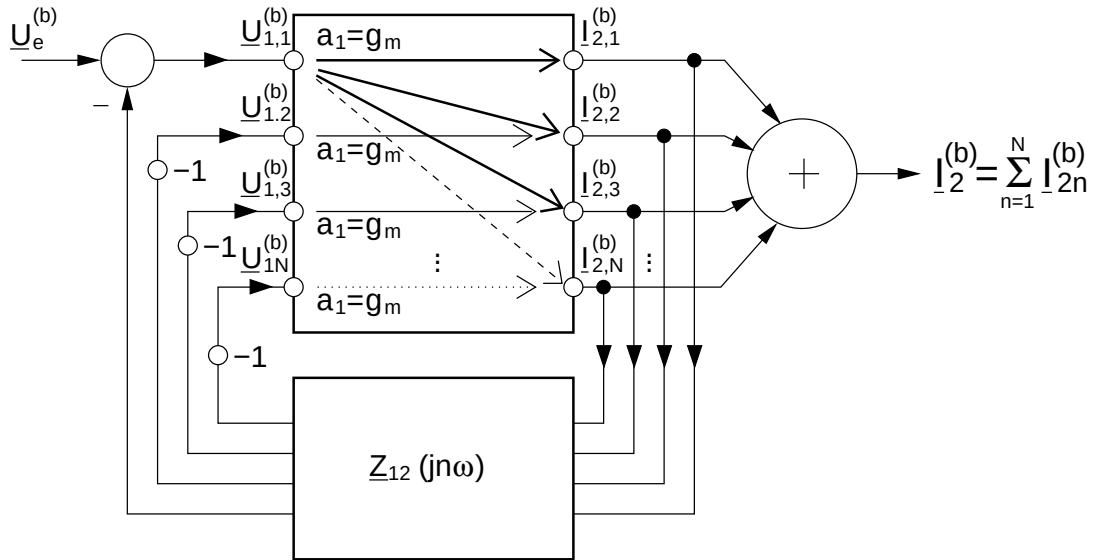


Abb. 6.18: Schema für die Erzeugung und Verknüpfung von Oberwellen in einem rückgekoppelten Verstärker bei schwacher Nichtlinearität.

Beitrag zu  $I_{2,n}$  liefert. Mischprodukte sollen also vernachlässigt werden. Der Gültigkeitsbereich dieser Annahme lässt sich leicht mit Gl. (6.56), Seite 88 für das dort gezeigte einfache Beispiel bestimmen. Das sich aufgrund dieser Näherung ergebende Spektrum des Ausgangsstroms lässt sich mathematisch formulieren als

$$I_2^{(b)} = I_2^{(a)} + \sum_{n=2}^N U_{1,n}^{(b)} g_m \quad . \quad (6.69)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass aufgrund der geforderten Gleichheit der Ausgangsamplitude bei der Grundfrequenz ( $I_{2,1}^{(b)} = I_{2,1}^{(a)}$ ) auch die Eingangsamplituden des Verstärkerzweiters gleich sein müssen (vgl. Abb. 6.16 - 6.17). Daher muß auch das von der Eingangsspannung  $U_{1,1}^{(b)}$  herrührende Spektrum gleich dem Spektrum  $I_2^{(a)}$  im Fall (a) sein. Hinzu kommt der  $\sum$ -Term, der die rückgekoppelten Beiträge berücksichtigt (vgl. Abb. 6.18).

Mit  $I_2^{(a)}$  aus Gl. (6.66) wird aus (6.69):

$$I_2^{(b)} = g_m U_{1,1}^{(a)} + \sum_{n=2}^N I_{2,n}^{(a)} + \sum_{n=2}^N U_{1,n}^{(b)} g_m \quad (6.70)$$

schiedlich sein kann für die verschiedenen Oberwellen.

Aufgrund der geforderten Gleichheit der Ausgangsstromamplituden bei der Grundwelle ist die Spannung der Grundwelle am Eingang des Hauptzweites in den Fällen (a) und (b) ebenfalls gleich ( $\underline{U}_{1,1}^{(a)} = \underline{U}_{1,1}^{(b)}$ ). Sie berechnet sich im gegengekoppelten Fall (b) aus der Eingangsspannung  $\underline{U}_e^{(b)}$  (vgl. Abb. 6.17) zu

$$\underline{U}_{1,1}^{(a)} = \underline{U}_{1,1}^{(b)} = \underline{U}_{e,1} - \underline{Z}_{12} \underline{I}_{2,1}^{(b)} \quad . \quad (6.71)$$

Einsetzen von (6.71)  $\rightarrow$  (6.70) und Einsetzen der Übertragungsfunktion des Rückkopplungszweites  $\underline{U}_{1,n}^{(b)} = -\underline{I}_{2,n}^{(b)} \underline{Z}_{12}(jn\omega)$  liefert:

$$\begin{aligned} \underline{I}_2^{(b)} &= g_m(\underline{U}_{e,1} - \underline{Z}_{12} \underline{I}_{2,1}^{(b)}) + \sum_{n=2}^N \underline{I}_{2,n}^{(a)} - \sum_{n=2}^N \underline{I}_{2,n}^{(b)} \underline{Z}_{12} g_m \\ \underline{I}_2^{(b)} &= g_m \underline{U}_{e,1} + \sum_{n=2}^N \underline{I}_{2,n}^{(a)} - \sum_{n=1}^N \underline{I}_{2,n}^{(b)} \underline{Z}_{12} g_m \\ &= \sum_{n=1}^N \underline{I}_{2,n}^{(b)}, \text{ (Spektrum)}. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Umstellen nach den Spektralkomponenten  $\underline{I}_{2,n}^{(b)}$  (jede Frequenz für sich) liefert

$$\begin{aligned} \underline{I}_2^{(b)} &= \sum_{n=1}^N \underline{I}_{2,n}^{(b)} = \frac{g_m}{1 + \underline{Z}_{12} g_m} \underline{U}_{e,1} + \frac{\sum_{n=2}^N \underline{I}_{2,n}^{(a)}}{1 + \underline{Z}_{12} g_m} \\ &= \sum_{n=1}^N \left( \frac{g_m}{1 + \underline{Z}_{12} g_m} \underline{U}_{e,n} + \frac{\underline{I}_{2,n}^{(a)}}{1 + \underline{Z}_{12} g_m} \right) \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$\text{mit } \underline{U}_{e,n} = \begin{cases} \underline{U}_e(j\omega) & , n = 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{I}_{2,n}^{(a)} = \begin{cases} 0 & , n = 1 \\ \underline{I}_{2,n}^{(a)}(jn\omega) & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Gleichung (6.73) entspricht der bereits formal in Gl. (6.68) S. 97 angegebenen Beziehung. Für die Beiträge der  $\underline{Z}_n$  ergibt sich in diesem Beispiel

$$\underline{Z}_n = \underline{I}_{2,n}^{(a)} \quad (6.74)$$

D.h.  $\underline{Z}_n$  nimmt den Wert der Oberwellen des nicht gegengekoppelten Verstärkers an.

## 6.4 Rückgekoppelte Vierpole

Bisher wurden durch Zweitore beschreibbare rückgekoppelte Schaltungen betrachtet. In der Regel enthielten die Zweitore Dreipol-Elemente, wodurch die Torbedingung der Zweitore für alle Möglichkeiten der Verschaltung zu einem Gesamtzweitor immer erfüllt ist. Nur bei Erfüllung der Torbedingung ist es möglich, ein Element mit vier Anschlüssen (Polen) durch nur zwei Ströme und zwei Spannungen vollständig zu beschreiben. In der Praxis können auch Schaltungen mit vier Polen vorkommen, die die Torbedingung nicht erfüllen (daher der Name Vierpol anstatt Zweitor). In diesem Fall kann entweder die Schaltung anders partitioniert werden oder mit Vierpolen gerechnet werden.

Im ersten Fall werden wenn möglich anstelle des Tores mit der nicht erfüllten Torbedingung andere Knoten der Schaltung, für die die Bedingung erfüllt ist, als Tor gewählt. Im Großen ist dies immer möglich, da für alle elektrischen Schaltungen und Anordnungen die Maxwell'schen Gleichungen und damit nach Kap. 1 die Kirchhoffschen Regeln gelten: Wird um die gesamte Anordnung gedanklich eine Hülle gelegt, dann erfüllt jedes zweipolige Element oder jede zweipolige Teilschaltung, die aus dieser Hülle herausgezogen wird, die Torbedingung.

Mitunter führt eine solche Partitionierung aber zu Schaltungsteilen, deren Berechnung keinen Sinn macht oder zu aufwendig ist. Hier führt die Berechnung der Schaltung mit Hilfe einer Beschreibung durch Viertore zum Erfolg. Diese Methode wollen wir uns nachfolgend am häufigsten in der Praxis vorkommenden Beispiel, der Serien-Parallel-Kopplung anschauen. Zur allgemeinen Beschreibung eines echten Vierpols werden die Ströme in drei der vier Pole sowie die Spannungen zwischen drei der vier Pole benötigt. Der fehlende vierte Wert ergibt sich aufgrund der Kirchhoffschen Gleichungen  $\sum U = 0$ ,  $\sum I = 0$  auf der Hüllfläche des Vierpols.

Für die in der Abb. 6.20 dargestellte S-P-Kopplung addieren sich die Spannungen  $\underline{U}_1^{(1)}$ ,  $\underline{U}_1^{(2)}$  an den Eingängen der beiden Vierpole. An den Ausgängen addieren sich jeweils die Ströme  $\underline{I}_2^{(1)}$ ,  $\underline{I}_2^{(2)}$  und  $\underline{I}_3^{(1)}$ ,  $\underline{I}_3^{(2)}$ .



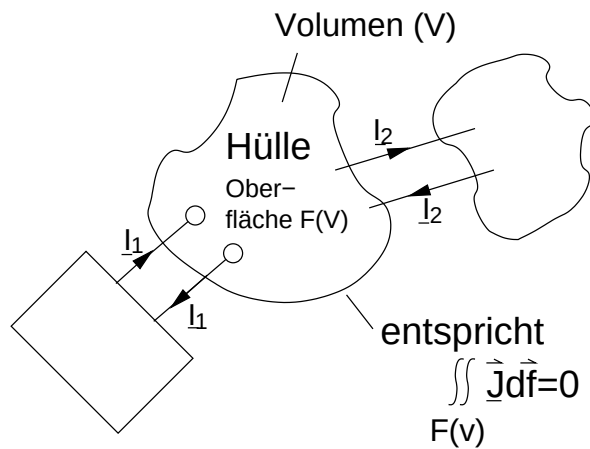


Abb. 6.19: Erzwingene Torbedingung für die Schaltung in V bei Abschluß mit echten 1-Tor-Elementen.

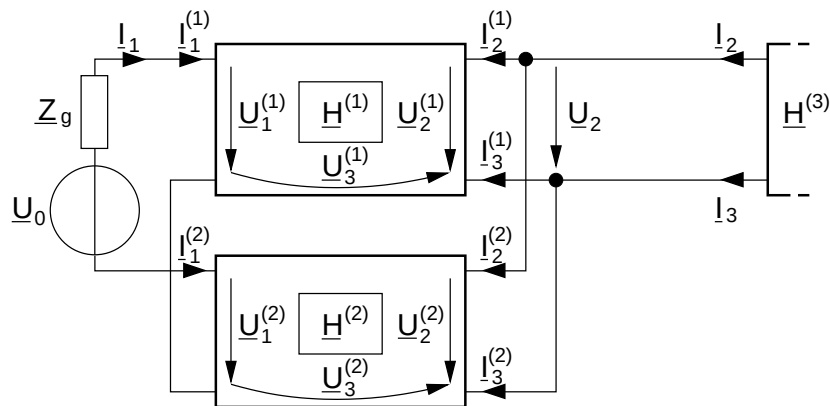


Abb. 6.20: Erzwingene Torbedingung der Gesamtschaltung bei Abschluß mit echten 1-Tor-Elementen.

Um die Zusammenschaltung der beiden Vierpole bei der S-P-Kopplung durch eine einfache Addition der Matrizen darstellen zu können, muss die  $[\underline{\mathbf{H}}]$ -Matrix jedes Vierpols die Struktur

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{H}}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

besitzen, bei der die addierten Größen der beiden Vierpole auf der linken Seite stehen. Die restlichen Größen bilden den Vektor der rechten Seite,

die Anordnung der Größen innerhalb eines Vektors ist willkürlich, legt jedoch die Bedeutung der  $\underline{H}_{ij}$  in  $[\underline{\mathbf{H}}]$  fest. Man erleichtert sich daher die spätere Interpretation der Ergebnisse, wenn die Anordnung der Elemente in den Vektoren so gewählt wird, dass die aus der Zweitortheorie bekannte Bedeutung der Elemente weitestgehend beibehalten wird<sup>22</sup>.

Aus Abb. (6.19) lesen wir folgende Beziehungen zwischen den Strömen und Spannungen an den Vierpolen ab:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1^{(1)} = -\underline{I}_1^{(2)} \quad (6.76)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2^{(1)} + \underline{I}_2^{(2)} \quad (6.77)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_3^{(1)} + \underline{I}_3^{(2)} \quad (6.78)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1^{(1)} - \underline{U}_1^{(2)} \quad (6.79)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_2^{(1)} = \underline{U}_2^{(2)} \quad (6.80)$$

$$\underline{U}_3^{(i)} = \underline{U}_3^{(1)} = \underline{U}_3^{(2)} \quad (6.81)$$

( $\underline{U}_3^{(i)}$  ist keine Klemmspannung des Gesamtvierpols.)

Darin weisen  $\underline{I}_1^{(2)}$  in Gl. (6.76) und  $\underline{U}_1^{(2)}$  in Gl. (6.79) ein negatives Vorzeichen auf. Werden die einzelnen Hybrid-Matrizen entsprechend Gl. (6.75) definiert, müssen die Vorzeichen von  $\underline{I}_1$  und  $\underline{U}_1$  in der H-Matrix von Vierpol (2) berücksichtigt werden. Durch das Vorzeichen von  $\underline{I}_1$  wird die erste Spalte, durch das Vorzeichen von  $\underline{U}_1$  die erste Zeile der H-Matrix mit -1 multipliziert. Durch diese mathematische Umformung erhält man die modifizierte H-Matrix  $\underline{H}_{mod}^{(2)}$ , die zur Addition mit  $\underline{H}^{(1)}$  geeignet ist:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Darstellung entsprechend Gl. (6.76) - (6.81)}} = [\underline{\mathbf{H}}^{(2)}] \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Äquivalente Darst. entsprechend Def. nach Gl. (6.75)}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Äquivalente Darst. entsprechend Def. nach Gl. (6.75)}} = [\underline{\mathbf{H}}_{mod}^{(2)}] \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Äquivalente Darst. entsprechend Def. nach Gl. (6.75)}} \quad (6.82)$$

<sup>22</sup>Zum Vergleich hier noch einmal der Aufbau des Gleichungssystems für die Hybridmatrix:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{H}}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$

mit

$$[\underline{\mathbf{H}}_{mod}^{(2)}] = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11}^{(2)} & -\underline{H}_{12}^{(2)} & -\underline{H}_{13}^{(2)} \\ -\underline{H}_{21}^{(2)} & \underline{H}_{22}^{(2)} & \underline{H}_{23}^{(2)} \\ -\underline{H}_{31}^{(2)} & -\underline{H}_{32}^{(2)} & -\underline{H}_{33}^{(2)} \end{bmatrix} . \quad (6.83)$$

Es ergibt sich aus Gl. (6.76)-(6.81) entsprechend den vorangegangenen Überlegungen für die Addition der H-Matrizen, die H-Matrix der S-P-Kopplung zu

$$[\underline{\mathbf{H}}] = [\underline{\mathbf{H}}^{(1)}] + [\underline{\mathbf{H}}_{mod}^{(2)}] \quad (6.84)$$

und das entsprechende Gleichungssystem zu

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \underline{H}_{13} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} & \underline{H}_{23} \\ \underline{H}_{31} & \underline{H}_{32} & \underline{H}_{33} \end{bmatrix}}_{[\underline{\mathbf{H}}]} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3^{(i)} \end{bmatrix} . \quad (6.85)$$

Das Gleichungssystem vereinfacht sich, falls der Gesamt-Vierpol mit einem Tor abgeschlossen ist, so dass gilt

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_2 . \quad (6.86)$$

In diesem Fall ist die dritte Zeile des Gleichungssystems (6.85) linear abhängig von der zweiten Zeile und lässt sich durch Addition mit der zweiten Zeile eliminieren.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \underline{H}_{13} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} & \underline{H}_{23} \\ \underline{H}_{21} + \underline{H}_{31} & \underline{H}_{22} + \underline{H}_{32} & \underline{H}_{23} + \underline{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3^{(i)} \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

Die dritte Zeile ergibt eine identische Darstellung für  $\underline{U}_3^{(i)}$ :

$$-\underline{U}_3^{(i)} = \left[ \frac{\underline{H}_{21} + \underline{H}_{31}}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} + \frac{\underline{H}_{22} + \underline{H}_{32}}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} \right] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (6.88)$$

die eingesetzt in Gl. (6.87) das Vierpol-Gleichungssystem mit Hybridparametern für eine S-P-Kopplung bei Abschluss mit einem Tor ergibt:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} - \frac{\underline{H}_{13}(\underline{H}_{21} + \underline{H}_{31})}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} & \underline{H}_{12} - \frac{\underline{H}_{13}(\underline{H}_{22} + \underline{H}_{32})}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} \\ \underline{H}_{21} - \frac{\underline{H}_{23}(\underline{H}_{21} + \underline{H}_{31})}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} & \underline{H}_{22} - \frac{\underline{H}_{23}(\underline{H}_{22} + \underline{H}_{32})}{\underline{H}_{23} + \underline{H}_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (6.89)$$

Die Parameter des Gleichungssystems (6.89) sind die Vierpolparameter im üblichen Sinn; sie beschreiben zwar einen Dreipol in jeder Schaltungseinbettung korrekt, einen Vierpol jedoch nur dann, wenn er beidseitig mit Zweipolen abgeschlossen ist. Ist dies nicht der Fall, so müssen die Teilvierpole durch 3x3 - Matrizen beschrieben werden.

In analoger Weise gilt für die

-SSK:

$$\underline{\mathbf{U}} = (\underline{\mathbf{Z}}^{(1)} + \underline{\mathbf{Z}}^{(2)})\underline{\mathbf{I}} \quad (6.90)$$

mit  $\underline{\mathbf{U}} = (\underline{U}_1, \underline{U}_2, 0)^t$ ,  $\underline{\mathbf{I}} = (\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3^{(i)})^t$ ,  $\underline{I}_3^{(i)}$  analog  $\underline{U}_3^{(i)}$  zu Gleichung (6.81).

-PPK:

$$\underline{\mathbf{I}} = (\underline{\mathbf{Y}}^{(1)} + \underline{\mathbf{Y}}^{(2)})\underline{\mathbf{U}} \quad (6.91)$$

mit  $\underline{\mathbf{U}} = (\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3)^t$ ,  $\underline{\mathbf{I}} = (\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3)^t$ .

-PSK:

$$\underline{\mathbf{A}} = (\underline{\mathbf{G}}^{(1)} + \underline{\mathbf{G}}_{mod}^{(2)})\underline{\mathbf{B}} \quad (6.92)$$

mit  $\underline{\mathbf{A}} = (\underline{I}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_3^{(i)})^t$ ,  $\underline{\mathbf{B}} = (\underline{U}_1, \underline{I}_2, \underline{U}_3^{(i)})^t$  und  $\underline{\mathbf{G}}_{mod}$  analog  $\underline{\mathbf{H}}_{mod}$ .

### Beispiel

In der folgenden Abb. (6.21) ist die Schaltung eines Universalverstärkers für den Tonfrequenzbereich dargestellt. Eine Tabelle zur Dimensionierung findet sich in Tabelle 6.1.

Im Wechselstromersatzschaltbild Abb. (6.22) und dem zugehörigen Kleinsignalmodell nach Abb. (6.23) fehlen die Bauelemente, die nur zur Arbeitspunktseinstellung dienen.

Die Transistoren werden als nichtideale spannungsgesteuerte Stromquellen ( $g_{be}, g_m$ ) modelliert (siehe nächstes Bild).

Die Berechnung der Vierpolmatrizen ergibt

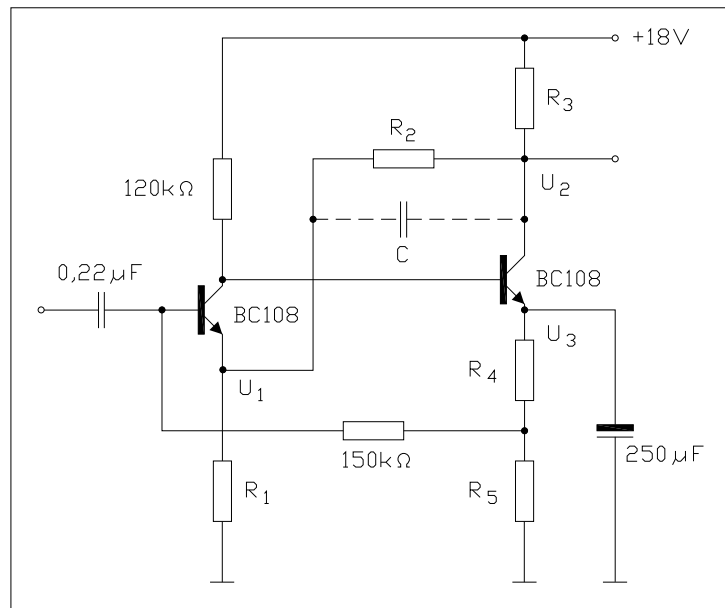


Abb. 6.21: Schaltung eines Universalverstärkers für den Tonfrequenzbereich.

| $V_u$               | dB         | 10    | 20    | 30    | 40    |
|---------------------|------------|-------|-------|-------|-------|
| $R_1$               | k $\Omega$ | 4,7   | 1,5   | 1,5   | 1     |
| $R_2$               | k $\Omega$ | 12    | 15    | 56    | 180   |
| $R_3$               | k $\Omega$ | 1,8   | 2,2   | 2,2   | 2,2   |
| $R_4$               | $\Omega$   | 470   | 560   | 330   | 680   |
| $R_5$               | $\Omega$   | 1200  | 470   | 270   | 220   |
| $C$                 | pF         | -     | -     | -     | 10    |
| $U_1$               | V          | 3,4   | 0,97  | 0,4   | 0,15  |
| $U_2$               | V          | 10,8  | 9,3   | 9,3   | 9,7   |
| $U_3$               | V          | 5,6   | 3,55  | 2,3   | 3,4   |
| $ \underline{Z}_1 $ | k $\Omega$ | 145   | 140   | 135   | 110   |
| $ \underline{Z}_2 $ | $\Omega$   | 63    | 140   | 260   | 700   |
| $f_u$               | Hz         | < 20  | < 20  | < 20  | < 20  |
| $f_o$               | Hz         | >> 20 | >> 20 | >> 20 | >> 20 |

 Tabelle 6.1: Dimensionierungen des Verstärkers nach Abb. (6.21) für verschiedene Spannungsverstärkungen  $V_U$

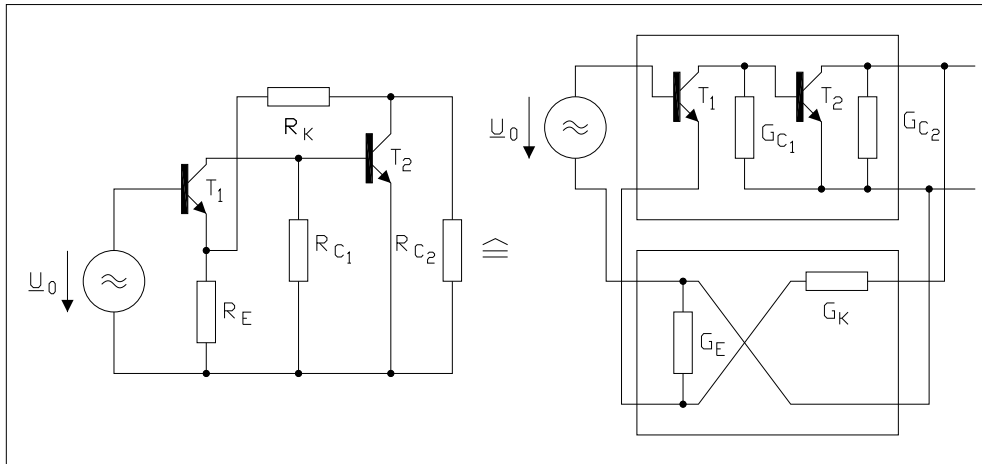


Abb. 6.22: Wechselstromersatzschaltung des Verstärkers nach Abb. (6.21). Die rechte Seite zeigt eine Aufspaltung in zwei Teilvierpole, die zur weiteren Berechnung verwendet wird.

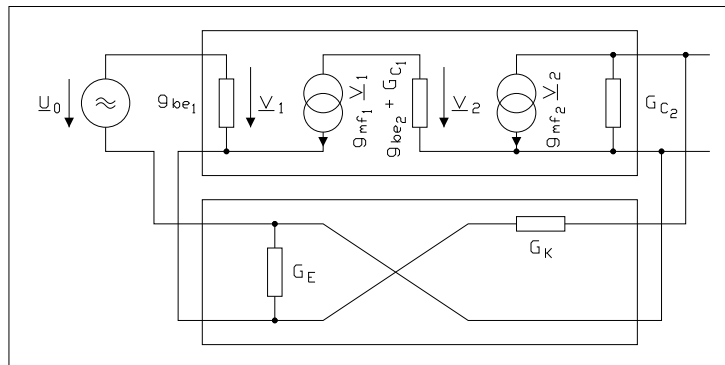


Abb. 6.23: Kleinsignalmodell der Wechselstromersatzschaltung nach Abb. (6.22)

$$[\underline{\mathbf{H}}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{be1}} & 0 & 0 \\ -\frac{g_{m1}g_{m2}}{g_{be1}(g_{be2} + G_{C1})} & G_{C2} & 0 \\ \frac{g_{m1}}{g_{be1}} \left( 1 + \frac{g_{m2}}{g_{be2} + G_{C1}} \right) & -G_{C2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\underline{\mathbf{H}}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & G_K & -G_K \\ -1 & 0 & -G_E \end{bmatrix}.$$

Hieraus erhalten wir die resultierende Vierpolmatrix:

$$[\underline{\mathbf{H}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{be1}} & 0 & 1 \\ -\frac{g_{m1}g_{m2}}{g_{be1}(g_{be2} + G_{C1})} & G_K + G_{C2} & -G_K \\ \frac{g_{m1}}{g_{be1}} \left( 1 + \frac{g_{m2}}{g_{be2} + G_{C1}} \right) + 1 & -G_{C2} & -G_E \end{bmatrix}.$$

Bei Abschluss mit einem Tor gilt Gl. (6.86) und die 3x3 Matrix lässt sich reduzieren. Die Reduktion (Elimination von  $\underline{U}_3^{(i)}$ ) zur 2x2 - Matrix ergibt:

$$[\underline{\mathbf{H}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{be1}} + \frac{g_{m1}/g_{be1} + 1}{G_E + G_K} & \frac{G_K}{G_E + G_K} \\ -\frac{g_{m1}g_{m2}}{g_{be1}(g_{be2} + G_{C1})} - \frac{G_K}{G_E + G_K} \left( \frac{g_{m1}}{g_{be1}} + 1 \right) & G_{C2} + \frac{G_E G_K}{G_E + G_K} \end{bmatrix}.$$

Die Spannungsverstärkung  $\underline{V}_u$  ist gegeben durch  $\underline{G}_{21} = -\underline{H}_{21}/\det[\underline{\mathbf{H}}]$ . Mit der Definition

$$\underline{V}'_u := \frac{\beta_1 \left( \frac{g_{m2}}{g_{be2} + G_{C1}} + \frac{G_K}{G_E + G_K} \right)}{\frac{1}{g_{be1}} \left( G_{C2} + \frac{G_E G_K}{G_E + G_K} \right) + \frac{\beta_1 G_{C2}}{G_E + G_K} + \frac{\beta_1 G_E G_K}{(G_E + G_K)^2}}$$

erhalten wir

$$\underline{V}_u = \frac{\underline{V}'_u}{1 + (G_K/(G_E + G_K))\underline{V}'_u}, \quad \text{und unter der Bedingung} \quad \frac{G_K}{G_E + G_K}|\underline{V}'_u| \gg 1$$

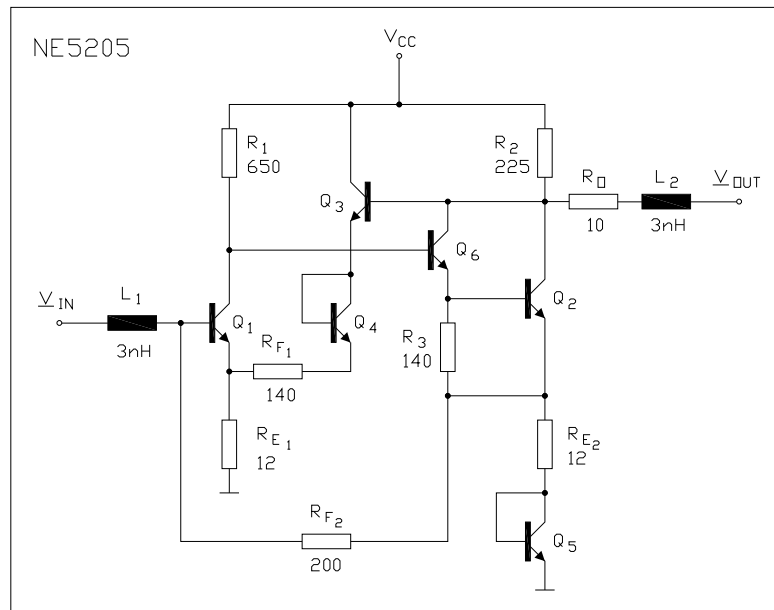
gilt die Näherung

$$\underline{V}_u = \frac{G_E + G_K}{G_K} = \frac{R_E + R_K}{R_E}.$$

Aus der Dimensionierungstabelle kann man ersehen, daß die für die Näherung angegebene Bedingung für  $|V_u| = 40\text{dB}$  nicht mehr erfüllt ist.

**Beachten:**  $\underline{V}'_u$  ist nicht allein durch die obere Teilstruktur festgelegt, sondern durch das Rückkopplungsnetzwerk wesentlich mitbestimmt.

Das folgende Bild zeigt einen Breitband - Hochfrequenzverstärker (B = 650MHz) ganz ähnlicher Struktur wie der im Beispiel 6.4 für Kabel - TV - Netze.


$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_{F1} + R_{E1}}{R_{E1}}.$$

Auch in dem Beispiel mit gekoppelten Vierpolen hat sich die stabilisierbare Größe in der Form

$$\underline{A} = \frac{\underline{A}'}{1 + \beta \underline{A}'} \quad (6.93)$$

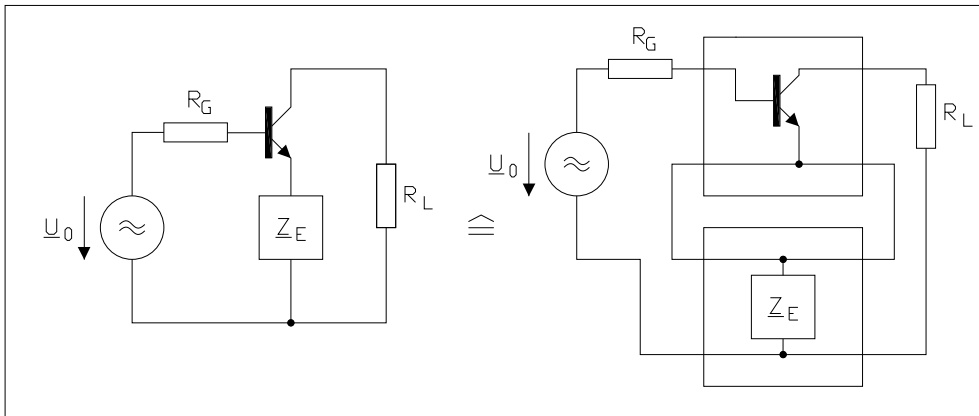


ergeben, wobei im allgemeinen  $\underline{A}'$  und  $\underline{\beta}$  frequenzabhängig sind.  $-\beta(j\omega)A'(j\omega)$  ist dabei die Schleifenverstärkung. In dieser Form werden wir sie im Kapitel 7.6 verwenden.

## 6.5 Beispiele rückgekoppelter Schaltungen

Wir betrachten zunächst Kleinsignalmodelle einstufiger Verstärker mit Netzwerken zur Frequenzgangbeeinflussung. Zur Ermittlung der Kenngrößen wird auf die bereits ermittelten Bestimmungsgleichungen Gl. (6.22) - (6.41) zurückgegriffen.

**Beispiel 1:** Impedanz in der Emitterleitung (SSK).



Es handelt sich um SSK. Der Transistor kann näherungsweise als spannungsgesteuerte Stromquelle angesehen werden. Die Transadmittanz  $\underline{g}_m$  ist die stabilisierbare Größe:

$$\underline{g}_m = \frac{g_m}{1 + \underline{Z}_E g_m}; \quad \text{für } \underline{Z}_E = \frac{R_E}{1 + j\omega R_E C_E}$$

ergibt sich

$$\underline{g}_m = \frac{g_m}{1 + (g_m R_E / (1 + j\omega R_E C_E))}$$

mit den Grenzfällen

$$\underline{g}_m \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{g_m}{1 + g_m R_E}, \quad \underline{g}_m \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} g_m .$$

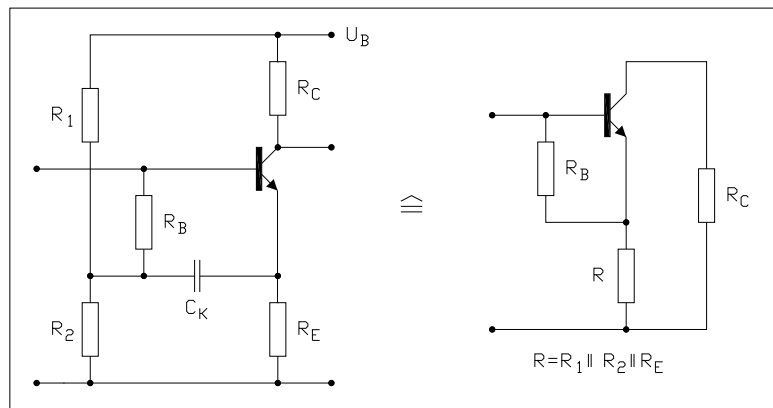
Mit hinreichend kleinen Werten für  $R_G$  und  $R_L$  gilt:

$$\underline{r}_{ein} = \underline{r}_{ein}^{(1)} \left[ 1 + \frac{g_m R_E}{1 + j\omega R_E C_E} \right], \quad \underline{r}_{aus} = \underline{r}_{aus}^{(1)} \left[ 1 + \frac{g_m R_E}{1 + j\omega R_E C_E} \right]$$

$$\text{mit } \underline{r}_{ein}^{(1)} = \frac{1}{\underline{y}_{11}^{TR}} \quad \text{und} \quad \underline{r}_{aus}^{(1)} = \frac{1}{\underline{y}_{22}^{TR}}.$$

$\underline{y}_{11}^{TR}$  und  $\underline{y}_{22}^{TR}$  sind die entsprechenden Transistoradmittanz - Parameter.

Die gleiche Rückkopplungsstruktur liegt vor bei der 'Bootstrap' - Schaltung (bootstrap: Stiefelschleufe).



Bei der Bootstrap - Schaltung kann ein großer Eingangswiderstand auch bei einem relativ niederohmig ausgeführten Spannungsteiler erreicht werden. Die Bezeichnung "Bootstrap - Schaltung," kommt daher, daß infolge Rückkopplung über  $C_K$  das Potential am Knoten ( $R_1, R_2, R_B, C_K$ ) sich in fast der gleichen Weise ändert wie das Basispotential, so wie Münchhausen sich durch Ziehen an den Stiefelschlaufen (=bootstrap) aus dem Morast zieht, da (nach Münchhausen) die an den Stiefelschlaufen angreifende Kraft in gleicher Weise am Körperschwerpunkt angreift.

**Beispiel 2** Gegenkopplung durch Admittanz zwischen Kollektor und Basis (PPK):

Um die Forderung bezüglich der  $\underline{Z}$  - Matrix (Gl. (6.8)) des Hauptdreipols zu erfüllen, daß die Hauptdiagonalelemente hinreichend klein sind, müssen  $R_B$  und  $R_L$  in diesen einbezogen und hinreichend klein gewählt werden. Die

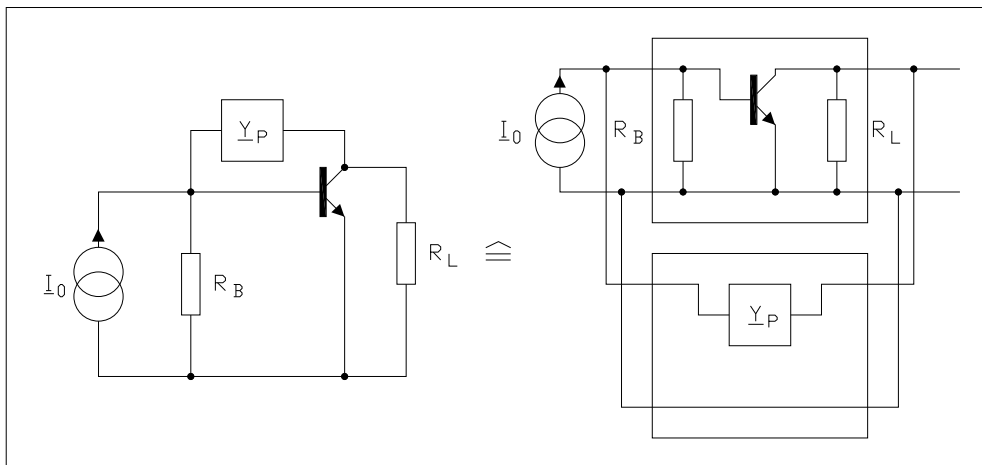
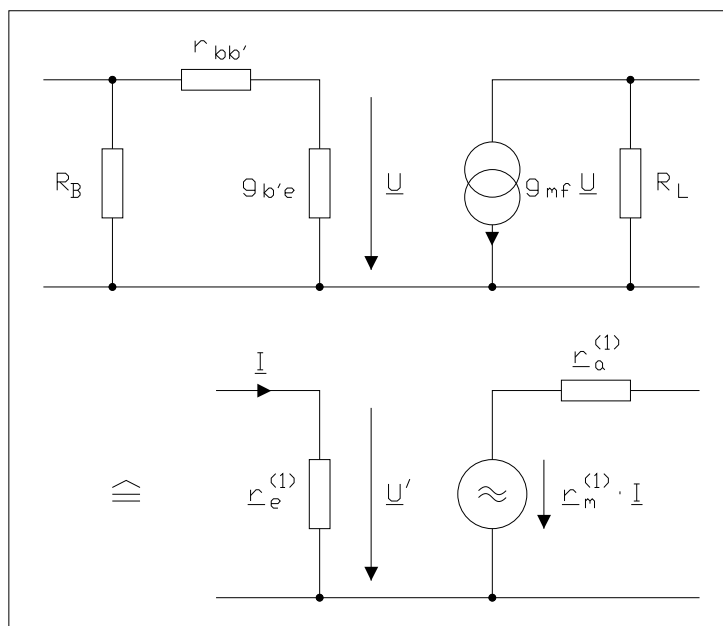


Abb. 6.24: Beispielschaltung für PPK.

stabilisierbare Größe ist dann die Transimpedanz. Für den Transistor wird ein einfaches Kleinsignalmodell benutzt:


 Abb. 6.25: Kleinsignalersatzschaltung des Hauptzweiters in der inversen **[P]** Darstellung.

Hierbei gilt:

$$\underline{r}_{ein}^{(1)} = \frac{R_B(1 + r_{bb'}g_{b'e})}{1 + g_{b'e}(R_B + r_{bb'})}, \quad \underline{r}_m^{(1)} = -\frac{g_m R_L R_B}{1 + g_{b'e}(R_B + r_{bb'})},$$

$$\underline{r}_{aus}^{(1)} = R_L, \quad \underline{U}' = (1 + g_{b'e}r_{bb'})\underline{U}.$$

Für die Transimpedanz, den Eingangs - und Ausgangswiderstand der gesamten Schaltung ergibt sich dann:

$$\underline{r}_m = \frac{\underline{r}_m^{(1)}}{1 - \underline{Y}_p \underline{r}_m^{(1)}}, \quad \underline{r}_{ein} = \frac{\underline{r}_{ein}^{(1)}}{1 - \underline{Y}_p \underline{r}_m^{(1)}}, \quad \underline{r}_{aus} = \frac{\underline{r}_{aus}^{(1)}}{1 - \underline{Y}_p \underline{r}_m^{(1)}}.$$

Zur Beeinflussung der Eingangs - und der Ausgangsimpedanz wird zum Beispiel  $\underline{Y}_p = 1/(R_p + j\omega L_p)$  gewählt.

### Beispiel 3: Transimpedanz - Verstärker.

Dieses Beispiel behandelt eine einfache Vorverstärkerstufe eines Regenerierverstärkers für Glasfaserstrecken nach Abb. (6.26). Die pin - Diode als opto - elektronischer Wandler ist am Ende der Glasfaser angebracht.

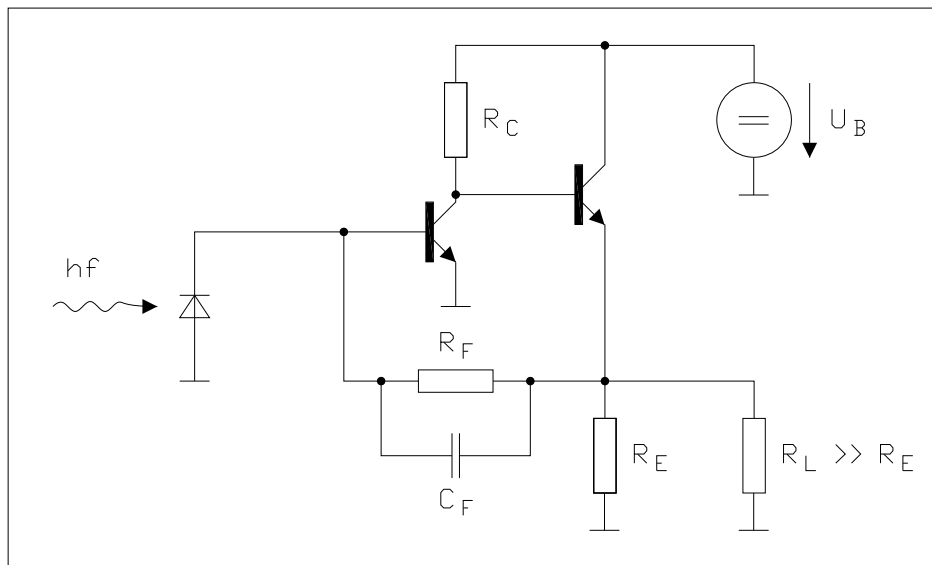


Abb. 6.26: Vorverstärker für PIN-Dioden für den Einsatz im Eingang („frontend“) von Empfängerbausteinen im Glasfasterstrecken.

$R_L$  ist der Eingangswiderstand der nachfolgenden Stufe, der wegen  $R_L \gg R_E$  nicht berücksichtigt zu werden braucht.  $C_F$  repräsentiert die parasitäre

Kapazität des Bauelements mit dem Widerstand  $R_F$ . Es handelt sich um eine Parallel - Parallel - Kopplung;  $R_E$  kann sowohl dem Hauptzweig als auch dem Rückkopplungszweig zugeordnet oder auch auf beide Dreipole aufgeteilt werden. Für die nachfolgende Berechnung wird  $R_E$ , wie in Abb. (6.26) gezeigt, dem Rückkopplungszweig zugeordnet.

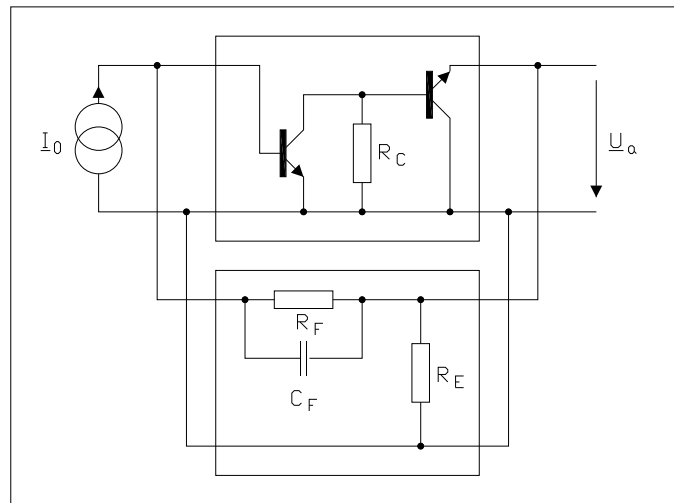


Abb. 6.27: Wechselstromersatzschaltbild des Verstärkers in Abb. (6.26)

Das zugehörigen Kleinsignalersatzschaltbild zeigt Abb. (6.28). Die Transistoren werden als nichtideale Stromquellen modelliert, so daß sich für den Hauptdreipol das folgende Modell ergibt.

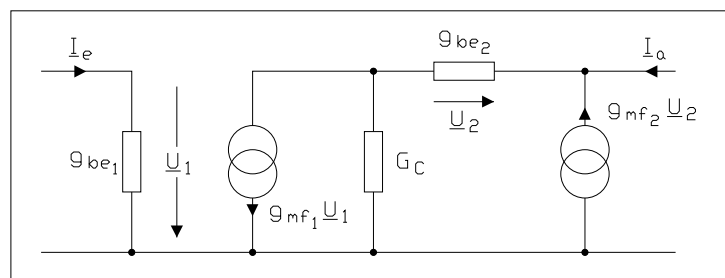


Abb. 6.28: Kleinsignalersatzschaltbild der Wechselstromersatzschaltung nach Abb. (6.27).

Die  $[Z]$  - Matrix ergibt sich zu:

$$[\underline{\mathbf{Z}}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{be1}} & 0 \\ -\frac{g_{m1}}{g_{be1}G_C} & \frac{g_{be2} + G_C}{G_C(g_{m2} + g_{be2})} \end{bmatrix} ;$$

weiter gilt  $\underline{Y}_{12}^{(2)} = -(G_F + j\omega C_F)$  mit  $G_F = 1/R_F$ .

Damit erhalten wir mit  $g_{m1}/g_{be1} = \beta_{AC1}$

$$\underline{r}_m = \frac{-\beta_{AC1}R_C}{1 + (G_F + j\omega C_F)\beta_{AC1}R_C} \quad \text{und für } |G_F + j\omega C_F|\beta_{AC1}R_C \gg 1$$

$$\underline{r}_m = \frac{-R_F}{1 + j\omega C_F R_F} .$$

Die Eingangsimpedanz ergibt sich zu

$$\underline{r}_{ein} = \frac{1}{g_{be1}(1 + (G_F + j\omega C_F)\beta_{AC1}R_C)} ;$$

und die Ausgangsimpedanz zu

$$\underline{r}_{aus} = \frac{1 + g_{be2}R_C}{(g_{m2} + g_{be2})(1 + (G_F + j\omega C_F)\beta_{AC1}R_C)} \approx \frac{1 + g_{be2}R_C}{g_{m2}(1 + (G_F + j\omega C_F)\beta_{AC1}R_C)} .$$

**Beispiel 4:** Breitbandverstärker mit hoher Eingangs - und niedriger Ausgangsimpedanz Abb. (6.29).

Der Basisstrom für  $T_1$  wird über  $R_F$  zugeführt, die Serienschaltung von  $D$  und  $R_E$  weist das gleiche thermische Verhalten wie die Serienschaltung der Basis - Emitter - Diode von  $T_1$  und  $R_S$  auf. Wegen  $|I_E(T_2)| > |I_E(T_1)|$  kann  $R_E = R_S$  gewählt werden. Im Kleinsignalmodell werden  $R_F$ ,  $D$  und  $R_E$  nicht berücksichtigt.  $R_L$  sei in  $R_{C2}$  enthalten.

Für die Teilstruktur (a) gilt nach Beispiel 6.5:

$$\underline{g}_m^{(a)} = \frac{g_m^{(1)}}{1 + g_m^{(1)}R_S/(1 + j\omega R_S C_S)} \approx \frac{1 + j\omega C_S R_S}{R_S} \quad \text{für } g_{m1}R_S \gg |1 + j\omega R_S C_S| .$$

Für die Teilstruktur (b) gilt nach Beispiel 6.5 für

$$R_{C1}g_{be2}^{(2)} \gg 1 : \underline{r}_m^{(1)} = -\beta_{AC2}R_{C2} \text{ und damit}$$

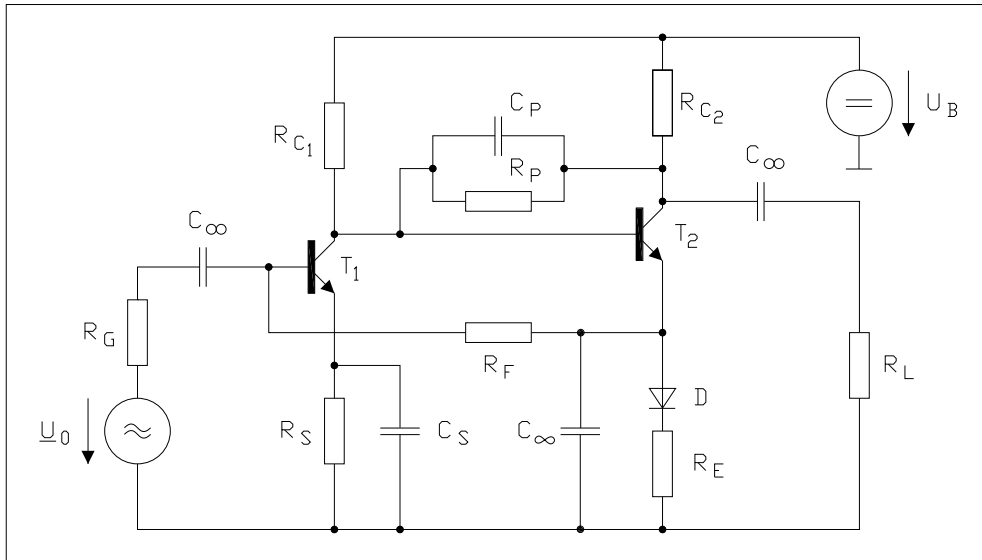


Abb. 6.29: Beispiel eines Breitbandverstärkers mit hoher Eingangsimpedanz und niedriger Ausgangsimpedanz.

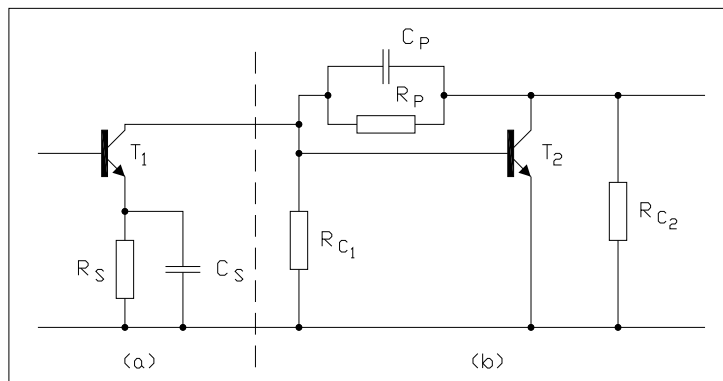


Abb. 6.30: Wechselstromersatzschaltung des Verstärkers aus Abb. (6.29).

$$\underline{r}_m^{(b)} = \frac{-\beta_{AC2} R_{C2}}{1 + (G_p + j\omega C_p) \beta_{AC2} R_{C2}} \approx -\frac{R_P}{1 + j\omega C_P R_P} \quad \text{für } \beta_{AC2} R_{C2} \gg R_P .$$

Es gilt

$$\underline{g}_m^{(a)} = \left. \frac{\underline{I}_a^{(a)}}{\underline{U}_e^{(a)}} \right|_{\underline{U}_a^{(a)}=0}, \quad \underline{r}_m^{(b)} = \left. \frac{\underline{U}_a^{(b)}}{\underline{I}_e^{(b)}} \right|_{\underline{I}_a^{(b)}=0} .$$

Bei der Kopplung der Teile (a) und (b) sind die angegebenen Voraussetzungen hinreichend gut erfüllt: die Eingangsimpedanz der Stufe (b) ist gering,  $R_L$  ist in  $R_{C2}$  enthalten. Weiter gilt  $\underline{I}_e^{(b)} = -\underline{I}_a^{(a)}$ . Hieraus folgt

$$\underline{V}_u = -\underline{g}_m^{(a)} \underline{r}_m^{(b)} = \frac{R_P}{R_S} \cdot \frac{1 + j\omega C_S R_S}{1 + j\omega C_P R_P}.$$

$C_P$  enthält auch die Basis - Kollektor - Kapazität von  $T_2$ . Durch Wahl von  $C_S R_S = C_P R_P$  kann also in weiten Grenzen die Spannungsverstärkung zu  $\underline{V}_u = R_P/R_S$  gemacht werden (Pol- Nullstellenkompensation).

Für die Serien - Parallel - und die Parallel - Serienkopplung von Dreipolen ist es schwierig, praktische Beispiele zu finden. Das liegt daran, daß Quelle und Abschlußimpedanz kein gemeinsames Bezugspotential haben. Das wäre nur vorhanden bei einer durchgehenden Querverbindung von links oben nach rechts unten bei SPK und von links unten nach rechts oben bei PSK. Es gibt Schaltungen mit einer derartigen Kopplungsstruktur, diese können aber nicht als gekoppelte Dreipole sondern nur als gekoppelte Vierpole beschrieben werden, so daß die im Kapitel 6.4 angegebene Methode zur Analyse nicht benutzt werden kann.

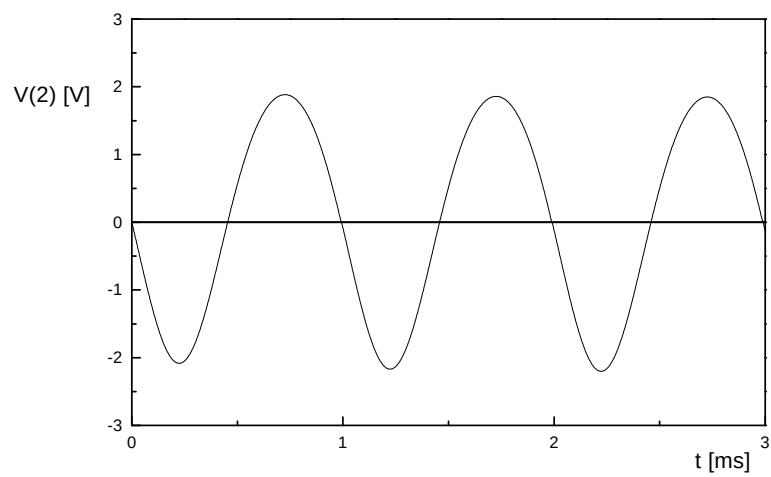
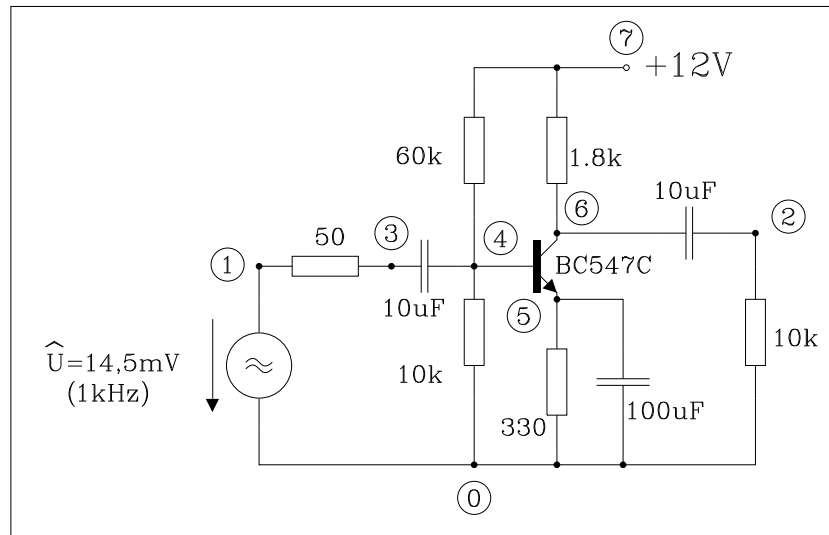
**Beispiel 5:** Verzerrungs - Verminderung durch Gegenkopplung.

Im Falle, daß ein Teil des Emitterwiderstandes ( $R_{EE}$ ) nicht kapazitiv überbrückt ist, muß die Amplitude der Generatorspannung von 14.5mV auf 180mV erhöht werden, um die gleiche Amplitude der Ausgangsspannung von 2V zu erhalten. Die Verzerrung der Ausgangsspannung wird aber deutlich reduziert: während beim Verstärker mit voll überbrücktem Emitterwiderstand ein Klirrfaktor von  $k = 9.2\%$  vorhanden ist, beträgt er beim Verstärker mit nur teilweise überbrücktem Emitterwiderstand nur  $k = 0.82\%$ , ist also um mehr als den Faktor 10 kleiner.

Die Kurvenverläufe und die Daten sind das Ergebnis einer PSPICE - Simulation.



Emitterschaltung mit vollständig überbrücktem Emittterwiderstand:



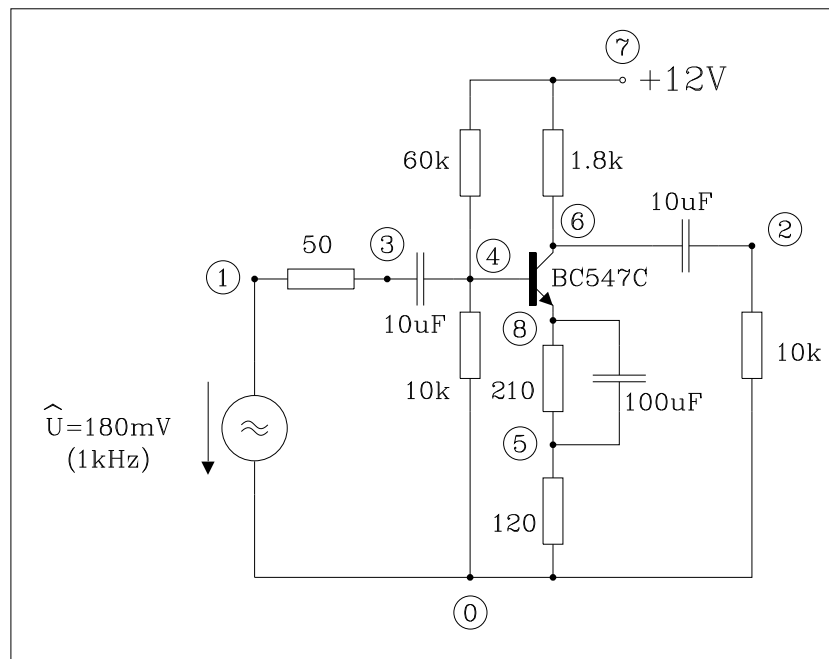
FOURIER COMPONENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(2)

DC COMPONENT = 9.417116E-03

| HARM NO | FREQUENCY (HZ) | FOURIER COMPONENT | NORMALIZED COMPONENT | PHASE (DEG) | NORMALIZED PHASE (DEG) |
|---------|----------------|-------------------|----------------------|-------------|------------------------|
| 1       | 1.000E+03      | 2.021E+00         | 1.000E+00            | -1.711E+02  | 0.000E+00              |
| 2       | 2.000E+03      | 1.860E-01         | 9.200E-02            | 1.113E+02   | 2.825E+02              |
| 3       | 3.000E+03      | 6.203E-03         | 3.069E-03            | 4.688E+01   | 2.180E+02              |
| 4       | 4.000E+03      | 8.928E-04         | 4.417E-04            | 4.289E+01   | 2.140E+02              |
| 5       | 5.000E+03      | 8.116E-04         | 4.015E-04            | 2.664E+00   | 1.738E+02              |
| 6       | 6.000E+03      | 6.435E-04         | 3.184E-04            | -1.780E+00  | 1.694E+02              |
| 7       | 7.000E+03      | 5.487E-04         | 2.715E-04            | -1.564E+00  | 1.696E+02              |
| 8       | 8.000E+03      | 4.802E-04         | 2.376E-04            | -1.432E+00  | 1.697E+02              |
| 9       | 9.000E+03      | 4.257E-04         | 2.106E-04            | -1.301E+00  | 1.698E+02              |

TOTAL HARMONIC DISTORTION = 9.205131E+00 PERCENT

Emitterschaltung mit teilweise überbrücktem Emitterwiderstand:

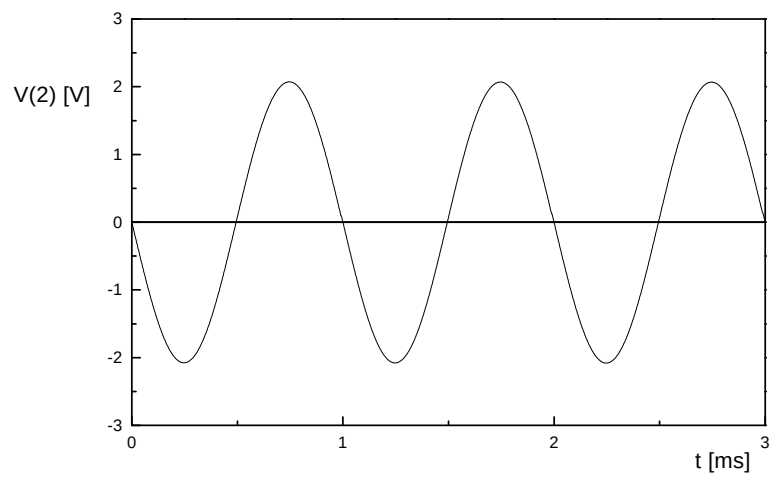


## FOURIER COMPONENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(2)

DC COMPONENT = 1.115550E-02

| HARM NO | FREQUENCY (HZ) | FOURIER COMPONENT | NORMALIZED COMPONENT | PHASE (DEG) | NORMALIZED PHASE (DEG) |
|---------|----------------|-------------------|----------------------|-------------|------------------------|
| 1       | 1.000E+03      | 2.078E+00         | 1.000E+00            | -1.791E+02  | 0.000E+00              |
| 2       | 2.000E+03      | 1.691E-02         | 8.137E-03            | 9.116E+01   | 2.703E+02              |
| 3       | 3.000E+03      | 2.439E-03         | 1.173E-03            | -1.771E+02  | 1.969E+00              |
| 4       | 4.000E+03      | 4.344E-04         | 2.090E-04            | -6.890E+01  | 1.102E+02              |
| 5       | 5.000E+03      | 1.724E-04         | 8.296E-05            | 1.624E+00   | 1.807E+02              |
| 6       | 6.000E+03      | 8.765E-05         | 4.218E-05            | 7.480E+00   | 1.866E+02              |
| 7       | 7.000E+03      | 7.315E-05         | 3.520E-05            | -2.731E-01  | 1.788E+02              |
| 8       | 8.000E+03      | 6.577E-05         | 3.165E-05            | -3.859E-01  | 1.787E+02              |
| 9       | 9.000E+03      | 5.897E-05         | 2.838E-05            | 2.667E-02   | 1.791E+02              |

TOTAL HARMONIC DISTORTION = 8.224844E-01 PERCENT



## 7 Stabilität linearer Schaltungen

### 7.1 Mathematische Grundlagen

#### 7.1.1 Laplace-Transformation (Fourier-Transformation)

Mit Hilfe des Fourier-Integrals

$$\underline{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \mathfrak{F}\{f(t)\} \quad (7.1)$$

läßt sich eine absolut integrierbare Zeitfunktion  $f(t)$  in den Frequenzbereich transformieren. Es entsteht ein Bild  $\underline{F}(j\omega)$  der Funktion  $f(t)$ , daher auch der Name Bildbereich (manchmal auch Spektrum).

Unter der gleichen Bedingung der absoluten Integrierbarkeit existiert eine Umkehrfunktion des Fourierintegrals zur Transformation in den Zeitbereich:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \mathfrak{F}^{-1}\{\underline{F}(j\omega)\} \quad (7.2)$$

Die Bedingung der absoluten Integrierbarkeit der Zeitfunktion ist äquivalent mit der Forderung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (7.3)$$

Diese Forderung schränkt die Anwendungsmöglichkeit der Fourier-Transformation sehr ein. Insbesondere sind über der Zeit konstante oder anwachsende Funktionen nicht mehr generell mit der Fouriertransformation zu behandeln. Eine Ausnahme bilden periodische Zeitverläufe (Gl. (7.3) nicht erfüllt!), die mit Hilfe von verallgemeinerten Funktionen behandelt werden können: Mit Hilfe der sich für  $\underline{F}(j\omega) = 1$  aus Gl. (7.2) ergebenden Dirac-Funktion

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\{1\} \\ &= \lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t} \end{aligned} \quad (7.4)$$

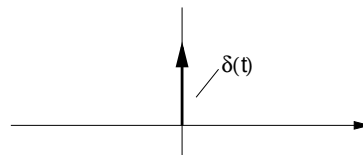


Abb. 7.1: Diracimpuls nach Gl. (7.4).

die auch über äquivalente Folgen  $\delta_n(t)$  wie z. B.

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t), \quad (7.5)$$

$$\delta_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 t^2} \quad \text{oder} \quad (7.6)$$

$$\delta_n(t) = n e^{-\pi n^2 t^2} \quad (7.7)$$

oder mit Hilfe der Ableitung der Sprungfunktion  $u(t)$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad \text{mit } u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \quad (7.8)$$

dargestellt werden kann, ergibt sich für eine periodische Funktion der Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  eine äquivalente Darstellung im Frequenzbereich über die unendliche Reihe (Beweis z. B. durch Einsetzen von Gl. (7.9) in Gl. (7.1))

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (7.9)$$

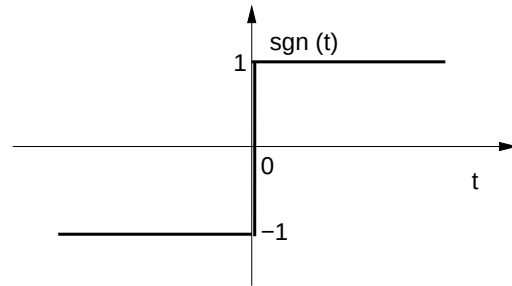
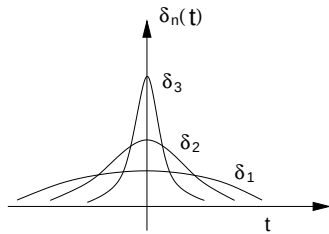


Abb. 7.2: Konvergenzverhalten der Diracfolgen nach Gl. (7.6) und (7.7) für  $n=1,2,3$ . Abb. 7.3: zeitlicher Verlauf der Signumfunktion.

Um auch über der Zeit anwachsende Funktionen behandeln zu können, bedarf es einer Modifikation der Fourierintegrale:

Damit auch über der Zeit anwachsende Funktionen absolut integrierbar im Sinne von Gl. (7.3) sind, wird die Funktion mit einem Faktor multipliziert, der im Unendlichen stärker gegen Null geht, als die Funktion  $f(t)$  zunimmt. Gut dafür geeignet ist z.B. eine Multiplikation mit dem Faktor

$$e^{-\sigma t} \quad \text{mit } \sigma > 0, \in \mathbb{R} \quad (7.10)$$

da z.B. für alle  $n$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-\sigma t} t^n) = 0, \quad t \geq 0 \quad (7.11)$$

und auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-\sigma t} e^{+\rho t}) = 0, \quad t \geq 0, \quad \rho, \sigma > 0, \in \mathbb{R}, \quad \text{wenn } \sigma > \rho \quad (7.12)$$

D.h. für ein gegebenes  $\rho$  kann  $\sigma > \rho$  gewählt werden und das Produkt  $e^{-\sigma t} e^{+\rho t}$  verschwindet im Unendlichen. Gl. (7.11) und (7.12) beinhalten die häufigsten, in der Elektrotechnik auftretenden Fälle zu transformierender Funktionenklassen von Polynomen und Exponentialfunktionen. Unter Voraussetzung einer solchen oder einer anderen geeigneten Funktion, existiert das Integral

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad . \quad (7.13)$$

Beachten: Die untere Grenze ist im Gegensatz zu Gl. (7.3) mit Null angegeben, da die Existenz des Integrals bei negativen  $t$  nicht gegeben ist.

Wir nehmen also für  $t < 0$  die Funktion  $f(t)$  zu Null an, d.h.  $f(t) = u(t)f(t)$  mit  $u(t)$  nach Gl. (7.8). Die Fouriertransformierte von  $u(t)f(t)e^{-\sigma t}$  lautet dann mit (7.1) und geeignet gewähltem  $\sigma$  nach Gl. (7.12):

$$\underline{F}(\sigma, j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \mathfrak{F} \{ f(t) e^{-\sigma t} \} \quad (7.14)$$

$$\underline{F}(\sigma + j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \quad (7.15)$$

Definieren wir  $s := \sigma + j\omega$  und beziehen die Transformation nur auf  $f(t)$  ergibt sich die bekannte Formel der Laplace-Transformation:

$$\underline{F}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathfrak{L} \{ f(t) \} \quad (7.16)$$

Das Integral konvergiert unter der Voraussetzung (vgl. Gl. (7.11), (7.12), (7.13))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) e^{-st}) = 0 \quad (7.17)$$

Die Umkehrtransformation wird in gleicher Weise gewonnen: Aus (7.2) ergibt sich mit  $f(t) \rightarrow f(t) e^{-\sigma t}$

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.18)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad . \quad (7.19)$$

Substitution  $s = \sigma + j\omega \Rightarrow \frac{ds}{d\omega} = j$  liefert die Umkehrung der Laplace-Transformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \underline{F}(s) e^{st} ds = \mathfrak{L}^{-1}\{\underline{F}(s)\} \quad t \geq 0 \quad (7.20)$$

( $\sigma_0$  ist ein, in der Konvergenzhalbebene liegender, fester Wert. Es gilt  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ ).

Die Umkehrung der Laplace-Transformation kann auf elementarem Weg durch Auswertung von Gl. (7.20) erfolgen, oder indem die Identitäten zu bereits bekannten Transformationspaaren

$$f(t) \circ \bullet \underline{F}(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$$

ausgenutzt werden. Tabellen bereits berechneter Transformationspaare finden sich z.B. in [BrSe01]. Auch können zur Umformung in geeignete Transformationspaare die Eigenschaften der Laplace-Transformation benutzt werden (Beweise lassen sich durch einfache Rechnung erbringen):

**Additionssatz:**

$$\mathfrak{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathfrak{L}\{f_1(t)\} + \mathfrak{L}\{f_2(t)\} \quad (7.21)$$

**Ähnlichkeitssatz:**

$$\mathfrak{L}\left\{f\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\} = \tau \underline{F}(s\tau) \quad (7.22)$$

**Dämpfungssatz:**

$$\mathfrak{L}\{f(t - \tau) e^{-at}\} = \underline{F}(s + a), a \in \mathbb{R} \quad (7.23)$$

**Verschiebungssatz:**

$$\mathfrak{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau} \underline{F}(s) \text{ mit } f(t)=0 \text{ für } t < \tau \quad (7.24)$$

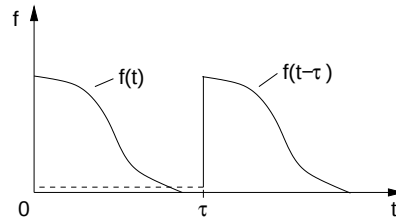


Abb. 7.4: Zeitliche Verschiebung einer Funktion  $f(t)$  um  $\tau$  durch Substitution  $t \rightarrow t - \tau$ . Zu beachten ist, daß bei der Laplace-Transformation  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .

**Faltungssatz:**

$$\mathfrak{L}^{-1} \{ \underline{F}(s) \underline{G}(s) \} = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (7.25)$$

**Zeitdifferentiation (Beweis durch partielle Integration):**

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = - \sum_{\nu=0}^{n-1} s^\nu \frac{d^{n-1-\nu} f(t)}{dt^{n-1-\nu}} \Big|_{t=+0} + s^n \mathfrak{L}\{f(t)\} \quad (7.26)$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} &= -f(+0) + s \underline{F}(s) \\ \mathfrak{L} \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} &= - \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=+0} - sf(+0) + s^2 \underline{F}(s) \end{aligned} \quad (7.27)$$

unter der Annahme, daß der rechtsseitige Grenzwert  $f(+0)$  existiert.

**Zeitintegration:**

$$\mathfrak{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} \underline{F}(s) \quad (7.28)$$

In einigen Fällen führt die Anwendung der Korrespondenzen zu Transformationspaaren nicht zum Ziel. In diesem Fall kann die Umkehrtransformation nach Gl. (7.20) u. U. mit Hilfe des Residuensatzes bestimmt werden.



## 7.2 Bestimmung des Umkehrintegrals der Laplace-Transformation mit Hilfe des Residuen-Satzes

Wir nehmen eine Bildfunktion  $\underline{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  mit endlich vielen isolierten Polen  $s_1 \dots s_N$  an, die wir auf der geschlossenen, positiv orientierten, stückweise glatten Jordan-Kurve<sup>23</sup>  $K = K_1 + K_2$  integrieren.  $K$  ist dabei so gewählt, daß sie für  $\omega_0 \rightarrow \infty$  den Integrationsgrenzen der inversen Laplace-Transformation nach Gl.(7.20) entspricht. Ferner sei  $\underline{F}(s)$  holomorph<sup>24</sup> im

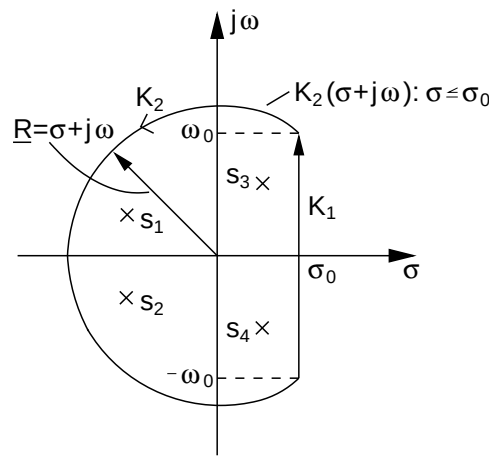


Abb. 7.5: Definition des Integrationsweges  $s : K = K_1 + K_2$  in der komplexen Frequenzebene bei der Integration der Bildfunktion  $\underline{F}(s)$ .  $s_1 \dots s_4$  sind Pole von  $\underline{F}(s)$ .

Innern der Kurve mit Ausnahme der Pole  $s_n$ . Der Integrationsweg wird so gewählt, dass er alle Polstellen von  $\underline{F}(s)$  und damit auch von  $\underline{F}(s)e^{st}$  umfasst. Wir wollen diese Funktion auf  $K$  integrieren und wählen eine Darstellung mit dem Vorfaktor  $\frac{1}{2\pi j}$  so, dass das Integral der inversen Laplace-Transformation entspricht, wenn  $\omega_0$  in  $K$  gegen  $\infty$  strebt. Mit dem Residuensatz von Cauchy

<sup>23</sup>Jordan-Kurve: stetige, doppelunktfreie (keine Kreuzung) Kurve.

<sup>24</sup> $\underline{F}(s)$  ist holomorph (auch analytisch oder regulär) in  $K$ , wenn  $\underline{F}(s)$  in der ganzen offenen Umgebung jedes Punktes  $s$  im Inneren von  $K$  differenzierbar (und damit in eine Potenzreihe entwickelbar) ist.

(1826) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{s=s_n} \{ \underline{F}(s) e^{st} \} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_K \underline{F}(s) e^{st} ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{K_1} \underline{F}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{K_2} \underline{F}(s) e^{st} ds \end{aligned} \quad (7.29)$$

Für  $\omega_0 \rightarrow \infty \Leftrightarrow |\underline{R}| \rightarrow \infty$  liefert das Integral auf  $K_2(\underline{R})$  keinen Beitrag, d. h.

$$\lim_{|\underline{R}| \rightarrow \infty} \left( \int_{K_2(\underline{R})} \underline{F}(s) e^{st} ds \right) = 0 \quad (7.30)$$

wenn  $\underline{F}(s)$  für  $s$  auf  $K_2$  die Forderung

$$\lim_{|\underline{R}| \rightarrow \infty} |\underline{F}(s)| = 0, \quad s : K_2(\underline{R}) \quad (7.31)$$

erfüllt. Dies ist notwendig, da der Betrag des Faktors  $e^{st} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$  auf dem Weg  $K_2$  wegen  $\sigma \leq \sigma_0$  (vgl. Abbildung 7.5:  $\sigma$  auf  $K_2$  liegt immer links von  $\sigma_0$ ) endlich bleibt. Diese Forderung ist für alle echt gebrochen rationale Funktionen  $\underline{F}(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$  erfüllt.

Das Integral über  $K_1$  in Gl. (7.29) geht für  $\omega \rightarrow \infty$  über in das Laplaceintegral nach Gl. (7.20), so dass Gl. (7.29) als Umkehrfunktion der Laplacetransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \underline{F}(s) e^{st} ds = \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{s=s_n} \{ \underline{F}(s) e^{st} \} \quad (7.32)$$

anhand der Residuen der Bildfunktion formuliert werden kann.

**Berechnung der Residuen:**  $\underline{F}(s)$  lässt sich in einem Kreisringgebiet  $R_{12}$  (vgl. Konvergenz) um einen Pol  $s_i$  (Singularität) in eine Laurent-Reihe (anno 1843) entsprechend

$$\begin{aligned} \underline{F}(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (s - s_i)^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{R_{R_1, R_2}(s_i)} \frac{\underline{F}(s)}{(s - s_i)^{n+1}} ds; \quad a_n \in \mathbb{C} \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(s - s_i)^n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_i)^n}_{\text{Regulärteil}} \end{aligned} \quad (7.33)$$

entwickeln. Läuft  $n$  wie in Gl. (7.33) von  $-\infty$ , besitzt  $\underline{F}(s)$  an der Stelle  $s_i$  eine wesentliche Singularität der Ordnung  $\infty$ . Besitzt  $\underline{F}(s)$  an der Stelle  $s_i$  eine Singularität der Ordnung  $N$ , so läuft die Summe ab  $-N$ .

**Konvergenz:** Die Laurentreihe existiert für alle  $s_i \in \mathbb{C}$ , für die sowohl der Hauptteil als auch der Regulärteil konvergiert: Der Regulärteil ist die bekannte Potenzreihe (Taylorreihe) im Komplexen für eine Entwicklung um den Punkt  $s_i$ . Sie konvergiert im Inneren des größten Kreises mit dem Radius  $=: R_2$  um  $s_i$  in dem  $\underline{F}(s)$  holomorph ist (Bspl.:  $\underline{F}(s) = \frac{1}{1-s}$ : größter Kreis bei Entwicklung um den Nullpunkt ( $s_i = 0$ ) hat den Radius 1, d.h. die Potenzreihe  $\frac{1}{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n$  konvergiert für  $|s| < 1$ ).

Setzen wir  $b_n = a_{-n}$  und  $z = \frac{1}{s-s_i}$ , so geht der Hauptteil in Gl. (7.33) über in

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(s-s_i)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad (7.34)$$

Das ist eine Potenzreihe für  $z$  mit dem Konvergenzradius  $\tilde{R}$ . Sie konvergiert also für  $|z| < \tilde{R}$  also für  $\frac{1}{|s-s_i|} < \tilde{R}$  also für  $|s-s_i| > \frac{1}{\tilde{R}} =: R_1$

$\Rightarrow$  Ist  $0 < R_1 < R_2$ , so konvergiert die Laurentreihe in dem Ringgebiet  $R_{12} = \{s \in \mathbb{C} : R_1 < |s-s_i| < R_2\}$

$\Rightarrow$  Für  $R_1 = R_2$  kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen.

$\Rightarrow$  Für  $R_1 > R_2$  konvergiert die Reihe nirgends.

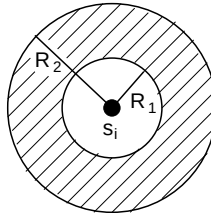


Abb. 7.6: Zur Definition des Ringgebietes  $R_{12}$  über die Radien

$R_1 < R < R_2$  in dem die Laurent-Reihe konvergiert.

Für echt gebrochene rationale Funktionen<sup>25</sup>  $\underline{F}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)}$  kann die Bestimmung der  $a_n$  an der Laurentreihe direkt über eine Partialbruchzerlegung erfolgen: Hat das Nennerpolynom die paarweise verschiedenen Nullstellen  $s_1 \dots s_i \dots s_I$  der Vielfachheit  $N_1 \dots N_i \dots N_I$ , d.h. ist

$$\underline{N}(s) = (s-s_1)^{N_1} (s-s_2)^{N_2} \dots (s-s_i)^{N_i} \dots (s-s_I)^{N_I} \quad (7.35)$$

<sup>25</sup>  $\underline{F}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)}$  ist eine echt gebrochene rationale Funktion, wenn für die Polynome  $\underline{Z}(s)$  und  $\underline{N}(s)$  gilt:  $0 \leq \text{Grad } \underline{Z}(s) < \text{Grad } \underline{N}(s)$ .

dann gilt für  $s \in \mathbb{C}$ :  $\{s_1 \dots s_i \dots s_I\}$  die Partialbruchzerlegung:

$$\underline{F}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \sum_{i=1}^I \left( \sum_{n=1}^{N_i} \frac{a_{-n}^{(i)}}{(s - s_i)^n} \right) \quad . \quad (7.36)$$

Die darin enthaltenen Koeffizienten  $a_{-n}^{(i)} \in \mathbb{C}$  sind eindeutig bestimmbar. Für die in diesem Rahmen behandelten Wirkungsfunktionen sind die Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome reell. Daher sind die Nullstellen von  $\underline{Z}(s)$  und  $\underline{N}(s)$  entweder reell oder paarweise konjugiert komplex mit der gleichen Vielfachheit. Die entsprechenden Koeffizienten  $a_{-n}^{(i)}$  sind dann auch konjugiert komplex zueinander. Sind die Pole von  $\underline{F}(s)$  einfach (Forderung für mit realen Bauelementen realisierbare Wirkungsfunktionen erfüllt), vereinfacht sich Gl. (7.36) zu:

$$\underline{F}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \sum_{i=1}^I \frac{a_{-1}^{(i)}}{s - s_i} = \frac{a_{-1}^{(1)}}{s - s_1} + \frac{a_{-1}^{(2)}}{s - s_2} + \dots + \frac{a_{-1}^{(I)}}{s - s_I} \quad (7.37)$$

Zur Bestimmung eines Koeffizienten  $a_{-1}^{(n)}$  wird Gl. (7.37) mit  $(s - s_n)$  multipliziert:

$$(s - s_n) \underline{F}(s) = (s - s_n) \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = a_{-1}^{(n)} + \underbrace{(s - s_n) \sum_{i=1, i \neq n}^I \frac{a_{-1}^{(i)}}{s - s_i}}_{=0 \text{ für } s=s_n} \quad (7.38)$$

An der Stelle  $s = s_n$  wird der linke Teil von Gl. (7.38) unbestimmt. Von der rechten Seite bleibt nur  $a_{-1}^{(n)}$  übrig. Der unbestimmte linke Teil kann mit der Regel von l'Hôpital bestimmt werden:

$$a_{-1}^{(n)} = \lim_{s \rightarrow s_n} (s - s_n) \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{d/ds((s - s_n)\underline{Z}(s))}{d/ds \underline{N}(s)} \Big|_{s=s_n} = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}'(s)} \Big|_{s=s_n} \quad (7.39)$$

Für die Koeffizienten  $a_{-1}^{(n)}$  stellt Gl. (7.39) die Bestimmungsgleichung dar<sup>26</sup>.

Interpretation: Gl. (7.37) ist eine Partialbruchzerlegung einer echt gebrochen rationalen Funktion  $\underline{F}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)}$  und hat den gleichen Gültigkeitsbereich wie die Originalfunktion. Hingegen hat die Laurent-Reihe Gl. (7.33) einen eingeschränkten Konvergenzbereich (Ringgebiet) und muss um jeden singulären Punkt ( $s_i$ ) entwickelt werden. Somit ist Gl. (7.37) als Summe aller Laurent-Reihen über die Pole  $s_i$  der gebrochen rationalen Funktion  $\frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)}$  zu verstehen.

Wir haben in Gl. (7.37) gezeigt, dass sich  $\underline{F}(s)$  für den einfachen Sonderfall der Wirkungsfunktionen als Partialbruch-Zerlegung darstellen läßt. Bei Entwicklung der Laurent-Reihe um einen der Pole  $s_i$  der Wirkungsfunktionen repräsentiert der jeweilige Term  $\frac{a_{-1}^{(i)}}{(s-s_i)}$  der Partialbruchzerlegung das erste (und einzige) Glied des Hauptteils der Laurent-Reihe.

Wir wollen diese Möglichkeit der Darstellung ausnutzen und integrieren nochmals um  $\underline{F}(s)$  auf der eingangs (Abb. 7.5) beschriebenen Jordankurve  $K = K_1 + K_2$ . Dabei wird jedoch  $K$  zu  $\tilde{K}$  modifiziert, so daß sämtliche Pole von  $\underline{F}(s)$  ausgeschlossen werden. Es ergibt sich der in Abb. 7.7 gezeigte Integrationsweg. Nach dem Integralsatz von Cauchy gilt für das holomorphe

---

<sup>26</sup>Für den Fall, dass  $\underline{N}(s)$  einen einfachen Pol bei  $s_0 = 0$  hat, läßt sich  $\underline{N}(s) = s\tilde{N}(s)$  schreiben, und es gilt  $a_{-1}^{(0)} = \frac{\underline{Z}(s)}{\tilde{N}(s)} \Big|_{s=0}$ ,  $a_{-1}^{(n)} = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}'(s)} \Big|_{s=s_n} = \frac{\underline{Z}(s)}{s\tilde{N}'(s)} \Big|_{s=s_n}$  mit  $n > 0$

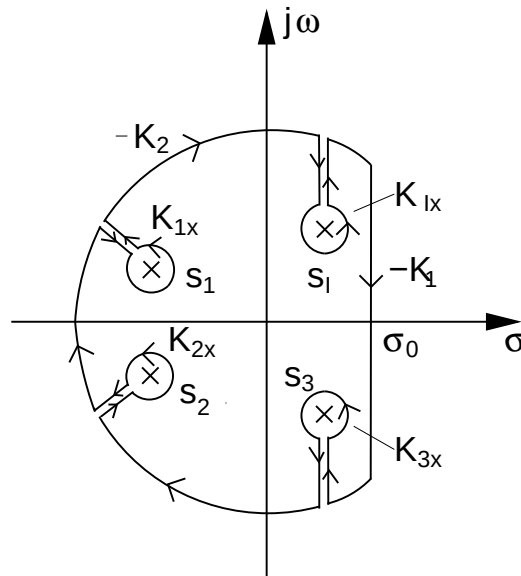


Abb. 7.7: Modifizierter Integrationsweg  $\tilde{K}$ . Im Vergleich zu Abb. 7.5 liegen die Singularitäten  $s_i$  nicht mehr im Inneren der Kurve.

Gebiet im Inneren der Kurve  $\tilde{K}$ :

$$0 = \oint_{\tilde{K}} \underline{F}(s) ds \quad (7.40)$$

$$= \underbrace{\int_{-K_1} + \int_{-K_2}}_{\oint_K \underline{F}(s) ds} + \underbrace{\int_{K_{1x}} + \int_{K_{2x}} + \dots + \int_{K_{ix}}}_{\sum_i \oint_{K_{ix}} \underline{F}(s) ds} + \underbrace{\int_{\downarrow \uparrow}}_{\substack{=0 \text{ da gleiche Beträge} \\ \text{mit unterschiedlichem} \\ \text{Vorzeichen}}} \quad (7.41)$$

$$0 = \oint_{-K} \underline{F}(s) ds + \sum_i \oint_{K_{ix}} \underline{F}(s) ds \quad (\text{Residuensatz}) \quad (7.42)$$

Wird für die Integration um die Pole  $s_i$  die entsprechende Laurent-Reihenentwicklung von  $\underline{F}(s)$  in dem jeweiligen Pol (vgl. Gl. (7.33)) eingesetzt, so liefert das Integral wegen

$$\oint_{K_{ix}} \frac{ds}{(s - s_i)^n} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } n \neq 1, \\ 2\pi j & , \text{ falls } n = 1 \end{cases} \quad (7.43)$$

nur für den  $a_{-1}^{(i)}$ -Term einen Beitrag ungleich Null, d.h. dieser Beitrag verbleibt ( $a_{-1}^{(i)} := \text{Residuum}$ ):

$$\oint_{K_{ix}} \underline{F}(s) ds = \oint_{K_{ix}} \frac{a_{-1}^{(i)}}{s - s_i} ds = 2\pi j a_{-1}^{(i)} \quad (7.44)$$

Damit lässt sich Gl.(7.42) schreiben:

$$\oint_K \underline{F}(s) ds = \sum_i \oint_{K_{ix}} \underline{F}(s) ds = \sum_{i=1}^I 2\pi j a_{-1}^{(i)} \quad (7.45)$$

$a_{-1}^{(i)}$  ist das Residuum von  $\underline{F}(s)$  an der Stelle  $s = s_i$ .

Für den wichtigen Fall der Wirkungsfunktion nach Gl. (7.37)  $\underline{F}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)}$  gilt nach Gl. (7.39):

$$a_{-1}^{(i)} = \left. \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}'(s)} \right|_{s=s_i} . \quad (7.46)$$

Durch Multiplikation mit der im gesamten Integrationsgebiet endlichen Funktion  $e^{st}$  ergibt sich für  $\underline{F}(s)e^{st}$  das Residuum

$$a_{-1}^{(i)} = \left. \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}'(s)} e^{st} \right|_{s=s_i} . \quad (7.47)$$

Damit wird aus Gl.(7.45):

$$\oint_K \underline{F}(s)e^{st} ds = 2\pi j \sum_{i=1}^I \left. \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}'(s)} e^{st} \right|_{s=s_i} . \quad (7.48)$$

Vergleich mit Gl. (7.29) bzw. (7.32) liefert den Heaviside'schen Entwicklungssatz für echt gebrochen rationale Funktionen  $\underline{F}(s)$  mit  $i = 1 \dots I$  einfachen Polen  $s = s_i$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \underline{F}(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^I \left. \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}'(s)} e^{st} \right|_{s=s_i} . \quad (7.49)$$

### 7.3 Bestimmung der Anzahl von Polen und Nullstellen einer Funktion mit Hilfe der Residuen

$\underline{F}(s)$  sei eine echt gebrochen rationale Funktion in der Darstellung:

$$\underline{F}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{K_Z (s - s_{Z,1})^{Z_1} (s - s_{Z,2})^{Z_2} \dots (s - s_{Z,J})^{Z_J}}{K_N (s - s_{N,1})^{N_1} (s - s_{N,2})^{N_2} \dots (s - s_{N,I})^{N_I}} \quad (7.50)$$

Sei  $s_0$  ein Pol oder eine Nullstelle  $n$ -ter Ordnung von  $\underline{F}(s)$ , dann kann  $\underline{F}(s)$  auch geschrieben werden als:

$$\underline{F}(s) = (s - s_0)^n \underline{G}(s), \quad (7.51)$$

mit  $n \in \mathbb{Z}, n > 0$  wenn  $s_0$  eine Nullstelle von  $\underline{F}(s)$  ist und  $n < 0$  für einen Pol von  $\underline{F}(s)$ .  $\underline{G}(s)$  hat in Gl. (7.51) keinen Pol und keine Nullstelle in  $s_0$ .

Im letzten Kapitel wurde  $F(s)$  über die Pole mit Hilfe des Residuensatzes beschrieben. Um auch die Nullstellen von  $\underline{F}(s)$  mit Hilfe des Residuensatzes erfassen zu können, bilden wir mit Gl. (7.51) die Hilfsfunktion

$$\frac{\underline{F}'(s)}{\underline{F}(s)} = \frac{n(s - s_0)^{n-1} \underline{G}(s) + (s - s_0)^n \underline{G}'(s)}{(s - s_0)^n \underline{G}(s)} \quad (7.52)$$

$$= \frac{n}{(s - s_0)} + \frac{\underline{G}'(s)}{\underline{G}(s)} \quad (7.53)$$

Die Hilfsfunktion  $\frac{\underline{F}'(s)}{\underline{F}(s)}$  besitzt, an der Stelle  $s_0$  einen Pol, dessen Residuum den positiven Wert  $n$  besitzt, wenn  $s_0$  eine Nullstelle ist. Ist  $s_0$  eine Polstelle, so ist das Residuum  $n$  der Hilfsfunktion negativ. Der Wert des Residuums  $n$  ist mit der Ordnung des Poles oder der Nullstelle identisch.

Dieses Verfahren lässt sich erneut anwenden, indem in Gl. (7.51) nun  $\underline{G}(s)$  in der gleichen Weise aufgespalten wird. Aus

$$\underline{G}(s) = (s - s_\nu)^m \underline{H}(s) \quad (7.54)$$

folgt dann entsprechend Gl. (7.52) der Ausdruck

$$\frac{\underline{G}'(s)}{\underline{G}(s)} = \frac{m}{(s - s_\nu)} + \frac{\underline{H}'(s)}{\underline{H}(s)}, \quad (7.55)$$

der in Gl. (7.53) eingesetzt werden kann. Wird der Vorgang für alle Pole und Nullstellen von  $\underline{F}(s)$  wiederholt ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\underline{F}'(s)}{\underline{F}(s)} = & \left( \frac{Z_1}{s - s_{Z,1}} + \frac{Z_2}{s - s_{Z,2}} + \dots + \frac{Z_J}{s - s_{Z,J}} \right) \\ & - \left( \frac{N_1}{s - s_{N,1}} + \frac{N_2}{s - s_{N,2}} + \dots + \frac{N_I}{s - s_{N,I}} \right) \end{aligned} \quad (7.56)$$



Integrieren wir die Hilfsfunktion in der komplexen  $s$ -Ebene auf einer beliebigen, geschlossenen, positiv orientierten, stückweise glatten Jordankurve  $-K_s$ , deren Inneres alle Pole und Nullstellen von  $\underline{F}(s)$  enthält, liefert der Residuensatz (vgl. Gl. (7.44)):

$$\oint_{-K_s} \frac{\underline{F}'(s)}{\underline{F}(s)} ds = 2\pi j \sum_{s_{Z,i}, s_{N,i}} \text{Res} \left\{ \frac{\underline{F}'(s)}{\underline{F}(s)} \right\} = 2\pi j \left( \sum_{j=1}^J Z_j - \sum_{i=1}^I N_i \right) \quad (7.57)$$

Mit  $\sum_{j=1}^J Z_j = N$ : Anzahl aller Nullstellen von  $\underline{F}(s)$   
und  $\sum_{i=1}^I N_i = P$ : Anzahl aller Pole von  $\underline{F}(s)$ .

(Ein Pol (eine Nullstelle) der Ordnung  $N_i(Z_j)$  zählt  $N_i$ - ( $Z_j$ -) fach).  
Gl. (7.57) lautet damit

$$\oint_{-K_s} \frac{\underline{F}'(s)}{\underline{F}(s)} ds = 2\pi j (N - P) \quad (7.58)$$

Für eine negative Orientierung (im Uhrzeigersinn) der geschlossenen Kurve in der  $s$ -Ebene gilt entsprechend:

$$\oint_{K_s} \frac{\underline{F}'(s)}{\underline{F}(s)} ds = -2\pi j (N - P) \quad (7.59)$$

Im folgenden wird Gl. (7.59) mit der negativ orientierten Jordan-Kurve verwendet, da dieser Umlaufsinn sich mit den Konventionen bei der Herleitung des Nyquist-Kriteriums deckt. Gl. (7.59) soll in eine einfache, für die Anwendung bei der Netzwerkanalyse geeignete Form gebracht werden. Dazu wird der Ausdruck  $\frac{\underline{F}'(s)}{\underline{F}(s)}$  so umgeformt, dass er die Phase von  $\underline{F}(s)$  in expliziter Darstellung enthält:

$$\frac{\underline{F}'(s)}{\underline{F}(s)} = \frac{d}{ds} \ln(\underline{F}(s)) = \frac{d}{ds} \ln(|\underline{F}| e^{j\varphi_F}) = \frac{d}{ds} \ln |\underline{F}| + j \frac{d}{ds} \varphi_F \quad (7.60)$$

In Gl. (7.59) eingesetzt liefert:

$$\oint_{K_s} \frac{d}{ds} \ln |\underline{F}| ds + j \oint_{K_s} \frac{d}{ds} \varphi_F ds = -2\pi j (N - P) \quad (7.61)$$

$$\underbrace{\oint_{K_s} d \ln |\underline{F}|}_{\in \mathbb{R}} + j \oint_{K_s} d \varphi_F = -2\pi j (N - P) \quad (7.62)$$

$\in \mathbb{R} \Rightarrow = 0$ , da rechte Seite imag.

$$\oint_{K_S} d\varphi_F = 2\pi(P - N) = 2\pi Q = \varphi_F \Big|_{\odot K_S} \quad (7.63)$$

Interpretation: Wird in der komplexen  $s$ -Ebene eine beliebige, geschlossene Jordan-Kurve einmal im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ) durchlaufen, dann durchläuft eine Bildfunktion  $\underline{F}(s)$ , mit  $s$  auf dieser Kurve, einen Winkel  $\varphi_F = 2\pi Q$ . D.h.  $\varphi_F$  erfährt dabei  $Q$  ganzzahlige Umrundungen ( $2\pi$ ) des Koordinaten-Ursprungs, entsprechend der Differenz zwischen den, innerhalb der Kurve liegenden Polen  $P$  und Nullstellen  $N$ .

Beachten: Die Richtung von  $\varphi_F$  in Gl. (7.63) ist mathematisch positiv orientiert, d.h. negative Werte stehen für einen Winkel (eine Drehung) im Uhrzeigersinn.

Zur Erläuterung von Gl. (7.63) dient das Beispiel in Abb. 7.8:

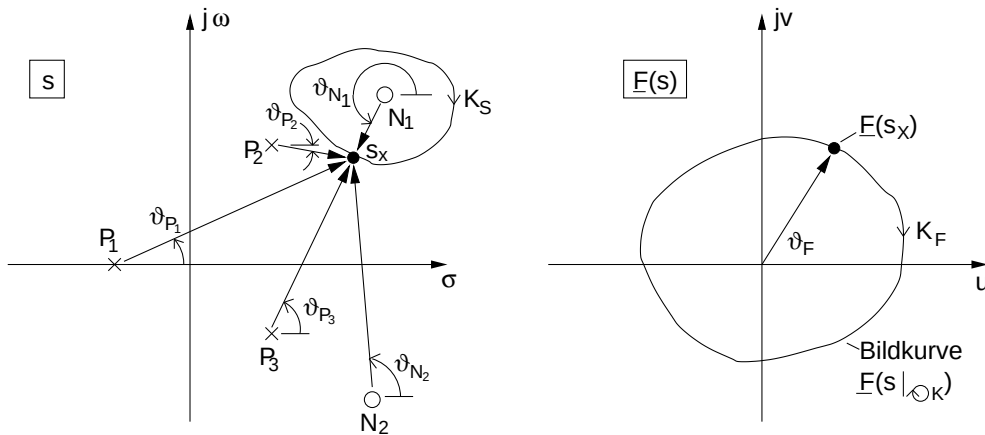


Abb. 7.8: Beispiel zur Bestimmung der Differenz der innerhalb der Jordankurve  $K_S$  in der  $s$ -Ebene liegenden Pole und Nullstellen anhand der Umrundungen des Nullpunktes durch die Bildfunktion  $\underline{F}(s)$ : Innerhalb  $K_S$  gilt  $P = 0$ ,  $N = 1$ :  $\varphi_F|_{\odot K_S} = -2\pi$ .

Hier wird die Bildkurve  $K_F = \underline{F}(s|_{\odot K_S})$  genau  $|P - N| = 1$  mal durchlaufen. Die Umlaufrichtung ist  $\text{sgn}(P - N) = -1$  d.h. mathematisch negativ (Uhrzeigersinn).

Weiteres Beispiel:

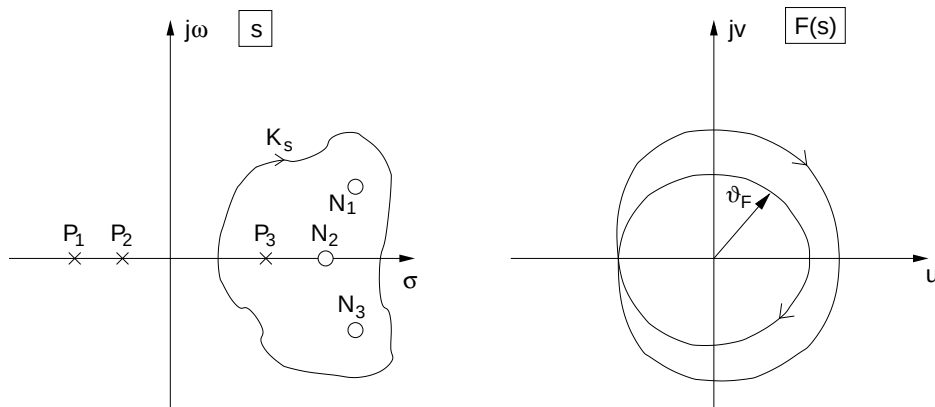


Abb. 7.9: Innerhalb  $K_s$  gilt:  $P = 1, N = 3 \Rightarrow Q = P - N = -2$   
 $\Rightarrow$  2 Umrundungen des Nullpunktes im Uhrzeigersinn.

## 7.4 Das Wurzelortskriterium

Gegeben sei ein beliebiges Netzwerk, das in einem Arbeitspunkt linearisiert wird. Für dieses linearisierte Netzwerk lassen sich die in Kap. 1.3.1 (Seite 12) beschriebenen Wirkungskfunktionen  $\underline{H}(s)$  angeben. Alle Wirkungskfunktionen dieses Netzwerkes besitzen den gleichen Nenner. Die Pole der betrachteten Netzwerke sollen einfach sein.

Der Heavisidesche Entwicklungssatz (Kap. 7, Gl. (7.49)) gibt den Zusammenhang zwischen Wirkungskfunktion (Frequenzbereich, Pole einfach) und dem zeitabhängigen Verhalten eines Netzwerkes an. Wird als allgemeine Form<sup>27</sup> der Anregung der Dirac Impuls  $\delta(t)$  gewählt, so gilt wegen  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$  für die Anregung  $\underline{E}_1(s) = 1 \circ \bullet \delta(t)$ . Für die Antwort eines Netzwerkes auf

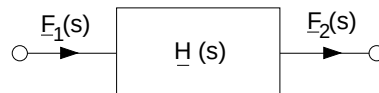


Abb. 7.10:  $\underline{E}_2(s)$  als Antwort eines Netzwerkes mit der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(s)$  auf ein Eingangssignal  $\underline{E}_1(s)$ .

diese Anregung gilt:

$$\underline{E}_2(s) = \underline{E}_1(s)\underline{H}(s) = 1 \cdot \underline{H}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} \quad (7.64)$$

Da  $\underline{H}(s)$  eine echt gebrochen rationale Funktion ist, kann der Heavisidesche Entwicklungssatz Gl. (7.49) direkt angewendet werden, und es gilt für die Ausgangsantwort im Zeitbereich:

$$f_2(t) = \sum_{i=1}^I \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}'(s)} e^{st} \Big|_{s=s_i, \text{ Nullstellen von } \underline{N}(s)} \quad (7.65)$$

Die Stabilität eines Netzwerkes wird wie folgt definiert:

Bei einer gegebenen, zeitlich begrenzten Anregungsfunktion  $f_1(t) = 0, t > T$  ( $T$  beliebig groß) ist das Netzwerk

<sup>27</sup>Allgemein deshalb, weil  $\delta(t)$  im Zeitbereich nur eine infinitesimal kurze Dauer hat, und für  $t > +0$  dem Netzwerk keine Funktion aufzwingt (Erzwungene Antwort). Im Spektralbereich enthält die Anregung wegen  $\delta(t) \circ \bullet 1$  alle Frequenzen.

- stabil, wenn für  $t \rightarrow \infty$  die (Ausgangs-) Antwort verschwindet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_2(t) = 0. \quad (7.66)$$

Wegen Gl. (7.65) muss dann gelten

$$\Re \{s_i\} < 0, \quad \forall i = 1 \dots I \quad (7.67)$$

D.h. ein Netzwerk ist dann stabil, wenn alle Nullstellen (Wurzeln) des Nennerpolynoms seiner Wirkungsfunktion einen negativen Realteil haben.

Es sei darauf hingewiesen, dass diese Aussage auf dem für Wirkungsfunktionen mit einfachen Polen hergeleiteten Heavisideschen Entwicklungssatz Gl. (7.49) beruht.

- grenzstabil, wenn für  $t \rightarrow \infty$  die Antwort begrenzt ist:

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \max |f_2(t)| < \eta \in \mathbb{R}. \quad (7.68)$$

Diese Forderung wird z.B. durch eine sin-Schwingung mit konstanter Amplitude erfüllt.

Wegen Gl. (7.65) kann Grenzstabilität nur dann vorliegen, wenn gilt:

$$\Re \{s_i\} = 0 \quad \text{für } i \in 1 \dots I \quad (7.69)$$

Für alle anderen  $i$  muß Gl. (7.67) gelten.

D.h. ein grenzstabiles Netzwerk mit einfachen Polen des Nennerpolynoms besitzt rein imaginäre Wurzeln. (Diese sind konjugiert komplex oder Null, da die Koeffizienten des Polynoms reell sind.)

- instabil, wenn für  $t \rightarrow \infty$  die Antwort über alle Grenzen wächst (Abb. 7.11):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max |f_2(t)| \rightarrow \infty. \quad (7.70)$$

Nach Gl. (7.65) ist das dann der Fall, wenn für mindestens einen Pol  $s_i$  gilt:

$$\Re \{s_i\} > 0 \quad \text{für } i \in 1 \dots I \quad (7.71)$$

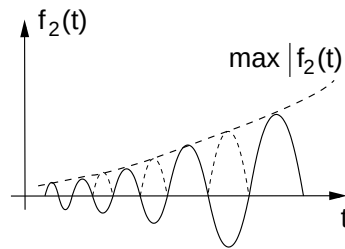


Abb. 7.11: Bei einem instabilen Netzwerk wächst die Impulsantwort über alle Grenzen.

D.h. ein Netzwerk mit einfachen Polen ist instabil, wenn mindestens eine Nullstelle des Nennerpolynoms seiner Wirkungsfunktion einen positiven Realteil hat. Die Untersuchung der Stabilität eines linearen Netzwerkes benötigt also „nur“ die Kenntnis der Lage der Nullstellen des Nennerpolynoms einer Wirkungsfunktion des Netzwerkes.

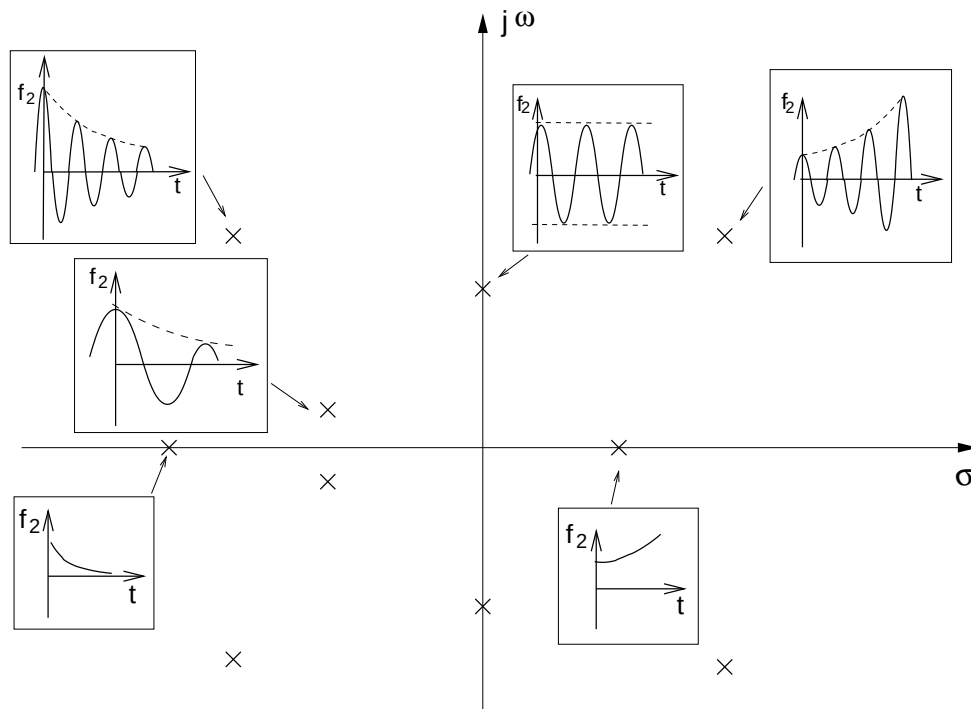


Abb. 7.12: Beispiele für die Lage (Orte) der Wurzeln mit ihrem Einfluss auf die Stabilität der Antwort.

Zur Vollständigkeit sei angemerkt, dass auch für Systeme mit mehrfachen Polen die bereits gezeigte Vorgehensweise angewendet werden kann. Hierzu ist lediglich mit Gl. (7.36) anstelle von Gl. (7.37) zu arbeiten. Die Bestimmung der Koeffizienten der Partialbruchzerlegung erfolgt analog zu Gl. (7.39) bei mehrfachen Polen durch mehrfache Differentiation. Es ergibt sich dann das Residuum für einen Pol der Ordnung  $N_i$  an der Stelle  $s = s_i$  als der Koeffizient

$$a_{-1}^{(i)} = \frac{1}{(N_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{N_i-1}}{d s^{N_i-1}} \{ (s - s_i)^{N_i} \underline{F}(s) \} \quad (7.72)$$

Stabilität liegt weiterhin vor, wenn alle Pole der Wirkungsfunktion in der linken s-Halbebene liegen.

Instabilität liegt vor, wenn mindestens ein Pol der Wirkungsfunktion in der rechten Halbebene liegt, oder mindestens ein mehrfacher Pol ( $N_i \geq 2$ ) auf der imaginären Achse ( $\sigma = 0$ ) liegt.<sup>28</sup>

Grenzstabilität liegt vor, wenn die Wirkungsfunktion keinen Pol in der rechten Halbebene, keine mehrfachen aber mindestens einen einfachen Pol auf der imaginären Achse besitzt.

## 7.5 Das Hurwitz-Kriterium

Die Anwendung des Wurzelortskriteriums setzt die Kenntnis der Nullstellen des Nennerpolynoms einer Wirkungsfunktion (im Folgenden Charakteristisches Polynom) voraus. Das von A. Hurwitz aufgestellte Kriterium gibt einen notwendigen und hinreichenden Satz von Bedingungen für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms an, unter deren Maßgabe das zugehörige lineare System (Netzwerk) stabil ist: Das charakteristische Polynom

$$\underline{N}(s) = a_0 + a_1 s + \dots a_n s^n + a_I s^I \quad (7.73)$$

$$= a_I (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \dots (s - s_I) \quad (7.74)$$

$$\text{mit } a_I > 0 \quad (7.75)$$

<sup>28</sup>Z.B. ist die Laplace-Transformation eines zweifachen Pols bei  $\omega_i$  auf  $j\omega$ -Achse  $\bullet \rightarrow \circ A e^{j\omega_i t} + B t e^{j\omega_i t}$ . Aufgrund des Vorfaktors  $t$  im zweiten Term steigt diese linear mit der Zeit an und ist daher für  $t \rightarrow \infty$  unbegrenzt.

ist ein Hurwitzpolynom, wenn alle Wurzeln  $s_n (n = 1 \dots I)$  einen negativen Realteil haben. Ein lineares System ist also stabil, wenn sein charakteristisches Polynom ein Hurwitz-Polynom ist.

In seiner 1895 in den Mathematischen Annalen 46 erschienenen Arbeit “Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt“ formuliert Hurwitz drei Bedingungen, unter denen das charakteristische Polynom ein Hurwitz-Polynom ist: Das charakteristische Polynom

$$\underline{N}(s) = \sum_{n=0}^I a_n s^n \quad (7.76)$$

ist dann und nur dann ein Hurwitz-Polynom, wenn gilt:

$$1. a_n > 0, \quad \forall n = 0 \dots I \quad \text{Vorzeichenbedingung} \quad (7.77)$$

$$2. D_1, D_2 \dots D_I > 0 \quad \text{Determinantenbedingung} \quad (7.78)$$

mit

$$D_1 = a_{I-1} \quad (7.79)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{I-1} & a_I \\ a_{I-3} & a_{I-2} \end{vmatrix} \quad (7.80)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{I-1} & a_I & 0 \\ a_{I-3} & a_{I-2} & a_{I-1} \\ a_{I-5} & a_{I-4} & a_{I-3} \end{vmatrix} \quad (7.81)$$

$\vdots$

$$D_{I-1} = \begin{vmatrix} a_{I-1} & a_I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{I-3} & a_{I-2} & a_{I-1} & a_I & 0 & \dots & 0 \\ a_{I-5} & a_{I-4} & a_{I-3} & a_{I-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix} \quad (7.82)$$

$$D_I = a_0 D_{I-1}$$

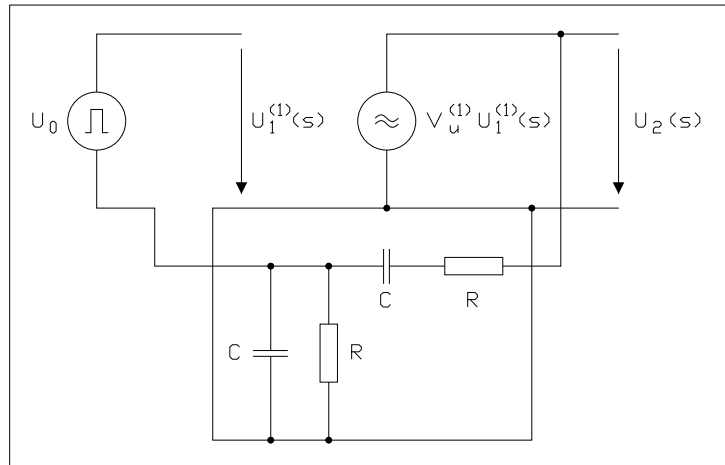
Bildungsgesetz für  $D_n$ :



1. Hauptdiagonale von  $D_n$  enthält  $a_{I-1} \dots a_{I-n}$ .
2. Ausgehend von dem Hauptdiagonalelement wird der Index mit jedem Matrixplatz weiter links um 1 erhöht, mit jedem Matrixplatz nach rechts um 1 verringert bis  $a_I$  erreicht ist. Weitere Plätze werden mit Null aufgefüllt.

Für ein Polynom zweiter Ordnung ist die Bedingung erfüllt, sobald  $a_0, a_1, a_2 > 0$ , da aus der Vorzeichenbedingung (7.77) direkt  $D_1, D_2 > 0$  folgt. Damit ergibt sich im folgenden Beispiel sofort  $V_u^{(1)} < 3$  für Stabilität.

**Beispiel 2:** Serien-Parallel-Kopplung einer spannungsgesteuerten Spannungsquelle mit einem RC-Netzwerk.



Es gilt (vergleiche Gl. (6.36)):

$$U_2(s) = \frac{V_U^{(1)} U_0(s)}{1 - H_{12}^{(2)} V_U^{(1)}} \quad \text{und mit} \quad H_{12}^{(2)} = \frac{sRC}{s^2 R^2 C^2 + 3sRC + 1} :$$

$$U_2(s) = \frac{V_U^{(1)} (s^2 R^2 C^2 + 3sRC + 1)}{s^2 R^2 C^2 + sRC(3 - V_u^{(1)}) + 1} U_0(s) .$$

Die Nullstellen des Nenners sind gegeben durch

$$s_{1,2} = -\frac{3 - V_U^{(1)}}{2RC} \pm \left( \left( \frac{3 - V_U^{(1)}}{2RC} \right)^2 - \frac{1}{R^2 C^2} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

In Abhängigkeit von der Spannungsverstärkung  $V_U^{(1)}$ , die als reell und konstant vorausgesetzt wird, ergibt sich für

a)  $V_U^{(1)} \leq 1 :$

$$s_{1,2} = \sigma_{1,2} \quad \text{mit} \quad \sigma_1 < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_2 < 0,$$

b)  $1 \leq V_U^{(1)} < 3 :$

$$s_{1,2} = \sigma_0 \pm j\omega_0 \quad \text{mit} \quad \sigma_0 < 0,$$

c)  $V_U^{(1)} = 3 :$

$$s_{1,2} = \pm j\omega_0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC},$$

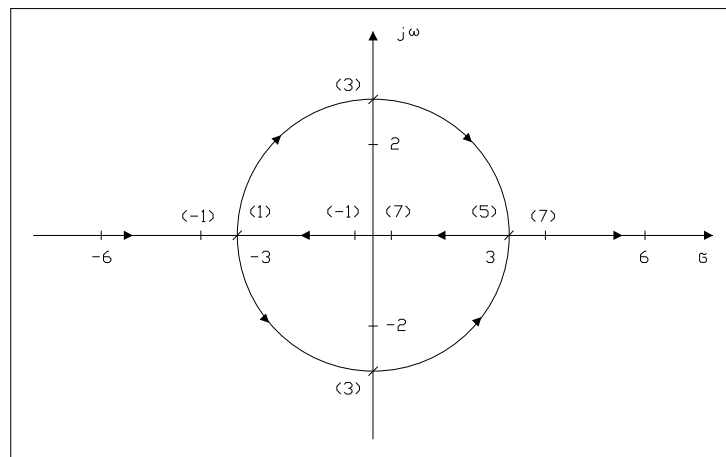
d)  $3 \leq V_U^{(1)} < 5 :$

$$s_{1,2} = \sigma_0 \pm j\omega_0 \quad \text{mit} \quad \sigma_0 > 0,$$

e)  $V_U^{(1)} \geq 5 :$

$$s_{1,2} = \sigma_{1,2} \quad \text{mit} \quad \sigma_1 > 0 \quad \text{und} \quad \sigma_2 > 0.$$

In der folgenden Abbildung ist das Wurzelort - Diagramm dargestellt; die eingeklammerten Zahlen sind die Werte für  $V_U^{(1)}$ .



Das Hurwitz-Kriterium ist ein algebraisches Kriterium. Es verwendet zur Stabilitätsbestimmung die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des Netzwerkes.

Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Hurwitz-Kriteriums ist daher, dass das charakteristische Polynom in einer für das Hurwitz-Kriterium ver-

wertbaren Form vorliegt. Daher eignet es sich nicht (oder nur eingeschränkt) für die Analyse von Netzwerken mit verteilten Parametern (Leitungen) oder mit Totzeit.

Oft liegt jedoch nur (speziell bei komplexen Netzwerken) das Simulationsergebnis einer Wirkungsfunktion des zu untersuchenden Netzwerkes mit  $s = j\omega$  vor. In diesem Fall kann das, im nächsten Kapitel beschriebene Nyquist-Kriterium angewendet werden.

## 7.6 Stabilitätsanalyse mit dem Nyquist-Kriterium

Das Nyquist-Kriterium sucht mit den Mitteln der komplexen Funktionentheorie nach Polen in der rechten Halbebene und gewinnt so direkt eine Aussage über die Stabilität des Netzwerkes.

Bedingung für die Stabilität eines Netzwerkes mit Polen einfacher Ordnung ist, dass dessen charakteristisches Polynom keine Nullstelle in der rechten Halbebene (RHE) der komplexen S-Ebene besitzt. Die RHE läßt sich mit

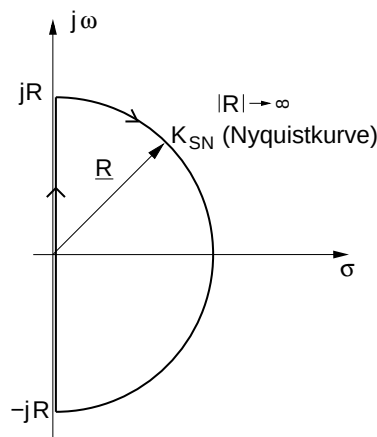


Abb. 7.13: Definition der Nyquist-Kurve  $K_{SN}$ , die sich für  $|R| \rightarrow \infty$  ergibt.

Hilfe der sog. Nyquist-Kurve nach Abb. (7.13) umschließen. Die Kurve beginnt bei  $j\omega = -jR$  verläuft auf der  $j\omega$ -Achse und beschreibt in der RHE einen Halbkreis, der bei  $-jR$  wieder mit Beginn der Kurve auf der negativen imaginären Achse zusammenfällt. Für  $|R| \rightarrow \infty$  umschließt  $K_{SN}$  die gesamte RHE.

Beachten: Bei dieser Definition der Nyquist-Kurve dürfen keine Pole auf der imaginären Achse (grenzstabiles Netzwerk) vorliegen, da dann die Kurve durch diese Punkte verlaufen würde, was zu Sprüngen bei der Auswertung der Phase der Bildfunktion führen würde. Auf die Vorgehensweise bei Polen auf der  $j\omega$ -Achse wird später eingegangen.

Die Formulierung „kein Pol in der RHE“ lässt sich also äquivalent mit „kein Pol im Inneren der Nyquist-Kurve“ formulieren.

Für die weitere Herleitung des Nyquist-Kriteriums wollen wir fordern, dass das charakteristische Polynom die Form

$$\underline{F}(s) = 1 + \underline{F}_a(s)\underline{F}_2(s) \quad (7.83)$$

besitzt.  $\underline{F}(s)$  ist damit identisch mit der Rückführungsdifferenz, also mit dem Nenner der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(s)$  einer rückgekoppelten Schaltung:

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{F}_a(s)}{1 + \underline{F}_a(s)\underline{F}_2(s)} = \frac{\underline{F}_a(s)}{\underline{F}(s)}. \quad (7.84)$$

Im Folgenden soll  $\underline{F}_a(s)$  keine Pole in der RHE oder auf der imaginären Achse besitzen, also stabil sein.<sup>29</sup>

Dann sind die Nullstellen von  $\underline{F}(s)$  die Pole der Übertragungsfunktion  $\underline{H}(s)$ . In diesem Fall müssen wir die Lage der Nullstellen von  $\underline{F}(s)$  bestimmen, um eine Aussage über die Stabilität von  $\underline{H}(s)$  machen zu können. Wir fragen also, ob eine Nullstelle von  $\underline{F}(s)$  im Inneren der Nyquist-Kurve liegt.

Bevor wir dies beantworten, betrachten wir noch die Struktur des Nenners von  $\underline{H}(s)$ . Wir nutzen dabei die Möglichkeit, die Übertragungsfunktion der offenen Schleife (Schleifenverstärkung)

$$\underline{F}_O(s) = \underline{F}_a(s) \cdot \underline{F}_2(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} \left( = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_J s^J}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_I s^I} \right) \quad (7.85)$$

als gebrochen rationale Funktion mit reellen Koeffizienten<sup>30</sup> darstellen zu

<sup>29</sup>Diese Annahme ist i.d. Praxis keineswegs a priori erfüllt und bedarf daher unbedingt der Überprüfung. Speziell die Stabilität mancher HF-Verstärker ist abhängig von deren Abschluss und muss zunächst sicher gestellt werden.

<sup>30</sup>Die Koeffizienten müssen reell sein, da der imaginäre Anteil ausschließlich in  $s = \sigma + j\omega$  enthalten ist.  $a_i, b_i$  bestehen somit aus Kombination von  $R, L, C, M$

können. Damit wird Gl. (7.83) zu:

$$\underline{F}(s) = 1 + \underline{F}_a(s)\underline{F}_2(s) = \frac{\underline{N}(s) + \underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{\underline{\tilde{Z}}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{K_Z \prod_{i=1}^I (s - s_{Z_i})}{K_N \prod_{i=1}^I (s - s_{N_i})} \quad (7.86)$$

Durch Einsetzen in Gl. (7.84) erkennt man, dass die Nullstellen  $s_{Z_i}$  von  $\underline{\tilde{Z}}(s)$  die Pole von  $\underline{H}(s)$ , der rückgekoppelten Schaltung darstellen. Die Nullstellen  $s_{N_i}$  des Nenners  $\underline{N}(s)$  sind die Pole der Übertragungsfunktion der offenen Rückkopplungsschleife.

Lassen wir  $s$  entlang der Nyquist-Kurve laufen und hat  $\underline{F}(s)$  eine Anzahl von  $N$  Nullstellen und  $P$  Pole im Inneren der Nyquist-Kurve, dann gilt nach Gl. (7.63) für die Anzahl der Umrundungen  $Q$ , die  $\underline{F}(s)$  um den Nullpunkt gegen den Uhrzeigersinn ausführt:

$$Q = P - N \quad (7.87)$$

Einfacher handhabbar ist das Kriterium, wenn anstelle der Rückführungsdifferenz  $\underline{F}(s)$  die Schleifenverstärkung

$$\underline{F}_O(s) = \underline{F}(s) - 1 = \underline{F}_a(s)\underline{F}_2(s) \quad (7.88)$$

betrachtet wird. D.h. anstelle des Nullpunktes werden die Umrundungen der Übertragungsfunktion der offenen Schleife  $\underline{F}_O(s) = \underline{F}_a(s)\underline{F}_2(s)$  um den Punkt  $-1 + j0$  betrachtet.

Die Bedingung für Stabilität in der Formulierung Gl. (7.87) lautet „Keine Nullstelle in der RHE“ oder:

$$0 \stackrel{!}{=} N = P - Q \quad (7.89)$$

Um das Nyquist-Stabilitätskriterium zu formulieren muss also zwischen einer stabilen ( $P = 0$ ) oder instabilen ( $P > 0$ ) Übertragungsfunktion der offenen Schleife unterschieden werden:

$P = 0, s : K_{SN}$  (s läuft auf der Nyquist-Kurve):

Eine rückgekoppelte Schaltung ist stabil, wenn und nur wenn die Ortskurve der Übertragungsfunktion der offenen Schleife  $\underline{F}_O(s) = \underline{F}_a(s)\underline{F}_2(s)$  keinen Umlauf um den Punkt  $-1 + j0$  hat und wenn  $\underline{F}_O(s)$  keinen Pol in der RHE

besitzt, d.h. wenn es keine instabilen Pole der Übertragungsfunktion der offenen Schleife gilt:

$$N = 0, P = 0 \Rightarrow Q = 0 \quad (7.90)$$

$P > 0, s : K_{SN}$ :

Eine rückgekoppelte Schaltung ist stabil, wenn und nur wenn die Anzahl der Umdrehungen, die die Ortskurve der Übertragungsfunktion der offenen Schleife  $\underline{F}_O(s)$  gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt  $-1 + j0$  macht gleich ist mit der Anzahl der Pole, die diese Übertragungsfunktion in der RHE besitzt, d.h. gleich ist der Anzahl der instabilen Pole der Übertragungsfunktion  $\underline{F}_O(s)$  der offenen Rückkopplungsschleife:

$$N = 0 \Rightarrow Q = P. \quad (7.91)$$

Das Nyquist-Kriterium in dieser Form läßt sich zwar bereits anwenden, ist aber aufgrund der Forderung, dass  $s$  einmal auf  $K_{SN}$  (vgl. Abb.(7.13) geschlossen umlaufen muss, für praktische Anwendungen (wegen  $|R| \rightarrow \infty$ ) meist schlecht handhabbar. Speziell bei einfachen Schaltungssimulationsprogrammen ist nur der, in Abb. (7.14) schraffierte Abschnitt  $0 \leq \omega \leq \omega_{max} < \infty$  der Nyquistkurve simulierbar.

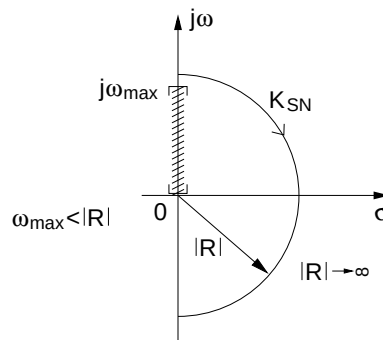


Abb. 7.14: Mit Schaltungssimulatoren läßt sich nur der schraffierte Abschnitt der Nyquist-Kurve simulieren.

Im folgenden soll gezeigt werden, dass die Kenntnis des Verlaufs der Ortskurve der Schleifenverstärkung  $\underline{F}_O(s)$  auf diesen Abschnitt ausreicht, um den Verlauf von  $\underline{F}_O(s)$  auf der gesamten Nyquist-Kurve  $K_{SN}$  zu konstruieren. Hierbei helfen die folgenden beiden Überlegungen:

1. Zähler und Nennerpolynom von Wirkungsfunktionen und damit auch die Schleifenverstärkung sind Polynome mit reellen Koeffizienten  $a_i, b_i$  (vgl. Gl. (7.85)). Dies ist einsichtig anhand der Überlegung, dass der einzige imaginäre Beitrag über den Anteil  $j\omega$  in  $s$  entsteht. So entstehen nur reelle Ausdrücke in  $s$  (z.B.  $sL, sC, sM, \dots$ ) und die Koeffizienten setzen sich aus Kombinationen von  $\{R, L, C, M\}$  zusammen. Diese Eigenschaft erweist sich als ungemein nützlich, da mit  $a_i \in \mathbb{R}$  und  $s^* = \Re\{s\} - j\Im\{s\}$  wegen

$$a_i (s^*)^i = a_i (s^i)^* = (a_i s^i)^* \quad (7.92)$$

und

$$(a_i s^i)^* + (a_j s^j)^* = (a_i s^i + a_j s^j)^* \quad (7.93)$$

für Zähler und Nennerpolynom der Schleifenverstärkung gilt:

$$\underline{Z}(s^*) = \underline{Z}^*(s) ; \underline{N}(s^*) = \underline{N}^*(s) \quad (7.94)$$

$$\Rightarrow \underline{F}_O(s^*) = \frac{\underline{Z}(s^*)}{\underline{N}(s^*)} = \frac{\underline{Z}^*(s)}{\underline{N}^*(s)} = \left( \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} \right)^* \quad (7.95)$$

$$\underline{F}_O(s^*) = \underline{F}_O^*(s) \quad \text{Schwarzsches Spiegelungsprinzip} \quad (7.96)$$

D.h. allgemein: Die Ortskurven von Wirkungsfunktionen verlaufen symmetrisch zur  $\sigma$ -Achse:

$$\Re\{\underline{F}_O(\sigma + j\omega)\} = \Re\{\underline{F}_O(\sigma - j\omega)\} \quad (7.97)$$

$$\Im\{\underline{F}_O(\sigma + j\omega)\} = -\Im\{\underline{F}_O(\sigma - j\omega)\} \quad (7.98)$$

Zur Konstruktion der Bildfunktion  $\underline{F}_O(s)$  für  $s$  auf  $K_{SN}$  genügt also die Betrachtung des ersten Quadranten der komplexen  $s$ -Ebene mit  $s = \sigma + j\omega : \sigma \geq 0, \omega \geq 0$ . Der fehlende Bereich der Nyquistkurve für  $\omega < 0$  ergibt sich wie in Abb. (7.15) gezeigt durch Spiegelung an der  $\sigma$ -Achse. Aus der Forderung nach Spiegelsymmetrie Gl. (7.98) ergibt sich insbesondere für  $\omega = 0$

$$\Im\{\underline{F}_O(\sigma + j0)\} = -\Im\{\underline{F}_O(\sigma - j0)\} \Leftrightarrow \Im\{\underline{F}_O(\sigma + j0)\} = 0 \quad (7.99)$$

D.h. die Ortskurven aller Wirkungsfunktionen beginnen bei  $\omega = 0$  auf der reellen Achse.

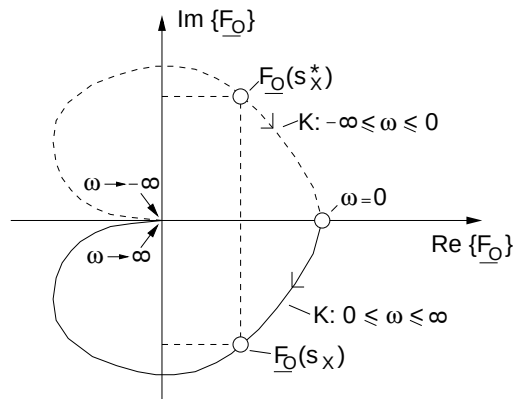


Abb. 7.15: Beispiel der Konstruktion der gesamten Ortskurve einer Schleifenverstärkung  $F_O(s)$  aus der Kenntnis des Verlaufs im Bereich  $0 \leq \omega < \infty$ .

2. Der Teil der Nyquist-Kurve, der den Halbkreis mit  $|\underline{R}| \rightarrow \infty$  beschreibt soll  $K_{SN\infty}$  heißen. Auf diesem Halbkreis gilt  $|s| = |\underline{R}| \Rightarrow \infty$ . Eine Wirkungsfunktion  $\underline{F}(s)$  im Bildbereich nimmt für diese unbeschränkt großen Werte auf  $K_{SN\infty}$  den Grenzwert:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \underline{F}(s) = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_J s^J}{b_0 + b_1 s + \dots + b_I s^I} = \begin{cases} \frac{a_J}{b_I}, & J=I, \\ 0, & J < I \end{cases} \quad (7.100)$$

an. Mit Gl. (7.100) ergibt sich folgende Argumentation:

- (I):  $\underline{F}(s)$  ist konstant und beschränkt für  $s$  auf der gesamten Halbkreisurve  $K_{SN\infty}$  und nimmt die Werte an

$$\underline{F}(s)|_{s:K_{SN\infty}} = \begin{cases} \frac{a_J}{b_I}, & J=I, \\ 0, & J < I. \end{cases}$$

- (II): Da  $\underline{F}(s)$  wegen (I) auf  $K_{SN\infty}$  konstant ist, erfährt  $\underline{F}(s)$  auch keine Drehung um den Punkt  $(-1+j0)$  wenn  $s$  auf  $K_{SN\infty}$  läuft.
- (III): In realen Schaltungen existieren nur Pole und Nullstellen mit endlichen Werten, die von den gegebenen physikalischen Parametern bestimmt werden. Oberhalb von

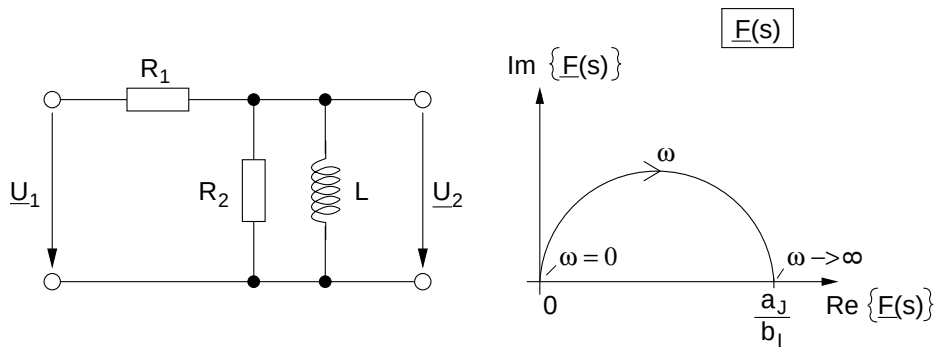
$$\omega_{max} = \max \{ \Im \{s_{Zi}\}, \Im \{s_{Ni}\} \}, \quad (7.101)$$



der Nullstelle oder des Poles mit der größten Kreisfrequenz wird keine neue Drehung von  $\underline{F}(s)$  um den Punkt  $(-1+j0)$  erfolgen, sondern nur noch bereits begonnene Umrundungen abgeschlossen werden. Der Endpunkt dieses Abschlusses wird durch (I) bestimmt.

Für die praktische Vorgehensweise bedeutet dies, dass  $\underline{F}(s)$  nicht zu unendlich hohen Frequenzen, sondern nur bis zu einer genügend großen Frequenz ermittelt werden muss, für die gilt:  $\omega_{max} < \omega < \omega_{\infty} \rightarrow \infty$ . Der Endpunkt für  $\omega_{\infty}$  lässt sich mit (I) bestimmen und liegt auf der reellen Achse.

Als **einfaches** Beispiel für Gl. (7.100) kann die Übertragungsfunktion eines einfachen RL-Hochpasses betrachtet werden:



$$\underline{F}(s) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{s \frac{L}{R_1}}{1 + s \frac{L}{R_1 || R_2}} \Rightarrow \frac{a_J}{b_I} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{\frac{L}{R_1}}{\frac{L}{R_1 || R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (7.102)$$

Zur Übung sollte überlegt werden, welches Ergebniss sich für  $R_2 \rightarrow \infty$  oder Austausch der Induktivitäten durch Kapazitäten ergibt.

Nachfolgend ist nocheinmal die Vorgehensweise bei Anwendung des Nyquist-Kriteriums auf die Schleifenverstärkung  $\underline{F}_O(s)$  zusammengefasst:

1. Simulation, Konstruktion oder Berechnung der Ortskurve (OK) der Bildfunktion  $\underline{F}_O(s) = \underline{F}_O(j\omega)$  im Frequenzbereich nach Überlegung (III):

$$0 \leq \omega < \omega_{\infty}.$$

2. Bestimmung des Endwertes für  $\omega \rightarrow \infty$  nach Überlegung (I):

$$\underline{F}_O(j\omega_\infty) = \begin{cases} \frac{a_I}{b_I}, & J=I, \\ 0, & J<I. \end{cases}$$

3. Der Verlauf für  $\omega > 0$  ergibt sich aufgrund des Schwarzschen Spiegelungsprinzips durch Spiegelung der Ortskurve an der reellen Achse (oft nicht nötig, da bereits aus der Betrachtung der Ortskurve für  $\omega > 0$  die Anzahl der Umdrehungen ersichtlich).
4. Anwendung des Stabilitätssatzes nach Gl. (7.90) oder ggf. Gl. (7.91).

Der Vorteil dieser Anwendung des Nyquist-Kriteriums ist, dass zur Bestimmung der Stabilität nur die leicht zu ermittelnde Ortskurve der Schleifenverstärkung für komplexe Frequenzen auf der positiven imaginären Achse betrachtet werden muss.

**Anwendungsbeispiel** (Verstärker mit SP-Kopplung)

Für den dargestellten Verstärker mit einem frequenzabhängigen Rückkopplungsnetzwerk läßt sich die Schleifenverstärkung wie folgt ermitteln:

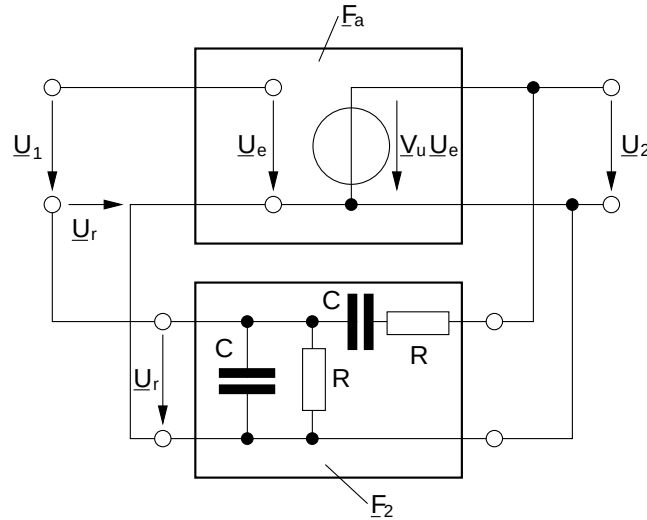


Abb. 7.16: Verstärker mit SP-Rückkopplung über frequenzabhängiges Netzwerk in  $\underline{F}_2$ .

$$\underline{U}_2 \underline{F}_2 = \underline{U}_r, \quad \underline{U}_2 = \underline{F}_a (\underline{U}_1 + \underline{U}_r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{F}_a}{1 - \underline{F}_a \underline{F}_2}$$

$$\underline{F}_a = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = V_u \in \mathbb{R} \quad (7.103)$$

$$\underline{Z}_{C||R} = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = RC \quad (7.104)$$

$$\underline{F}_2 = \frac{\underline{Z}_{C||R}}{R + \frac{1}{j\omega C} + \underline{Z}_{C||R}} = \frac{R}{(1 + j\omega\tau)(1 + j\omega\tau) \frac{1}{j\omega\tau} + R} \quad (7.105)$$

$$\underline{F}_2 = \frac{j\omega\tau}{(1 + j\omega\tau)^2 + j\omega\tau} \quad (7.106)$$

Vgl. mit Gl. (7.83) und (7.88) liefert die Definition:

$$\underline{F}_O = -\underline{F}_a \underline{F}_2 = \frac{-V_u(j\omega\tau)}{1 + 3j\omega\tau + (j\omega\tau)^2} \quad (7.107)$$

---

Schritt 1) Konstruktion der OK von  $\underline{F}_O(j\omega)|_{0 < \omega < \infty}$

$$\frac{F_O}{F_I} = \frac{-V_U}{3 + j\omega\tau + \frac{1}{j\omega\tau}} = \frac{-V_U}{3 + j(\omega\tau - \frac{1}{\omega\tau})} = \frac{-V_U}{u + jv} \quad (7.108)$$
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad a = 0. \quad (7.109)$$

Nyquist plot of the transfer function  $G(s) = \frac{3}{s(s+1)}$  in the complex plane. The horizontal axis is the real part ( $u$ ) and the vertical axis is the imaginary part ( $jv$ ). The plot shows a curve starting at  $(3, 0)$  on the real axis, passing through the point  $(1.5, -1.5)$  at  $\omega = 1$ , and approaching the origin from the third quadrant as  $\omega$  increases. A dashed line is drawn at  $u = 3$ .

| $\omega$          | $\omega\tau - \frac{1}{\omega\tau}$ |
|-------------------|-------------------------------------|
| 0                 | $-\infty$                           |
| $+\frac{1}{\tau}$ | 0                                   |
| $\infty$          | $+\infty$                           |

Für  $0 \leq \omega < \infty$  durchläuft die Bildfunktion den gesamten Bereich von  $-\infty \dots \infty$ . Aufgrund der Symmetrie zur reellen Achse wird der gesamte Bereich für negative  $\omega$  nochmals durchlaufen.

c) Inversion von  $u + jv$ : Hierzu dienen einige wichtige Sätze für Abbildungen im Komplexen:

- (i) Für gebrochen lineare Abbildungen der Form nach Gl. (7.109) gilt: Kreise werden auf Kreise abgebildet. Geraden sind Kreise im Unendlichen.
- (ii) Konstruktion einer Inversion erfolgt mit Hilfe einiger ausgezeichnete Punkte und den auf der Beziehung

$$\frac{1}{u + jv} = \frac{1}{|Z|e^{j\varphi}} = \frac{1}{|Z|}e^{-j\varphi}$$

basierenden Hilfssätzen.

- (1) Winkel werden bei der Inversion an der reellen Achse gespiegelt  $\varphi \rightarrow -\varphi$ .
- (2) Der längste Zeiger der Originalfunktion wird zum kürzesten Zeiger der gespiegelten Funktion und umgekehrt.
- (3) Geraden werden durch Inversion zu Kreisen (bzw. Kreissegmenten). Dies folgt aus (i). Beweis im Anhang.

Durch die Anwendung dieser Sätze gelangt man zur Konstruktion des Kreises  $\frac{1}{u+jv}$  in der RHE der Bildfunktion in Abb. 7.18

d) Multiplikation mit  $-V_u$  (vgl. Gl. (7.108)). Beispiel-Kurven für  $V_u = \{2, 3, 6\}$  in Abb. 7.18 eingezeichnet.

#### Schritt 2)

Der Endwert für  $\omega \rightarrow \infty$  ist einfach zu bestimmen, da er sich als Inversion des längsten Zeigers auf der Geraden bei  $\varphi = 90^\circ$  ergibt. Für  $\omega \rightarrow \infty$  läuft daher  $\underline{F}_O$  im Uhrzeigersinn auf der OK in den Nullpunkt:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \underline{F}_O(s) = \frac{jV_u}{\omega\tau}$$

(vgl. Gl. (7.108)).

### Schritt 3)

Da die Gerade  $u+jv$  zweimal durchlaufen wird, (Geraden schließen sich als Kreis mit  $R = \infty$  im Unendlichen) wird auch der Kreis der OK zweimal stetig durchlaufen.

### Schritt 4)

$F_0$  hat keine instabile Pole ( $P = 0$ ), da das Netzwerk für  $\underline{F}_2(s)$  passiv und  $V_u = \text{const} \in \mathbb{R}$ .

$\Rightarrow$  Die OK der Schleifenverstärkung umläuft für  $V_u > 3$  den Punkt  $-1+j0$ : d.h. für  $V_u > 3$  wird die rückgekoppelte Schaltung instabil!

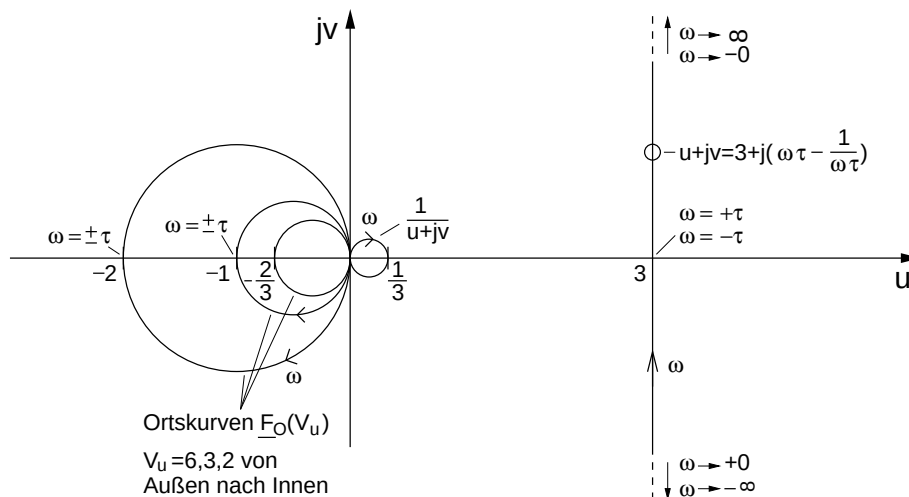


Abb. 7.18: Konstruktion der Ortskurve nach Glg.(7.108): 1)

Geradengleichung  $u + jv$ . 2) Inversion von  $u + jv$ . 3) Skalierung mit  $-V_u$ .

## 7.7 Pole auf der imaginären Achse

Bei der Definition der Nyquist-Kurve auf S. 143 haben wir vorausgesetzt, daß die betrachtete Wirkungsfunktion (hier insbesondere die rückgekoppelte Schaltung mit  $\underline{H}(s)$  nach Gl. (7.84)) keine Pole und Nullstellen auf der imaginären Achse besitzt. Speziell bei der Rechnung oder Simulation mit idealen, verlustlosen Bauelementen können diese jedoch auf der imaginären Achse auftreten (vgl. z. B. Fostersche Reaktanzsätze).

Wir wollen daher zunächst untersuchen, welche Wirkung ein Pol oder eine Nullstelle auf die Ortskurve der Bildfunktion besitzt. Ziel ist, anhand einer charakteristischen Eigenschaft im Verlauf der Ortskurve auf das Vorhanden-

sein eines Pols oder einer Nullstelle auf der imaginären Achse schließen zu können. Dies ist insbesondere dann von Vorteil, wenn die Ortskurve bereits als Ergebnis z. B. einer Computersimulation vorliegt.

Wir betrachten zur allgemeinen Herleitung der Charakteristika eine beliebige Wirkungsfunktion  $\underline{H}(s)$ , die einen konjugiert komplexen Pol  $\omega_p$  und eine konjugiert komplexe Nullstelle  $\omega_n \neq \omega_p$  aufweist, die aus dem Zähler- bzw. Nennerpolynom herausgezogen werden:

$$\begin{aligned} \underline{H}(s) &= \frac{\underline{H}_Z(s)}{\underline{H}_N(s)} = \frac{(\omega^2 - \omega_n^2)\tilde{\underline{H}}_Z(s)}{(\omega^2 - \omega_p^2)\tilde{\underline{H}}_N(s)} \\ &= \frac{(j\omega_n - j\omega)(j\omega_n + j\omega)\tilde{\underline{H}}_Z(s)}{(j\omega_p - j\omega)(j\omega_p + j\omega)\tilde{\underline{H}}_N(s)} \end{aligned} \quad (7.110)$$

mit  $\omega_n, \omega_p > 0, \omega_n \neq \omega_p$ .

Für die später folgenden Betrachtungen, repräsentiert  $\underline{H}(s)$  z.B. die Rückführungsdifferenz  $\underline{F}(s)$  in Gl. (7.86). Betrachten wir einen der herausgezogenen Produktterme genauer. Als Beispiel nehmen wir den Pol bei  $\omega = \omega_p$  ( $\omega_p > 0$ ). Wir können schreiben:

$$\frac{1}{j\omega_p - j\omega} = \frac{1}{|\omega_p - \omega|} e^{j\frac{\pi}{2} \text{sign}(\omega_p - \omega)}, \quad (7.111)$$

d.h. der Winkel springt von  $-\frac{\pi}{2}$  auf  $+\frac{\pi}{2}$  wenn  $\omega$  durch den Pol bei  $\omega_p$  auf der positiven imaginären Achse in Richtung wachsendem  $\omega$  läuft. Dieser Weg von  $s = j\omega$  stimmt mit dem Weg auf der Nyquist-Kurve überein.

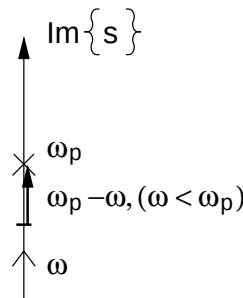


Abb. 7.19: Grafische Interpretation des Produktterms  $(\omega_p - \omega)$  bei Durchlaufen eines Pols  $\omega_p$  auf der imaginären Achse.

Für die Bildfunktion  $\underline{H}(s)$  ergibt sich aufgrund des Sprungs kein eindeutig

definierter und stetiger Verlauf der Ortskurve bei Durchgang durch  $\omega_p$ . Wir wählen daher, wie in Abb. 7.20 links gezeigt, eine halbkreisförmige Umfahrung des Pols mit einem Radius  $\epsilon$  über die rechte Halbebene, d. h. der Pol auf der imaginären Achse befindet sich außerhalb der Nyquist-Kurve.

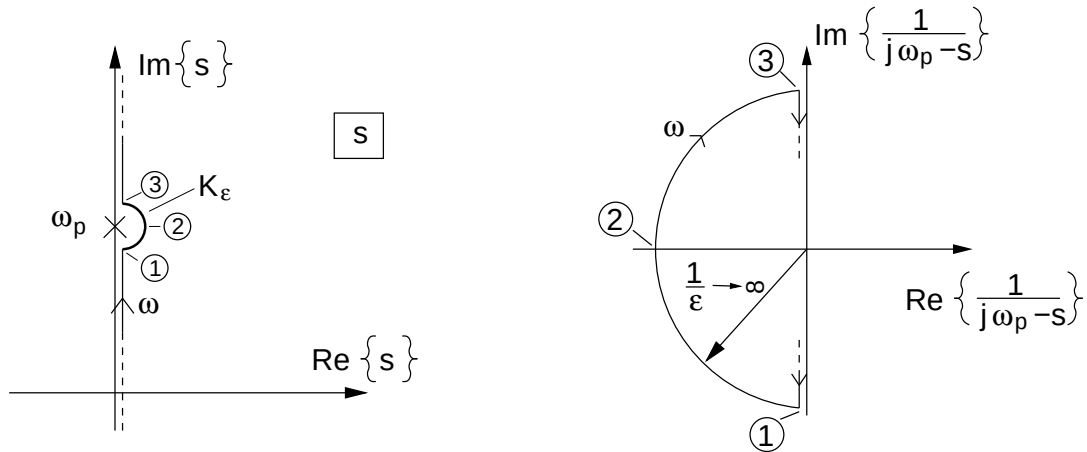


Abb. 7.20: Links: Umlaufen eines Pols  $\omega_p > 0$  auf der imaginären Achse mittels der Halbkreis-Kurve  $K_\epsilon$ . Rechts: Die zu  $K_\epsilon$  gehörende Ortskurve im Bildbereich für einen Pol bei  $\omega_p$ .

Die Gleichung für  $s$  auf der Halbkreis-Kurve  $K_\epsilon$  von (1) bis (3) um  $\omega_p$  lautet:

$$\begin{aligned} s &= j\omega_p + \epsilon e^{j\varphi} \\ \varphi &= -\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (7.112)$$

und es gilt

$$\varphi_{(1)} = -\frac{\pi}{2}, \varphi_{(2)} = 0, \varphi_{(3)} = \frac{\pi}{2} \quad (7.113)$$

Für den Produktterm in Gl.(7.111) ergibt sich im Bildbereich mit  $s$  nach Gl. (7.112) und infinitesimalem Radius  $\epsilon$  um den Pol:

$$\frac{1}{j\omega_p - s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{j\omega_p - (j\omega_p + \epsilon e^{j\varphi})} = e^{-j(\pi + \varphi)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \quad (7.114)$$

Dabei nimmt der Winkel  $-(\pi + \varphi)$  in den drei ausgezeichneten Punkten von  $K_E$  die Werte an:

$$-(\pi + \varphi) = \begin{cases} -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} & \text{in Punkt(1)} \\ -\pi + 0 = -\pi & \text{in Punkt(2)} \\ -\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} & \text{in Punkt(3).} \end{cases}$$



D. h. läuft  $s$  auf der modifizierten Nyquist-Kurve mit der halbkreisförmigen Umfahrung  $K_\epsilon$  mit dem Radius  $\epsilon \rightarrow 0$  um den Pol  $\omega_p$ , so beschreibt, wie in Abb.(7.20) gezeigt, der zugehörige Produktterm im Bildbereich einen Halbkreis mit unendlich großem Radius ( $\frac{1}{\epsilon} \rightarrow \infty$ ), der die gesamte linke Halbebene im Uhrzeigersinn umschließt.

Analog läßt sich zeigen, daß der konjugierte Pol bei  $-j\omega_p$  bei gleicher Umfahrung einen Produktterm

$$\frac{1}{j\omega_p + s} = e^{-j\varphi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \quad (7.115)$$

im Bildbereich hat Dabei nimmt  $-\varphi$  die Werte  $\frac{\pi}{2}$ ,  $0$ ,  $-\frac{\pi}{2}$  in den Punkten (1), (2), (3) an.

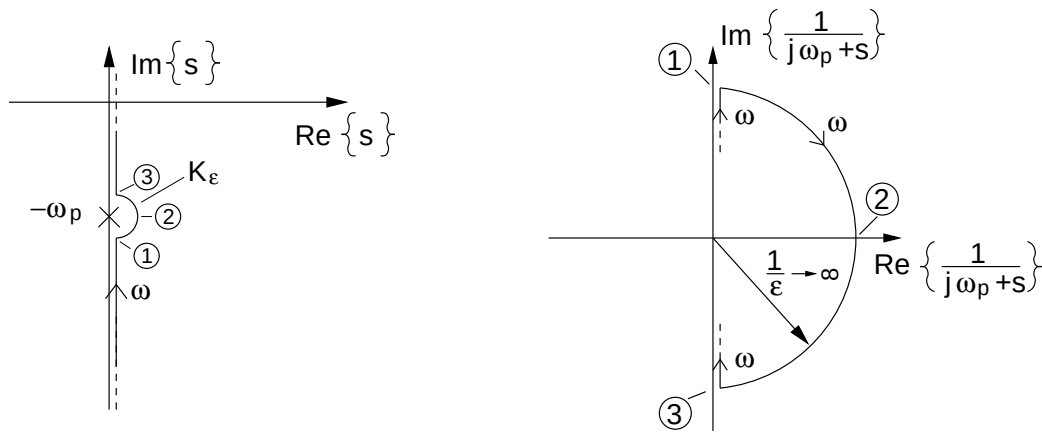


Abb. 7.21: Links: Umlaufen eines Pols  $\omega_p < 0$  auf der imaginären Achse mittels der Halbkreis Kurve  $K_\epsilon$ . Rechts: Die zu  $K_\epsilon$  gehörende Ortskurve im Bildbereich für einen Pol bei  $\omega_p$ .

D. h. der negative Pol auf der imaginären Achse besitzt einen Produktterm, der, wie in Abb.(7.21) die gesamte rechte Halbebene im Uhrzeigersinn umschließt, wenn  $s$  auf der definierten Halbkreis Kurve  $K_\epsilon$  fährt.

Für Nullstellen auf der imaginären Achse gelten die gleichen Überlegungen zur Herleitung wie bei den Polen:

Nullstellen bei  $\pm\omega_n$ . Es gilt auf der Halbkreis Kurve  $K_\epsilon$  mit  $\varphi = -\frac{\pi}{2} \dots + \frac{\pi}{2}$

$$(j\omega_n - s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (j\omega_n - (j\omega_n + \epsilon e^{j\varphi})) = e^{j(\pi+\varphi)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \quad (7.116)$$

$$(j\omega_n + s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (j\omega_n + (-j\omega_n + \epsilon e^{j\varphi})) = e^{j\varphi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \quad (7.117)$$

D. h. bei Umfahrung der Nullstellen auf den Halbkreiscurven  $K_\epsilon$  dreht, wie in Abb.(7.22) gezeigt, die Phase des Produktterms im Bildbereich bei jeder Nullstelle um  $\pi$  gegen den Uhrzeigersinn.

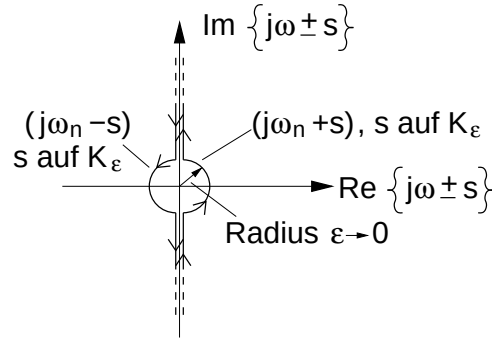


Abb. 7.22: Verlauf der Ortskurve der Produktterme einer konjugiert komplexen Nullstelle für  $s$  auf der Halbkreiscurve  $K_\epsilon$ .

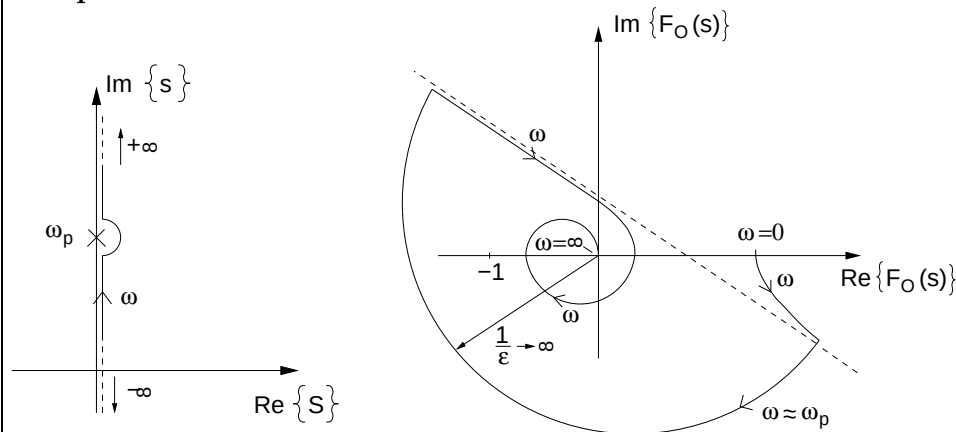
Da der Radius der Halbkreiscurve  $K_\epsilon$  im Bildbereich gegen Null geht, ist der Bildfunktion in der Nullstelle und deren infinitesimaler Umgebung eindeutig nur ein Punkt der komplexen Ebene zugeordnet. Anders als bei Polen verläuft die Ortskurve eines Produkttermes bei dem Durchgang durch die Nullstelle stetig durch einen Punkt  $(0 + j0)$ . Bei Bewertung der Stabilität einer Schaltung mit Hilfe der Schleifenverstärkung  $\underline{F}_O(s)$  können daher die Nullstellen von  $\underline{F}_O(s)$  unbeachtet bleiben, da sie sich stetig in den zu bewertenden Verlauf der Ortskurve von  $\underline{F}_O(s)$  einfügen.

Geht  $\underline{F}_O(s)$  durch den Punkt  $-1 + j0$ , so entspricht das einer Nullstelle des charakteristischen Polynoms (Pol der Übertragungsfunktion). Die Vorgehensweise kann dann entsprechend der Vorgehensweise beim Vorliegen von Polen erfolgen. In der Regel ist dies von geringerer praktischer Bedeutung, da das Ziel der Untersuchungen ist, die Ortskurve links (Oszillator) oder rechts (stabile Schaltung) von  $-1 + j0$  zu verschieben.

**Anmerkung zu Polen auf der imaginären Achse:** Meist liegt die Ortskurve der Schleifenverstärkung  $\underline{F}_O(s)$  nur für  $\omega \geq 0$  vor. Besitzt  $\underline{F}_O(s)$  bei  $\omega_p$  einen Pol, so wird der Verlauf der Ortskurve von  $\underline{F}_O(s)$  bei Annäherung von  $\omega$  an  $\omega_p$  von kleineren  $\omega$  her (Nyquist-Kurve) gegen  $\infty$  streben. Wird  $\omega > \omega_p$ , so kehrt die Ortskurve wieder aus dem Unendlichen zurück, besitzt jedoch gegenüber der Phase beim Übergang nach  $\infty$  eine Drehung um  $\pi$ . Wird für den Pol in der  $s$ -Ebene eine Umfahrung auf der

Halbkreis  $K_\epsilon$  gewählt, so kann der Weg im Unendlichen durch einen Halbkreis mit unendlich großem Radius, der sich im Uhrzeigersinn schließt, vervollständigt werden.

### Beispiel:



Aufgrund des gewählten Weges  $K_\epsilon$  in der  $s$ -Ebene gilt  $Q = -2$  (Pole bei  $\pm\omega_p$ )  $\Rightarrow$  wegen  $N = P - Q = P + 2 \geq 2$  ist die Schaltung instabil. Für eine Umfahrung von  $\omega_p$  mit einem Halbkreis auf der linken Seite gilt  $Q = 0$ ,  $P \geq 2$  (Pole bei  $\pm\omega_p$  und sonstige Pole von  $\underline{F}_O(s)$ )  $\Rightarrow N \geq 2 - 0 \Rightarrow$  gleiches Ergebnis: instabil.)

## 7.8 Vorgehensweise bei Polen auf der imaginären Achse in komplexen Netzwerken bei Computersimulation

Liegt ein komplexes Netzwerk vor, dessen Ortskurve des charakteristischen Polynoms aufgrund der Komplexität nur durch Simulation ermittelt werden kann, und sind in diesem Netzwerk ideale LCM-Bauelemente verwendet, deren Reaktanzen zu Polen bzw. Nullstellen auf der imaginären Achse geführt haben, so bietet sich die folgende einfache Möglichkeit an:

Durch Reihen-Parallel-schaltung eines für die Funktion und Qualität der Schaltung vernachlässigbar kleinen Widerstandes zu den idealen Induktivitäten Kapazitäten

rücken die Pole auf der imaginären Achse hinreichend weit in die linke Halbebene, um den Verlauf der Wirkungsfunktion mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums analysieren zu können.

Diese Vorgehensweise ist ohnehin a priori für jede Simulation zu empfehlen, da hierdurch induktive Schleifen vermieden, die Konvergenz verbessert und numerische Oszillation vermieden werden.

### **Beispiel zur Umfahrung von Polen mit $K_\epsilon$ :**

Liegt die Wirkungsfunktion in analytischer Form vor und sind die Pole (und Nullstellen) bekannt, kann der Verlauf der Nyquist-Kurve um diese Punkte herum geführt werden. Die Vorgehensweise wurde auf S. 156ff. gezeigt und soll an einem Beispiel demonstriert werden:

Gegeben sei die folgende rückgekoppelte Schaltung, deren Verstärker-Zweitor einen als Integrator beschalteten idealen Operationsverstärker enthalten soll. Die Rückkopplung erfolgt durch einen Tiefpaß erster Ordnung:

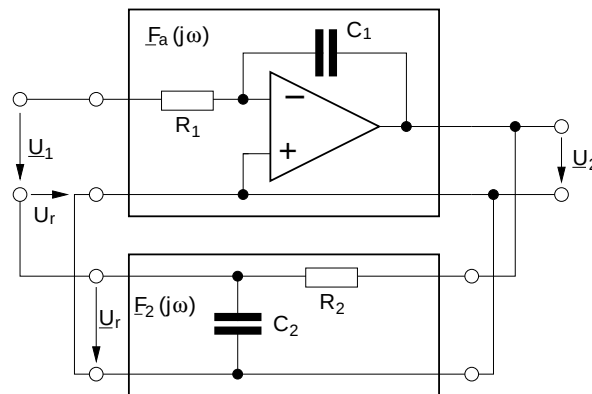


Abb. 7.23: Beispielschaltung zur Stabilitätsuntersuchung.

Mit idealem OP gilt:

$$\frac{U_1}{R_1} = U_2 j\omega C, R_1 C_1 = \frac{1}{\omega_1} \Rightarrow F_a = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\omega_1}{j\omega} \quad (7.118)$$

$$F_2 = \frac{U_r}{U_2} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_2}}, \quad R_2 C_2 = \frac{1}{\omega_2} \quad (7.119)$$

Mit der Normierung  $\Omega := \frac{\omega}{\omega_2}$  gilt dann für die Schleifenverstärkung

$$\underline{F}_O = \underline{F}_a \underline{F}_2 = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_1} \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)} = \frac{1}{j \frac{\omega_2}{\omega_1} \Omega (1 + j\Omega)} \quad (7.120)$$

Weitere Umformung nach Real- und Imaginärteil um  $\underline{F}_O$  in ausgezeichneten Punkten ( $\Omega = \pm\infty, 0$ ) bestimmen zu können

$$\underline{F}_O = \frac{1-j\Omega}{j \frac{\omega_2}{\omega_1} \Omega (1+\Omega^2)} = \frac{-\omega_1}{\omega_2 (1+\Omega^2)} - j \frac{\omega_1}{\omega_2 \Omega (1+\Omega^2)} \quad (7.121)$$

(Für Endwertbestimmung  $\Omega \rightarrow \pm\infty$ )

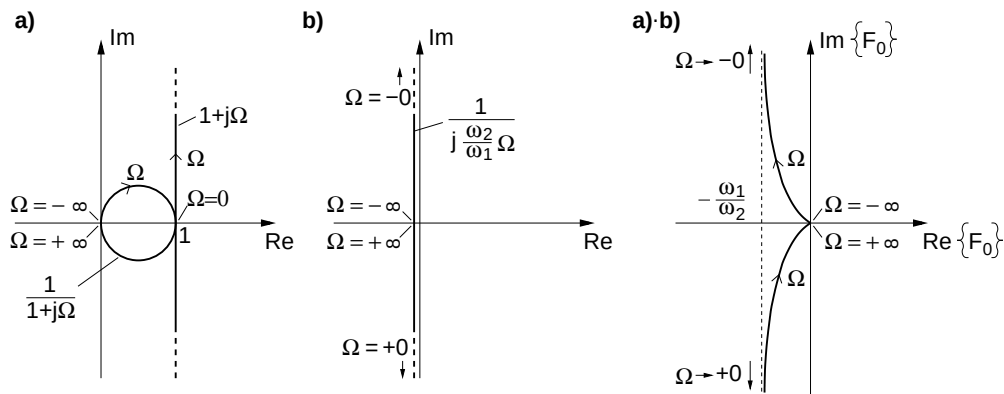


Abb. 7.24: Konstruktion der Ortskurve der Schleifenverstärkung anhand Gl.(7.120). Der Verlauf für  $\Omega \rightarrow \pm 0$  in der rechten Abb. a)· b) ergibt sich aus Gl. (7.121) .

Anhand der konstruierten Ortskurve (siehe Abb. 7.24) läßt sich erkennen, daß aufgrund des unbestimmten Verlaufs bei  $\Omega \rightarrow \pm 0$  keine Aussagen über die Stabilität gemacht werden können, da unklar ist, auf welchem Weg sich die Ortskurve von  $\Omega = -0$  nach  $\Omega = +0$  schließt.

Daher wird der Weg der Nyquistkurve im Nullpunkt so modifiziert, daß er in infinitesimalem Abstand den Pol in einem Halbkreis umfährt anstelle durch ihn hindurchzulaufen. Der Halbkreis in Abb. 7.25

$$s = \epsilon e^{j\varphi}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2} \quad (7.122)$$

besitzt in den markanten Punkten nach Abb. 7.25 die Winkel:

$$\varphi_{(1)} = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi_{(2)} = 0 \quad \varphi_{(3)} = +\frac{\pi}{2} \quad (7.123)$$

Die Schleifenverstärkung mit der komplexen Frequenz (Gl. (7.121):  $j\omega \rightarrow s$ ) lautet auf dem Halbkreis bei  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$F_O(s) = \frac{\omega_1 \omega_2}{s(s + \omega_2)} \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_O(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_1 \omega_2}{\epsilon e^{j\varphi} (\epsilon e^{j\varphi} + \omega_2)} \quad (7.124)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_O(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_1}{\epsilon e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_1}{\epsilon} \quad (7.125)$$

Damit beschreibt  $F_O(s)$  einen Halbkreis mit unendlich großem Radius, der von (1) nach (3) im Uhrzeigersinn die rechte Halbebene umfährt. Die Ortskurve von  $F_O(s)$  läßt sich damit, wie in Abb.(7.25) rechts vervollständigen.

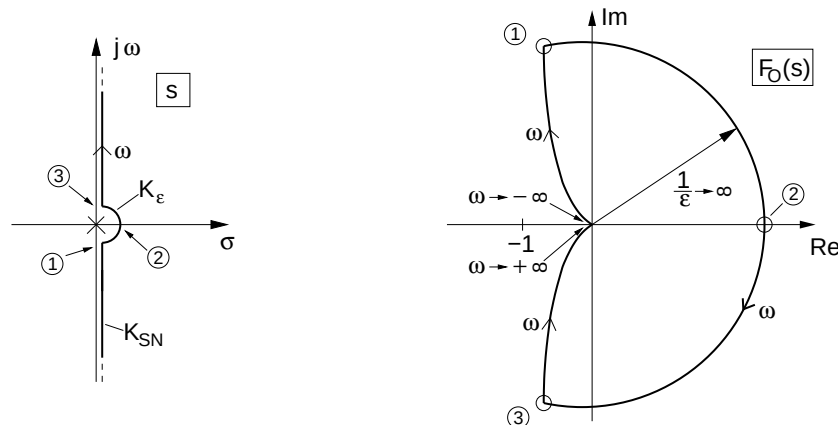


Abb. 7.25: Links: Umfahrung des Pols im Nullpunkt auf  $K_\epsilon$ . Rechts: Ortskurve der Schleifenverstärkung mit Halbkreis von (1) nach (3) aufgrund des Verlaufs von  $s$  auf  $K_\epsilon$ .

Beurteilung der Stabilität mit dem Nyquistkriterium (vgl. S. 146):

1. Da  $\omega_2 > 0$  hat  $F_O(s)$  keine Pole in der rechten Halbebene  $\Rightarrow P = 0$ .
2. Auf der gewählten, modifizierten Nyquist-Kurve ergibt sich kein Umlauf um  $-1+j0$ .
3. Wegen 1) und 2) ist die Schaltung stabil.

**Beachten:** Wir haben willkürlich den Pol bei  $s = 0$  mit einem rechten Halbkreis umfahren. Aber auch der Weg der Nyquistkurve auf einem linken Halbkreis liefert das richtige Ergebnis: Für den linken Halbkreis in der  $s$ -Ebene um  $s = 0$  ergibt sich analog zu den zuvor eingestellten Überlegungen ein Halbkreis mit Radius  $\frac{1}{\epsilon} \rightarrow \infty$ , der die gesamte linke Halbebene umschließt. Daher wird der Punkt  $-1 + j0$  einmal gegen den Uhrzeigersinn umlaufen und es gilt mit  $Q = 1$ :

$$N = P - Q = P - 1. \quad (7.126)$$

Da durch den linken Halbkreis nun auch der Pol bei  $s=0$  im Inneren der Nyquist-Kurve liegt, gilt jetzt  $P = 1$  und aus Gl. (7.126) folgt  $N = 0$ , d. h. das charakteristische Polynom  $1 + F_O(s)$  hat keine Nullstelle in der rechten Halbebene  $\Rightarrow$  Die Schaltung ist stabil!

## 7.9 Das Nyquist-Kriterium in der Frequenzkennlinien-Darstellung

Abschließend soll noch das Nyquist-Kriterium auf die sehr gebräuchliche Darstellung von Frequenz- und Phasengang übertragen werden. Die Anwendung des Nyquist-Kriteriums in dieser Form ist Standard bei der Stabilitätsanalyse. Frequenz und Phasengang der offenen Schleife  $\underline{F}_O(j\omega)$  liegen hierfür entweder als Simulationsergebnis vor oder werden in Form eines Bode-Diagramms aus der analytischen Darstellung der Schleifenverstärkung gewonnen.

Als Vorüberlegung betrachten wir zwei Beispiele einer Ortskurve von  $\underline{F}_O(j\omega)$  in Abb. 7.26.

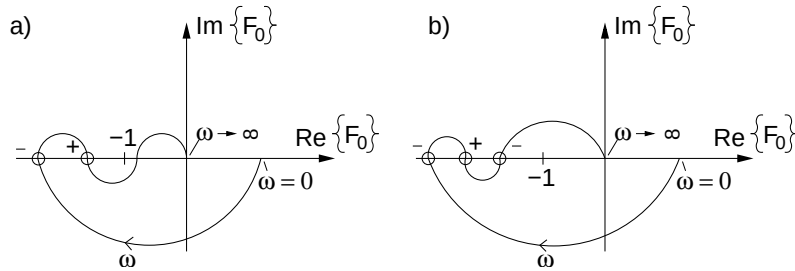


Abb. 7.26: Beispielverläufe der Schleifenverstärkung für den Bereich der Nyquist-Kurve  $0 \leq \omega \leq \infty$ . Die Anzahl der Umrundungen auf der gesamten Nyquist-Kurve ist doppelt so hoch. Links: Keine Umrundung des Punktes  $-1 + j0$ . Es gilt:  $\frac{1}{2}Q = 0$ ,  $\frac{1}{2}S^- = 1$ ,  $\frac{1}{2}S^+ = 1$ . Rechts: Eine Umrundung des Punktes. Es gilt  $\frac{1}{2}Q = 1$ ,  $\frac{1}{2}S^- = 2$ ,  $\frac{1}{2}S^+ = 1$

Wir definieren  $S^-$  als die Anzahl der Übergänge der Ortskurve für  $-j\infty < j\omega < +j\infty$  vom 3. in den 2. Quadranten im Achsenabschnitt  $\text{Re}\{F_0(j\omega)\} < -1$ . Entsprechend bezeichnet  $S^+$  die Anzahl der Übergänge der Ortskurve von  $F_0(j\omega)$  vom 2. in den 3. Quadranten im gleichen Achsenabschnitt, ebenfalls für  $-j\infty < j\omega < +j\infty$ . Damit der Punkt  $-1$  umrundet wird, muß offensichtlich gelten:  $S^- - S^+ \neq 0$  (vgl. Abb. 7.26). Für die Anzahl  $Q$  der Umrundungen<sup>31</sup> für  $-j\infty < j\omega < +j\infty$  gilt

$$Q = S^+ - S^- \quad \text{Vorzeichen beachten!} \quad (7.127)$$

Anhand dieser Überlegungen läßt sich das auf S. 146 für die Anzahl der Umrundungen des Punktes  $-1 + j0$  formulierte Nyquist-Kriterium in äquivalenter Form für die Schnittpunkte der Ortskurve der Schleifenverstärkung mit dem Abschnitt der reellen Achse links des Punktes  $-1 + j0$  formulieren. Da für eine stabile rückgekoppelte Schaltung die Anzahl der Umrundung gleich der Anzahl der instabilen Pole der Schleifenverstärkung sein muß, gilt allgemein

$$Q = S^+ - S^- = P. \quad (7.128)$$

Für eine stabile Schleife ( $P = 0$ ) gilt entsprechend

$$Q = S^+ - S^- = 0. \quad (7.129)$$

<sup>31</sup>Wir erinnern uns, daß die Richtung der Umrundung mathematisch positiv definiert ist.



Diese Formulierung des Nyquist-Kriteriums läßt sich einfach auf die Darstellungen des Frequenz- und Phasengangs übertragen.

Der Frequenzgang wird üblicherweise in dB dargestellt und ist definiert als

$$A_{O,dB}(\omega) = 20 \log |F_O(j\omega)| \quad (7.130)$$

Im Punkt  $-1 + j0$  beträgt  $A_{O,dB}(\omega) = 0$  dB. Für Werte links von  $-1 + j0$  ist  $|F_O(j\omega)| > 1$  und daher  $A_{O,dB} > 0$ . Im Bereich  $|F_O(j\omega)| < 1$  ist entsprechend  $A_{O,dB} < 0$ . Im Phasengang können die Schnittpunkte  $S^+$ ,  $S^-$  mit der negativen reellen Achse als Schnittpunkte der Phasenkurve durch die Linien  $\pm(2n+1)\pi$  abgelesen werden. Liegen diese Schnittpunkte links des Punktes  $-1 + j0$ , so muß an dieser Stelle  $A_{O,dB} > 0$  sein.

Schnittpunkte mit Winkeln, die mit wachsendem  $\omega$  bei Durchgang durch diese Linien größer werden, sind positive Schnittpunkte  $S^+$ , kleiner werdende Winkel zeigen einen negativen Schnittpunkt  $S^-$  an. Abb.(7.27) zeigt ein Beispiel für  $S^- = 1$ ,  $S^+ = 1$ .

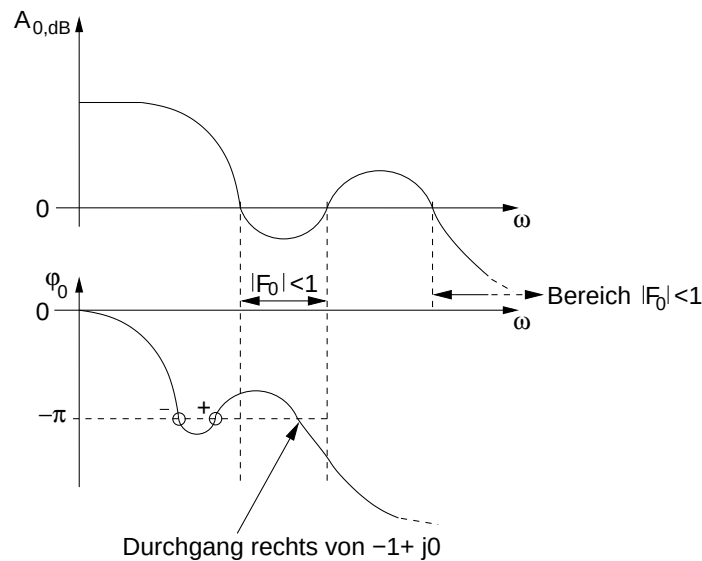


Abb. 7.27: Darstellung von Betrag und Phase der Schleifenverstärkung im Bode-Diagramm. Aus dem dargestellten Verlauf ( $0 \leq \omega \leq \infty$ ) läßt sich für  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  ablesen:  $S^- = 2$ ,  $S^+ = 2$ .

Hat die Schleifenverstärkung nur Pole in der linken Halbebene, so gilt für eine stabile Schaltung nach (Gl. 7.129):  $S^+ - S^- = 0$ . Diese Forderung ist auch erfüllt für  $S^+ = 0$ ,  $S^- = 0$ . D. h. die Ortskurve hat links von  $-1 + j0$

keinen Schnittpunkt mit der reellen Achse. Für diesen häufig vorkommenden Fall kann das Nyquist-Kriterium in seiner einfachsten Form ausgedrückt werden:

**Vereinfachtes Nyquist-Stabilitätskriterium für den Betrag der Schleifenverstärkung.**

Vorausgesetzt, die Schleifenverstärkung ist stabil ( $P = 0$ ) gilt: Eine rückgekoppelte Schaltung ist stabil, wenn die Schleifenverstärkung  $A_{0,dB}$  weniger als 0 dB beträgt, wenn die Phasendrehung den Wert  $\varphi_0 = -\pi$  erreicht.

Die Differenz (der Abstand) des Phasenwinkels bei  $A_{0,dB}=0$  dB zu  $\varphi_0 = -\pi$  wird als Phasenrand bezeichnet. Er gibt an, wie weit die Schaltung von der Instabilität entfernt ist.

Entsprechend kann anstelle des Phasenrandes auch der Amplitudenrand als Kriterium verwendet werden. Er gibt den Abstand der Schleifenverstärkung  $A_{0,dB}$  von der 0 dB-Linie an, wenn der Phasenwinkel  $\varphi_0 = -\pi$  beträgt.

**Beachten:** Die vereinfachten Kriterien Phasen- und Amplitudenrand gelten nur für Schleifenverstärkungen mit Polen in der linken Halbebene. In Zweifelsfällen sollte die Ortskurve der Schleifenverstärkung  $F_O(j\omega)$  zur Beurteilung herangezogen werden.

Siehe hierzu auch Beispiel 4.7 im Skript Prof. Blum S. 81ff.

## 8 Leistungsverstärker

### 8.1 Kenngrößen und Aussteuerungsgrenzen von Leistungsverstärkern

Eine wichtige Kenngröße von linearen Leistungsverstärkern ist die Signalleistung, die an einen vorgegebenen Widerstand mit vernachlässigbaren Verzerrungen abgegeben werden kann. Von untergeordneter Bedeutung ist dagegen die Leistungsverstärkung; sie ist nur ein Maß dafür, welcher Anteil der Signalausgangsleistung von der Signalquelle stammt und welcher aus der Betriebsspannungsquelle. Vorverstärker haben in der Regel eine viel höhere Leistungsverstärkung als Leistungsverstärker. Viel wichtiger ist der Wirkungsgrad  $\eta$ , der angibt, welcher Anteil der insgesamt aufgenommenen Leistung in Signalleistung umgewandelt wird. Dieser hängt eng zusammen mit der Betriebsart, wofür es eine Klasseneinteilung gibt.

In Abb. 8.1 sind in das Ausgangs-Kennlinienfeld eines Bipolartransistors die Begrenzungen eingetragen, die bei der Aussteuerung um den Arbeitspunkt nicht überschritten werden dürfen. Es bedeuten:

$\bar{I}_{Cmax}$ : Maximal zulässiger zeitlich gemittelter Kollektorstrom (gegeben durch die zulässige Verlustleistung in den Kontakten bezüglich Abschmelzen von Kontakten oder durch langfristigen Ausfall aufgrund Elektromigration),

$P_{tot max}$ : Maximal zulässige Verlustleistung,

2. Durchbruch: Durchbruch infolge Überhitzung der Sperrschicht mit Bildung von Schmelzkanälen infolge lokaler Stromkonzentration, z. B. bei „Pinch-in-Effekt“  $\Leftrightarrow$  Strom fließt bei  $U_{CE} > BU_{CE0}$  aus der Basis  $\Rightarrow$  inneres  $U_{BE}$  ist größer als äußeres  $\Rightarrow$  größter Strom im Inneren der Basis schnürt zusammen auf einem Punkt. „Hot Spot“  $\Leftrightarrow$  Temperatur fällt in der Regel zum Rand des Emitters ab  $\Rightarrow$  Stromkonzentration im Inneren steigt  $\Rightarrow$  Erhöht Verlustleistung im Inneren  $\Rightarrow$  weitere Konzentration ... u. U. bis Zerstörung

$U_{CEmax}$ : Spannung, bei der die Stoßionisation einsetzt (1. Durchbruch).

Weiter ist in Abb. 8.1 die Lastgerade eingetragen und eine Lastellipse, die an deren Stelle tritt, wenn der ohmsche Lastwiderstand durch eine Lastimpedanz

ersetzt wird. Um den Betriebsbereich des Transistors im Ausgangskennlini-

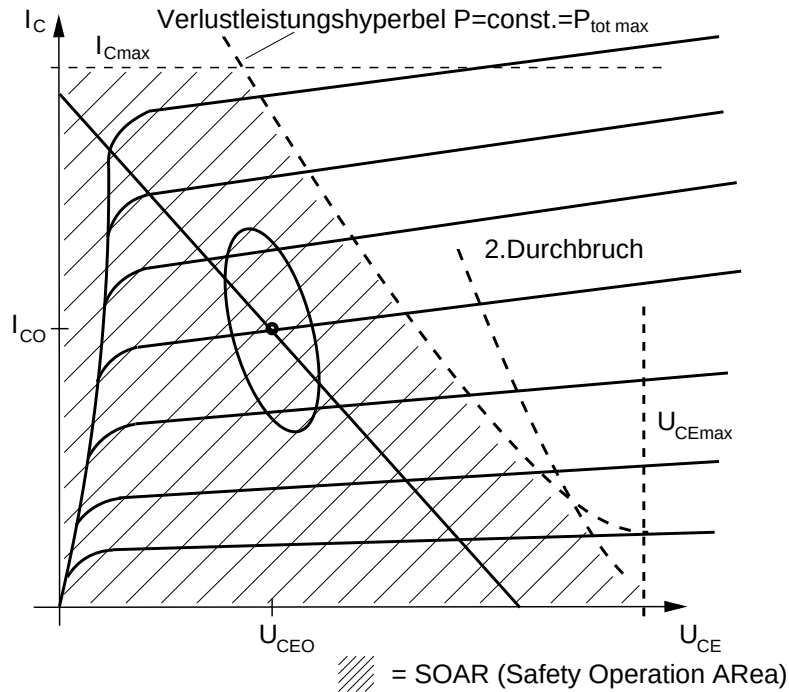


Abb. 8.1: Ausgangskennlinienfeld eines Bipolar-Transistors mit den Grenzen des Aussteuerungsbereiches. Dargestellt sind auch Lastgerade und Lastellipse bei Aussteuerung um den Arbeitspunkt  $\{I_{CQ}, U_{CEQ}\}$ .

enfeld zu ermitteln ist also die Lage der Lastellipse zu bestimmen.

## 8.2 Berechnung der Lastellipse bei komplexer Last des Transistors

Zur Berechnung der Parameter der Lastellipse gehen wir von dem idealisierten Zusammenhang  $I_C = \beta_0 I_B$  aus. Bei harmonischem Basisstrom  $i_B = I_B \cos \omega t$  gilt dann für die Schaltung in Abb. 8.2 bei einer Lastimpedanz  $Z_L$  im Kollektorkreis ( $I_{CQ}, U_{CEQ}$  Werte im Arbeitspunkt) im

**Frequenzbereich:** (Phasoren)

$$\underline{I}_C = |I_C| e^{j0} \quad \text{Bezugsstrom} \Rightarrow \varphi = 0 \quad (8.1)$$

$$\underline{U}_{CE} = -\underline{I}_C \underline{Z}_L = -|I_C| |\underline{Z}_L| e^{j\varphi} \quad \text{mit } \underline{Z}_L = R_L + jX_L \quad (8.2)$$

Die Wechselanteile lauten im Zeitbereich

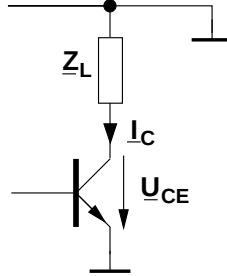


Abb. 8.2: Wechselstromersatzschaltbild des Ausgangskreises zur Berechnung der Lastellipse.

$$\tilde{i}_C(t) = \Re\{\underline{I}_C e^{j\omega t}\} = |\underline{I}_C| \cos \omega t \quad (8.3)$$

$$\tilde{u}_{CE}(t) = \Re\{\underline{U}_{CE} e^{j\omega t}\} = -|\underline{I}_C| |\underline{Z}_L| \cos(\omega t + \varphi). \quad (8.4)$$

Diese liefern die Aussteuerung um einen Arbeitspunkt  $I_{CQ}$ ,  $U_{CEQ}$  (=const.) entsprechend

$$i_C(t) = I_{CQ} + \tilde{i}_C(t) = I_{CQ} + |\underline{I}_C| \cos \omega t \quad (8.5)$$

$$u_{CE}(t) = U_{CEQ} + \tilde{u}_{CE}(t) = U_{CEQ} - |\underline{I}_C| |\underline{Z}_L| \cos(\omega t + \varphi). \quad (8.6)$$

Gleichungen (8.5), (8.6) umstellen und Abkürzungen einführen liefert

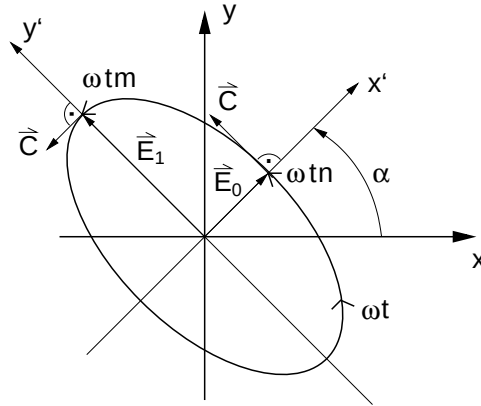
$$(8.5) \Rightarrow \frac{i_C(t) - I_{CQ}}{|\underline{I}_C|} = \cos \omega t := y \quad (8.7)$$

$$(8.6) \Rightarrow \frac{u_{CE}(t) - U_{CEQ}}{|\underline{I}_C|} = -|\underline{Z}_L| \cos(\omega t + \varphi). \quad (8.8)$$

Gl. (8.8) teilen durch  $R_L$  liefert eine einheitenlose Normierung auf die Wechselspannungsamplitude, die sich für  $\varphi = 0$  ( $\underline{Z}_L \rightarrow R_L$ ) ergibt. Dies ist außer bei der Verwendung von Übertragern immer für  $\omega \rightarrow 0$  der Fall,

$$\frac{u_{CE}(t) - U_{CEQ}}{|\underline{I}_C| R_L} = - \underbrace{\frac{|\underline{Z}_L|}{R_L}}_{:=r} \cos(\omega t + \varphi) = -r \cos(\omega t + \varphi) := x. \quad (8.9)$$

Gl. (8.7) und (8.9) liefern die auf den Niederfrequenzwert normierte Aussteuerung des Kollektorstroms und der Kollektor-Emitterspannung in



$$\vec{E} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

Abb. 8.3: Parametrisierte Ellipsengleichung.

Abhängigkeit der Phase  $\varphi$  der Lastimpedanz. Beide Gleichungen liefern zusammen eine mit  $\omega t$  parametrisierte Ellipse in einem um einen Winkel  $\alpha$  gedrehten Koordinatensystem mit den Hauptachsen  $x'$  und  $y'$  (vgl. Abb. 8.3).

Um die Ellipse in das Transistor-Ausgangskennlinienfeld einzeichnen zu können, ist die Kenntnis von  $\alpha$  und die Länge der beiden Hauptachsen  $|\vec{E}_0|$  und  $|\vec{E}_1|$  nötig.

Wir ermitteln die beiden Größen unter Verwendung der Richtungsableitung  $\vec{C}$  auf der parametrisierten Ellipse nach Gl. (8.10):

$$\vec{C} = \vec{e}_x \frac{dE_x}{d\omega t} + \vec{e}_y \frac{dE_y}{d\omega t} = \begin{pmatrix} r \sin(\omega t + \varphi) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} . \quad (8.11)$$

Bei den Winkeln  $\omega t_n = \vartheta_n$  steht die Richtungsableitung senkrecht auf  $\vec{E}$  (vgl. Abb. 8.3). Bei diesen Winkeln liegt  $\vec{E}$  auf einer der Hauptachsen.

Für  $\vec{C} \perp \vec{E}$  gilt

$$\vec{C}(\vartheta_n) \vec{E}(\vartheta_n) = 0 = \begin{pmatrix} r \sin(\vartheta_n + \varphi) \\ -\sin(\vartheta_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r \cos(\vartheta_n + \varphi) \\ \cos(\vartheta_n) \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

Bestimme  $\vartheta_n$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= -r^2 \sin(\vartheta_n + \varphi) \cos(\vartheta_n + \varphi) - \sin \vartheta_n \cos \vartheta_n \\
 &= \frac{r^2}{2} \sin 2(\vartheta_n + \varphi) + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_n \\
 &= r^2 (\sin 2\vartheta_n \cos 2\varphi + \cos 2\vartheta_n \sin 2\varphi) + \sin 2\vartheta_n \\
 &= \sin 2\vartheta_n (r^2 \cos 2\varphi + 1) + r^2 \cos 2\vartheta_n \sin 2\varphi \\
 &= \tan(2\vartheta_n \pm n\pi) (r^2 \cos 2\varphi + 1) + r^2 \sin 2\varphi \\
 \Rightarrow \quad \omega t_n = \vartheta_n &= -\frac{1}{2} \arctan \frac{r^2 \sin 2\varphi}{1 + r^2 \cos 2\varphi} \pm \frac{n\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

Hauptachse (n=0) bei:

$$\omega t_0 = \vartheta_0 = -\frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\sin 2\varphi}{\frac{1}{r^2} + \cos 2\varphi} \right) \tag{8.14}$$

Nebenachse (n=1):

$$\omega t_1 = \vartheta_1 = \vartheta_0 + \frac{\pi}{2} \tag{8.15}$$

Die Ellipsenvektoren der Haupt- und Nebenachsen ergeben sich durch Einsetzen von Gl. (8.14) und Gl. (8.15) in Gl. (8.10):

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} -r \cos(\vartheta_0 + \varphi) \\ \cos(\vartheta_0) \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} r \sin(\vartheta_0 + \varphi) \\ -\sin(\vartheta_0) \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

Daraus berechnen sich die Winkel der Ellipsenachsen ( $\alpha_0$  entspricht  $\alpha$  in Abb. 8.3

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \arctan \frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \arctan \frac{\cos \vartheta_0}{-r \cos(\vartheta_0 + \varphi)}, \\
 \alpha_1 &= \alpha_0 + \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

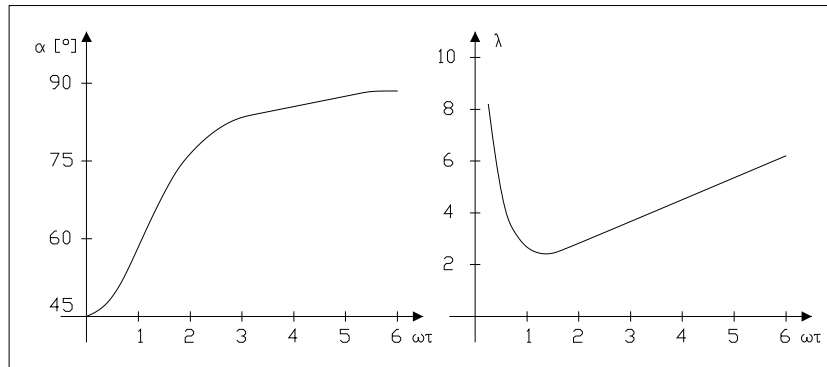
und die Länge der beiden Ellipsenachsen

$$\begin{aligned}
 |\vec{E}_0| &= (r^2 \cos^2(\vartheta_0 + \varphi) + \cos^2 \vartheta_0)^{\frac{1}{2}}, \\
 |\vec{E}_1| &= (r^2 \sin^2(\vartheta_0 + \varphi) + \sin^2 \vartheta_0)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

Das Verhältnis der Länge der beiden Achsen beträgt:

$$\lambda = \sqrt{\frac{r^2 \cos^2(\vartheta_0 + \varphi) + \cos^2 \vartheta_0}{r^2 \sin^2(\vartheta_0 + \varphi) + \sin^2 \vartheta_0}}. \tag{8.20}$$

**Beispiel 1:** Es gelte  $\underline{Z}_L = R_L + j\omega L$ ; hieraus folgen mit  $\tau := L/R_L$  und  $r = (1 + (\omega\tau)^2)^{1/2}$ ,  $\varphi = \arctan(\omega\tau)$ . Hiermit läßt sich anhand Gl. (8.14) der Parameter  $\omega t_0 = \vartheta_0$  für die Hauptachse bestimmen. Mit  $\alpha_0 = \alpha$  ergibt sich die Drehung der Hauptachse der Ellipse bzw. des Koordinatensystems in Abb. 8.3. Das Verhältnis der Ellipsenachsen berechnet sich anhand Gl. (8.20). Beide Ergebnisse lassen sich in Abhängigkeit der Phase grafisch darstellen.



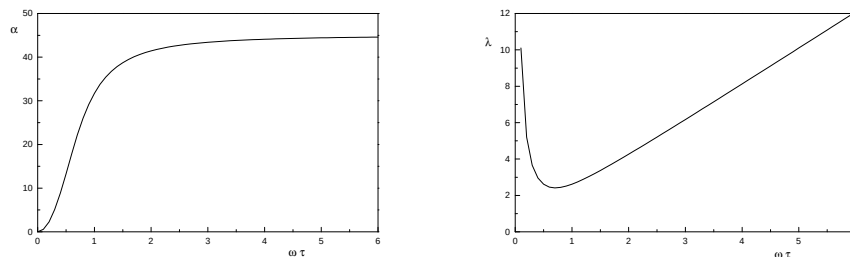
**Beispiel 2:** Bei der später betrachteten Schaltung c) in Abb. 8.7 läßt sich die Lastimpedanz  $\underline{Z}_L$  im Kollektorkreis für  $M^2 = L_1 L_2 k^2$ ,  $k = 1$ , ( $M := L_{12}$ ) anhand des in Kap. 1.2 behandelten Übertrager-Ersatzschaltbilds ermitteln:

$$\underline{Z}_L = \frac{j\omega L_1 R_L}{R_L + j\omega L_2} = \frac{j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2} R_L .$$

Mit  $L_1 = n^2 L_2$  und mit  $\underline{Z}_L(\varphi = 0) = \underline{Z}_L(\omega \rightarrow \infty) = n^2 R_L$  sowie mit  $\tau_1 = \frac{L_1}{R_L}$  und  $\tau_2 = \frac{L_2}{R_L}$  folgt hieraus entsprechend der Definition von  $r$  nach Gl. (8.9)

$$r = \frac{|\underline{Z}_L|}{n^2 R_L} = \frac{\omega\tau_2}{(1 + (\omega\tau_2)^2)^{1/2}} , \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau_2) .$$

Der Verlauf von  $\alpha$  und  $\lambda$  für diesen Fall ist in den folgenden Bildern dargestellt:





Anhand des Phasenwinkels der Last (vgl. Gl. (8.2)) läßt sich der Umlaufsinn auf der Ellipse ermitteln. Es folgt aus Ellipsengleichung (8.10)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = r\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (8.21)$$

Für  $t = 0$  ergibt sich  $y = 1$  und  $\frac{dx}{dt} = r\omega \sin \varphi$  und es läßt sich die folgende Tabelle angeben:

| Last induktiv               | Last kapazitiv                    |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| $\varphi > 0$               | $\varphi < 0$                     |
| $\sin \varphi > 0$          | $\sin \varphi < 0$                |
| $\frac{dx}{dt} > 0$         | $\frac{dx}{dt} < 0$               |
| $\Rightarrow$ Uhrzeigersinn | $\Rightarrow$ gegen Uhrzeigersinn |

Daraus folgt, daß die Ellipse bei einer induktiven Komponente der Impedanz  $\underline{Z}_L$  im Uhrzeigersinn und bei einer kapazitiven Komponente gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

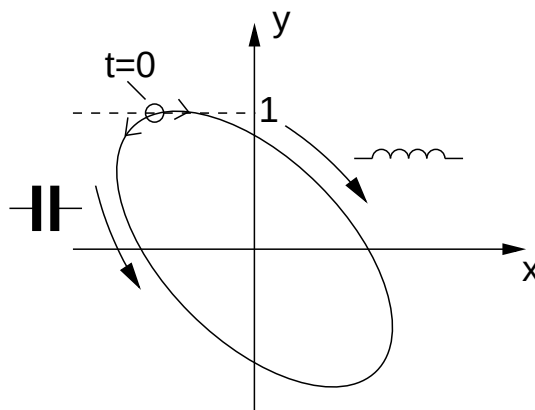


Abb. 8.4: Umlaufsinn in Abhängigkeit der Art der Last.

### 8.3 Beschreibung der Verzerrung bei Übergang zur Großsignalaussteuerung

In dem Maße, wie reale Kennlinien von den vorausgesetzten idealen Kennlinien, nämlich Parallelen zur  $U_{CE}$ -Achse, abweichen, weichen auch die Lastfiguren von der Ellipsenform ab. Die Linearitätsabweichungen werden mit

Hilfe des Klirrfaktors und des 1 dB-Kompressionspunktes beschrieben.  
Das Eingangssignal sei gegeben durch

$$u_e(t) = \hat{U}_e \cos \omega t \quad (8.22)$$

und das Ausgangssignal durch

$$u_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_{an} \cos(n\omega t + \varphi_n) . \quad (8.23)$$

Der Klirrfaktor ist ein Maß für die Leistung, die in den Harmonischen enthalten ist, bezogen auf die gesamte Ausgangsleistung.

$$k := \frac{\left( \sum_{n=2}^{\infty} \hat{U}_{an}^2(n\omega) \right)^{1/2}}{\left( \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_{an}^2(n\omega) \right)^{1/2}} ; \quad (8.24)$$

Alternativ hierzu wird auch die Leistung in den Harmonischen bezogen auf die Leistung in der Grundschiwingung:

$$k' := \frac{\left( \sum_{n=2}^{\infty} \hat{U}_{an}^2(n\omega) \right)^{1/2}}{\hat{U}_{a1}} . \quad (8.25)$$

Zwischen  $k$  und  $k'$  besteht der Zusammenhang

$$k = \frac{k'}{(1 + k'^2)^{1/2}} . \quad (8.26)$$

Für  $k' \ll 1$  gilt  $k \approx k'$ .

Der in Abb. 8.5 dargestellte 1 dB-Kompressionspunkt entspricht der Leistung, die um  $10 \cdot \log \frac{P_{a,NL}}{P_{a,L}} := 1$  dB unter der Leistung liegt, die sich durch Extrapolation der Leistungsverstärkung bei Kleinsignalbetrieb ergeben würde.

## 8.4 Betriebsarten und Wirkungsgrad

Leistungsverstärker werden nach ihrer Betriebsart in die Klassen A, AB, B und C eingeteilt. Das Unterscheidungsmerkmal ist der Stromflußwinkel  $\theta_C$ . Dieser gibt an, in welchem Winkelbereich der halben Periode bei harmonischem Eingangssignal mit maximal möglicher Amplitude der Ausgangsstrom diesem (bis auf eine additive Konstante) proportional ist. Die Zählung beginnt beim Maximalwert des Stromes. In Abb. 8.6 ist  $\theta_C = \pi/2$ .

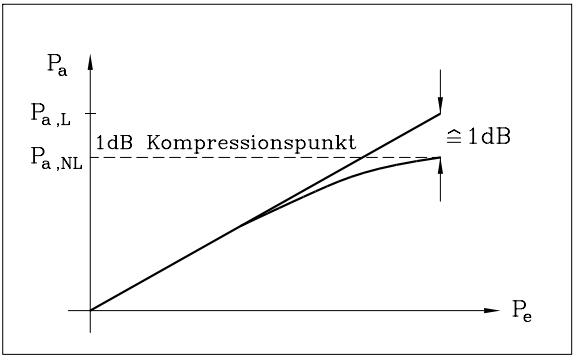


Abb. 8.5: Ausgangsleistung  $P_a$  in Abhängigkeit zur Eingangsleistung, zur Definition des 1 dB-Kompressionspunktes.

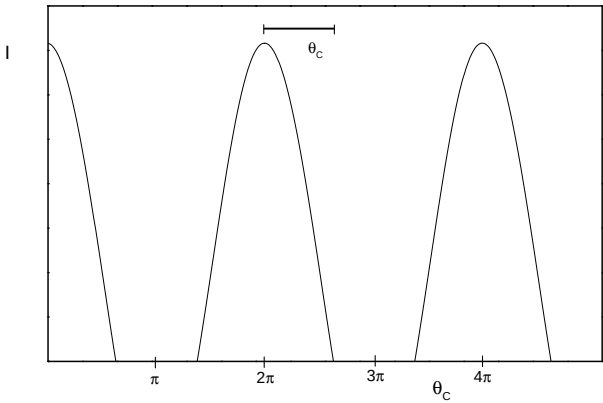


Abb. 8.6: Definition des Stromflußwinkels  $\Theta_C$ .

Es gilt die folgende Zuordnung:

| Klasse | Stromflußwinkel          |                       |
|--------|--------------------------|-----------------------|
| A      | $\theta_C = \pi$         |                       |
| AB     | $\pi/2 < \theta_C < \pi$ | } Gegentaktverstärker |
| B      | $\theta_C = \pi/2$       |                       |
| C      | $\theta_C < \pi/2$       | Selektivverstärker    |

Tabelle 1: Einteilung von Verstärkern in verschiedene Klassen aufgrund des Stromflußwinkels  $\Theta_C$ .

Zur Berechnung des Wirkungsgrades werden die folgenden Bezeichnungen benutzt:

$P_e$ : Signal-Eingangsleistung,

$P_{tot}$ : thermische Verlustleistung („ganzer Verstärker in einer Kiste“),

$P_a$ : Ausgangsleistung (nur Signal, kein Gleichanteil).

Damit gilt für die Berechnung des Wirkungsgrades

$$\eta = \frac{P_a}{P_e + P_a + P_{tot}} \approx \frac{P_a}{P_a + P_{tot}} = \frac{P_a}{P_0} = \frac{\text{Signalleistung}}{\text{Leistung aus Betriebsspannung}} \quad (8.27)$$

Die Signal-Eingangsleistung ist bei der Leistungsbilanz meist vernachlässigbar.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf Verstärker mit Bipolartransistoren, die für Leistungsverstärker meist den Feldeffekttransistoren vorgezogen werden, da sie einen größeren linearen Aussteuerbereich als diese haben. Es wird im Folgenden der maximal mögliche Wirkungsgrad für Verstärker der angegebenen Klassen berechnet. Die Kollektor-Sättigungsspannung wird dabei vernachlässigt. In Bild 8.7 sind mögliche Schaltungsstrukturen für Verstärker der Klasse A dargestellt auf die im Folgenden zurückgegriffen wird. Die Kapazitäten  $C_K$  und  $C_E$  werden als HF-Kurzschlüsse angesehen. In Bild 8.8 ist die Lage des Arbeitspunktes und der Lastgeraden für die drei Verstärkerschaltungen dargestellt. Weiterhin sind noch mögliche Arbeitspunkte für den Betrieb der Verstärker in den Klassen AB, B und C angegeben.

#### 8.4.1 Wirkungsgrad von Klasse A-Verstärkern

Bei allen Verstärkern in Abb. 8.7 wird zur Vergleichbarkeit gleicher Kollektorstrom  $I_{CQ}$  im Arbeitspunkt angenommen.  $I_{CQ}$  ist durch geeignete Wahl des Basisspannungsteilers eingestellt worden. Der Verstärkereingang kann über eine Spannung oder einen Strom angesteuert werden. Die Anregung soll mit der Frequenz  $\omega_0$  erfolgen und einen verzerrungsfreien Kollektorstrom

$$i_C(t) = \hat{I}_C \cos(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (8.28)$$

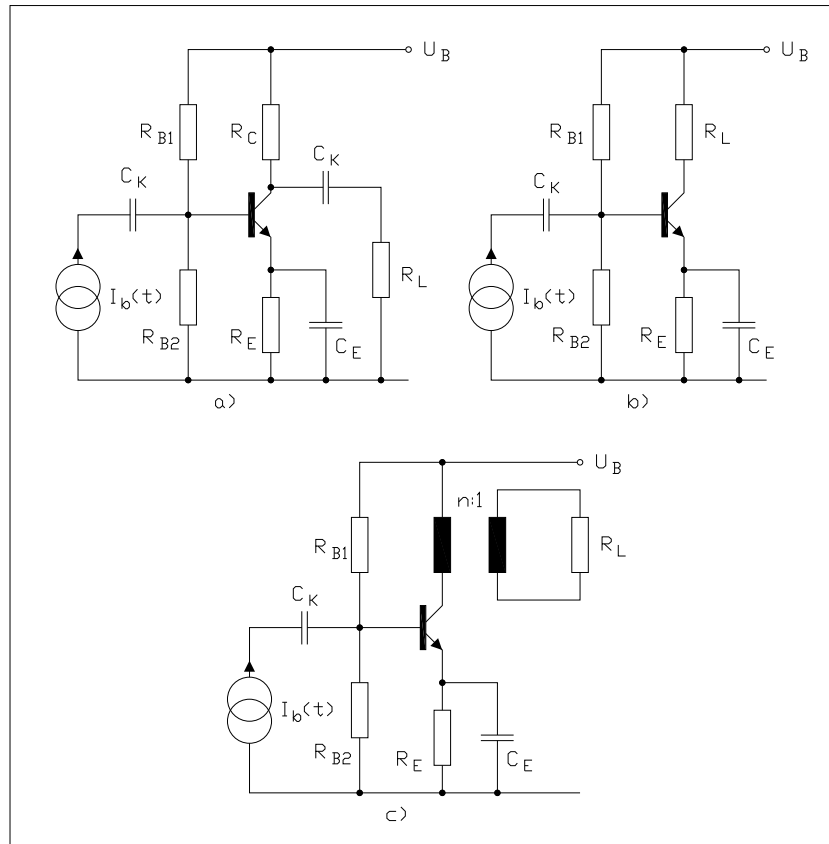


Abb. 8.7: Strukturen für Leistungsverstärker der Klasse A mit: a) kapazitiver, b) direkter, c) induktiver Ankopplung des Lastwiderstandes  $R_L$ .

hervorrufen. Die von der Betriebsspannung abgegebene Leistung

$$P_0 = P_a + P_{tot} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} U_B (I_{CQ} + \hat{I}_C \cos(\omega_0 t)) dt = U_B I_{CQ} \quad (8.29)$$

ist allein durch den Strom im Arbeitspunkt gegeben, da die symmetrisch um den Arbeitspunkt angenommene Strommodulation aufgrund des  $\cos$ -Signals eine mittlere Leistung von Null besitzt. Dies gilt für alle untersuchten Klasse A-Varianten, solange Gl. (8.28) gegeben ist.

Für die an den Lastwiderstand  $R_L$  abgegebene Leistung gilt allgemein, wenn

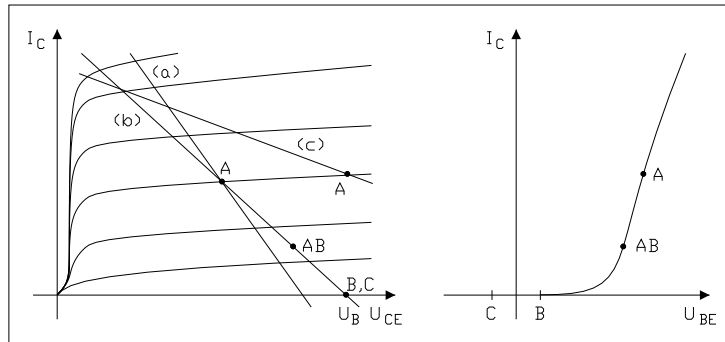


Abb. 8.8: Zur Lage des Arbeitspunktes bei den verschiedenen Verstärkerstrukturen. Beachten: AP in Variante c) liegt bei vernachlässigbarem  $R_E$  bei  $U_B$  (Betriebsspannung).

an  $R_L$  eine Spannung  $u_{RL}(t) = \hat{U}_{RL} \cos(\omega_0 t)$  angenommen wird:

$$P_a = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \frac{u_{RL}^2(t)}{R_L} dt = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \frac{\hat{u}_{RL}^2}{R_L} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{\hat{U}_{RL}^2}{2R_L} \quad (8.30)$$

Der Wirkungsgrad aller drei Varianten ergibt sich damit allgemein zu

$$\eta = \frac{P_a}{P_0} = \frac{\hat{U}_{RL}^2}{2R_L U_B I_{CQ}} \quad (8.31)$$

Im folgenden werden die drei verschiedenen Klasse A-Konzepte hinsichtlich Arbeitspunkt und Wirkungsgrad untersucht.

a) Variante mit kapazitiver Kopplung (Vorteil: keine Potentialbindung)

Für die statische Lastgerade  $G_s$  kann eine allgemeine Geradengleichung der Steigung  $m_s$  mit den Arbeitspunkt-Werten  $I_{CQ}, U_{CEQ}$  angegeben werden:

$$G_s: I_C = I_{CQ} + (U_{CE} - U_{CEQ})m_s \quad (8.32)$$

Durch Vergleich mit der Maschengleichung des Ausgangskreises oder durch geometrische Überlegungen im Kennlinienfeld (Abb. 8.10) folgt

$$\text{für } U_{CE} = 0 \Rightarrow I_C = I_{Cs,max} = \frac{U_B}{R_E + R_C} \quad (8.33)$$

$$\text{für } I_C = 0 \Rightarrow U_{CE} = U_{CEs,max} = U_B \quad (8.34)$$

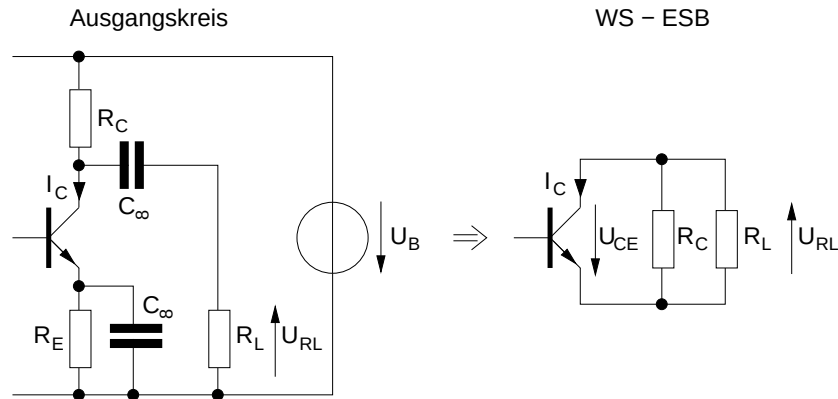


Abb. 8.9: Ausgangskreis eines Klasse-A-Verstärkers mit kapazitiver Kopplung der Last. Rechts: Wechselstromersatzschaltung.

Nach Abb. 8.10 bilden die beiden Größen ein Steigungsdreieck für  $m_s$  so, daß direkt geschrieben werden kann

$$m_s = \frac{-U_{CEs,max}}{I_{Cs,max}} = \frac{-1}{R_E + R_C} \quad (8.35)$$

Die dynamische Lastgerade  $G_d$  schneidet  $G_s$  im Arbeitspunkt, besitzt aber aufgrund des kurzgeschlossenen  $R_E$  eine höhere Steigung  $m_d$ . Es gilt daher analog Gl. (8.32) für  $G_d$ :

$$G_d: I_C = I_{CQ} + (U_{CE} - U_{CEQ})m_d \quad (8.36)$$

Die Steigung  $m_d$  ergibt sich mit Kleinsignalwerten aus dem Wechselstrom-Ersatzschaltbild in Abb. 8.9 zu

$$U_{CE} = -I_C R_C || R_L \Rightarrow \frac{I_C}{U_{CE}} = m_d = \frac{-1}{R_C || R_L} \quad (8.37)$$

Wird der Arbeitspunkt gemäß dem Prinzip der halben Betriebsspannung zu  $U_{CEQ} = \frac{U_B}{2}$  gewählt, ergibt sich der in Abb. 8.10 mit AP gekennzeichnete Arbeitspunkt. In diesem AP schneiden sich die dynamische und die statische Lastgerade  $G_d$  und  $G_s$ .  $G_d$  schneidet die  $U_{CE}$  = Achse bei  $U_{CEd,max}$ , wodurch sich ein Aussteuerbereich  $\Delta U_1 = U_{CEd,max} - \frac{U_B}{2}$  ergibt. Der größere Bereich  $\Delta U_2$ , in dem sich  $U_{CE}$  bei Auslenkungen von  $U_{CE} < U_{CEQ} = \frac{U_B}{2}$  befindet, kann nicht voll genutzt werden, da wegen der Forderung eines symmetrischen (unverzerrten)

Ausgangssignals die Amplitude auf  $\Delta U_1$  beschränkt bleiben muss. Daher ist die maximale Amplitude am Lastwiderstand  $\hat{U}_{RL,max} = \Delta U_1$  (vgl. Abb. 8.9). Durch geometrische Überlegungen im Kennlinienfeld

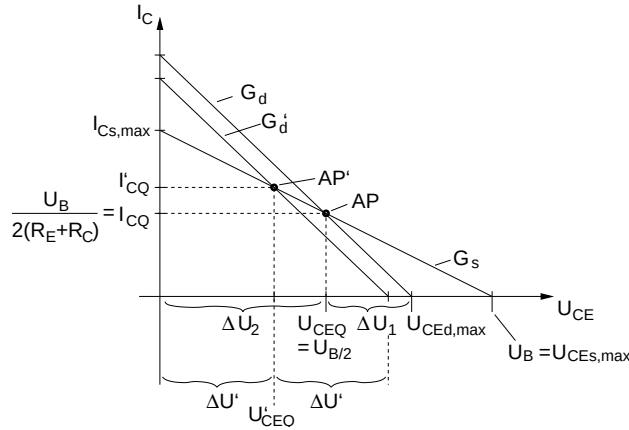


Abb. 8.10: Lastgeraden bei kapazitiver Kopplung.

ergibt sich für den AP:  $\frac{-I_{CQ}}{\Delta U_1} = m_d$ . Mit  $I_{CQ} = \frac{U_B}{2(R_E + R_C)}$  und  $m_d$  nach Gl. (8.37) ist

$$\hat{U}_{RL,max} = \Delta U_1 = \frac{-I_{CQ}}{m_d} = \frac{U_B}{2(R_E + R_C)} \cdot \frac{R_C R_L}{(R_C + R_L)} \quad (8.38)$$

und mit  $R_E \ll R_C$  folgt

$$\hat{U}_{RL,max} \approx \frac{U_B R_L}{2(R_C + R_L)} \quad (8.39)$$

Für den Strom im AP gilt mit der gleichen Näherung

$$I_{CQ} \approx \frac{U_B}{2R_C} \quad (8.40)$$

Der für  $\hat{U}_{RL,max}$  maximale Wirkungsgrad ergibt sich mit Gl. (8.39) und Gl. (8.40) eingesetzt in Gl. (8.31) zu

$$\eta_{\hat{U}_{RL,max}}^{(a)} = \frac{\hat{U}_{RL,max}^2}{2R_L U_B I_{CQ}} = \frac{U_B^2 R_L^2 2R_C}{4(R_C + R_L)^2 2R_L U_B^2} = \frac{R_L R_C}{4(R_L + R_C)^2} \quad (8.41)$$



Bezüglich  $R_L$  wird er maximal für  $R_L = R_C$ :

$$\eta_{max}^{(a)} = \eta_{\tilde{U}_{RL,max}}^{(a)} \Big|_{R_C=R_L} = \frac{1}{16} \hat{=} 6,25 \% . \quad (8.42)$$

Das ist ein sehr schlechter Wirkungsgrad. Es stellt sich die Frage, wie weit sich der Wirkungsgrad verbessert, wenn der Arbeitspunkt so verschoben wird, dass eine symmetrische Aussteuerung mit maximaler Auslenkung bis  $U_{CE} = 0$  möglich ist<sup>32</sup>. Dies entspricht dem mit AP' gekennzeichneten Arbeitspunkt in Abb. 8.10 mit den Auslenkungen  $\Delta U'$ . Die dynamische Lastgerade  $G_d$  geht durch Parallelverschiebung (gleiche Steigung, da Wechselstrom-Ersatzschaltbild gleich geblieben) über in  $G'_d$ , die  $G_s$  in AP':  $\{U'_{CEQ}, I'_{CQ}\}$  schneidet. Bei symmetrischer Vollaussteuerung gilt für  $G_d$  (vgl. Abb. 8.10)

$$U_{CE}|_{I_C=0} = 2U'_{CEQ} \quad . \quad (8.43)$$

Die Geradengleichung entsprechend Gl. (8.36) lautet für  $G_d$  in diesem Punkt

$$0 = I'_{CQ} + (2U'_{CEQ} - U'_{CEQ})m_d \Rightarrow I'_{CQ} = -U'_{CEQ}m_d \quad (8.44)$$

und beschreibt den Zusammenhang der Werte  $\{U'_{CEQ}, I'_{CQ}\}$  im AP' für symmetrische Vollaussteuerung. Im Folgenden wollen wir diese Werte in Abhängigkeit von den Schaltungsparametern bestimmen.

Da  $G_s$  und  $G_d$  den Punkt AP' gemeinsam haben, kann die Geradengleichung (8.32) für  $G_s$  auch für AP', also für  $\{U'_{CEQ}, I'_{CQ}\}$  identisch formuliert werden:

$$G_S : \quad I_C = I'_{CQ} + (U_{CE} - U'_{CEQ})m_s \quad . \quad (8.45)$$

Einsetzen von Gl. (8.44) eliminiert  $I'_{CQ}$ :

$$I_C = -U'_{CEQ}m_d + (U_{CE} - U'_{CEQ})m_s \quad . \quad (8.46)$$

Bestimmung von  $U'_{CEQ}$  durch Einsetzen des bekannten Wertes ( $U_{CE} = 0$  bei  $I_C = I_{Cs,max}$ ) aus Gl. (8.33)

$$I_{Cs,max} = -U'_{CEQ}m_d - U'_{CEQ}m_s \quad (8.47)$$

---

<sup>32</sup>Die Kollektor-Emitter-Restspannung wird vernachlässigt.

$$\Rightarrow U'_{CEQ} = \frac{-I_{Cs,max}}{m_d + m_s} . \quad (8.48)$$

Einsetzen der Werte aus Gl. (8.33), (8.35) und (8.37) liefert:

$$U'_{CEQ} = \frac{U_B}{1 + \frac{(R_C + R_E)(R_C + R_L)}{R_C R_L}} \quad (8.49)$$

oder mit der Näherung  $R_E \ll R_C$ :

$$U'_{CEQ} = \frac{U_B R_L}{R_C + 2R_L} = \frac{U_B}{2} \frac{R_L}{R_L + \frac{R_C}{2}} . \quad (8.50)$$

Die maximale Auslenkung und damit die maximale Amplitude am Lastwiderstand ist damit:

$$\hat{U}_{RLmax,symm} = U'_{CEQ} = \frac{U_B}{2} \frac{R_L}{R_L + \frac{R_C}{2}} . \quad (8.51)$$

Der Strom in AP' ergibt sich aufgrund der Symmetrie aus einfachen grafischen Überlegungen in Abb. 8.10

$$-\frac{I'_{CQ}}{U'_{CEQ}} = m_d \Rightarrow I'_{CQ} = -U'_{CEQ} m_d \quad (8.52)$$

Mit Gl. (8.51) und (8.52) kann direkt der Wirkungsgrad für symmetrische Vollaussteuerung berechnet werden. Einsetzen in Gl. (8.31) liefert

$$\eta_{\hat{U}_{RLmax,symm}}^{(a)} = \frac{\hat{U}_{RLmax,symm}^2}{2R_L U_B I'_{CQ}} \stackrel{(8.51)}{=} \frac{U_{CEQ}^2}{2R_L U_B I'_{CQ}} \stackrel{(8.52)}{=} \frac{-U'_{CEQ}}{2R_L U_B m_d} \quad (8.53)$$

Einsetzen Gl. (8.51) und Gl. (8.37) in Gl. (8.53) ergibt den maximalen Wirkungsgrad bei symmetrischer Vollaussteuerung:

$$\eta_{\hat{U}_{RLmax,symm}}^{(a)} = \frac{U_B}{2(R_L + \frac{R_C}{2})} \frac{R_L R_C R_L}{2 R_L U_B (R_C + R_L)} = \frac{R_C R_L}{4(R_L + \frac{R_C}{2})(R_L + R_C)} . \quad (8.54)$$

Bezüglich  $R_L$  wird er maximal für  $R_L = \frac{R_C}{\sqrt{2}}$ :

$$\eta_{max,symm}^{(a)} = \eta_{\hat{U}_{RL,max,symm}}^{(a)} \Big|_{R_L = \frac{R_C}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2(1 + \sqrt{2})^2} \hat{=} 8,6 \% \quad (8.55)$$

Der Wirkungsgrad bei verschobenem Arbeitspunkt für symmetrische Vollaussteuerung ist mit 8,6 % besser, als der bei halber Betriebsspannung ( $U_{CE} = \frac{U_B}{2}$ ) mit 6,3 %. Für verlustleistungsarme Anwendungen eignen sich jedoch beide Varianten nicht.

Die Ursache des schlechten Wirkungsgrades liegt vor allem in der für alle Klasse-A-typischen Problematik, dass ohne Signal bereits eine hohe statische Verlustleistung  $U_B I_{CQ}$  im Verstärker in Wärme umgesetzt wird. Der Wirkungsgrad kann gemäß Gl. (8.31) nur verbessert werden, indem eine möglichst große Amplitude  $\hat{U}_{RL}$  an der Last erzielt wird.

Hier liegt das Problem der kapazitiven Lastankopplung. Sie benötigt zur Einstellung des Arbeitspunktes einen internen Widerstand  $R_C$ , der gemäß Gl. (8.42) und (8.55) in der gleichen Größenordnung wie der Lastwiderstand liegen muss um den optimalen Wirkungsgrad zu erzielen. Die an  $R_C$  umgesetzte Leistung verringert aber den Wirkungsgrad, da sie nicht zur Leistung an der Last, sondern zur im Verstärker in Wärme umgesetzte Leistung gerechnet wird.

Die Variante mit kapazitiver Lastankopplung sollte daher nur verwendet werden, wenn die Anwendung eine Potentialtrennung verlangt (wie in dem gezeigten Beispiel, wo  $R_L$  an der negativen Betriebsspannung liegt).

b) Variante mit Gleichspannungskopplung (Abb. 8.7(b))

Die Berechnung fällt sehr einfach aus, da hier statische und dynamische Lastgerade identisch sind. Mit der Dimensionierung zur symmetrischen Vollaussteuerung  $U_{CEQ} = \frac{U_B}{2}$  ergibt sich  $\hat{U}_{RL,max} = \frac{U_B}{2}$  und der maximale Wirkungsgrad nach Gl. (8.31) wird mit  $I_{CQ} = \frac{U_B}{2(R_L + R_E)} \approx \frac{U_B}{2R_L}$

$$\eta_{RLmax}^{(b)} = \frac{\hat{U}_{RL,max}^2}{2R_L U_B I_{CQ}} = \frac{U_B^2 2R_L}{8R_L U_B^2} = \frac{1}{4} = 25 \% \quad (8.56)$$

Dieser mehr als doppelt so gute Wert ist allein darauf zurückzuführen, dass bei Gleichspannungskopplung 100 % des Signalstroms am Lastwiderstand in Nutzleistung umgesetzt werden.

c) Variante mit Übertragerkopplung (Abb. 8.7(c))

Noch höhere Wirkungsgrade liefert die Ankopplung der Last über einen Transformator. Obwohl Übertrager aus mehreren Gründen wenig beliebte Bauelemente sind (teuer, hoher Platzbedarf, Störeinkopplung, hohes Gewicht ...) sind sie dennoch in verschiedenen Endstufen zu finden. Hierfür gibt es drei Gründe:

- (a) Galvanische Entkopplung (Umsetzung auf anderes Potential).
- (b) Symmetrischer (differentieller) Ausgang (gutes CMRR).
- (c) Höchster Wirkungsgrad für Klasse-A Verstärker.

Warum die Variante mit Ausgangsübertrager einen hohen Wirkungsgrad hat, lässt sich einfach anhand des Ausgangskennlinienfeldes in Abb. 8.11 überlegen. Im statischen Fall (Gerade  $G_s$ ) ist die Lastgera-

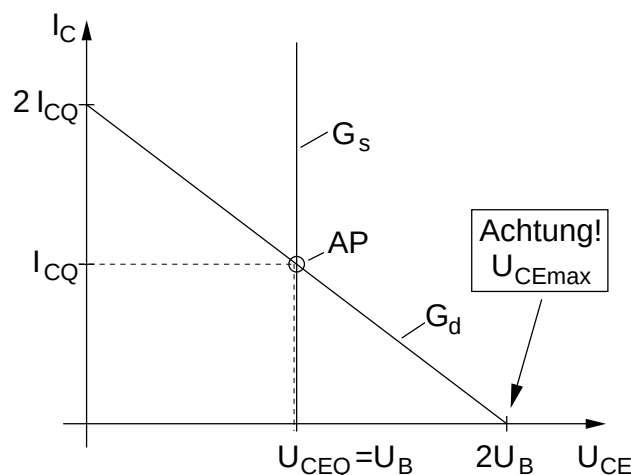


Abb. 8.11: Lastgeraden der Schaltung mit Übertragerkopplung nach Abb. 8.7(c).

de eine senkrechte Linie (Kurzschluss) wenn der Übertrager mit einem Gleichstromwiderstand von Null (keine Drahtwiderstände) angenommen und der Gegenkopplungswiderstand vernachlässigt wird. Es stellt sich daher für alle gewählten Ströme  $I_{CQ}$  die Spannung  $U_{CEQ} = U_B$  ein. Damit kann der Spannungshub (C-E-Restspannung vernachlässigt) auf der Primärseite  $U_{CEQ} = U_B$  ! betragen. Im Arbeitsfrequenzbereich  $\omega > \frac{1}{\tau_2} = \frac{R_L}{L_2}$  gilt nach den Berechnungen zu Beispiel 2 S. 172 für die

Lastimpedanz (Widerstand) auf der Primärseite des Übertragers:

$$\underline{Z}_L = \frac{j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2} R_L \approx R_L \frac{\tau_1}{\tau_2} \bigg|_{\omega \gg \frac{1}{\tau_2}} = R_L \frac{L_1 R_L}{R_L L_2} \quad (8.57)$$

und mit  $\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = n^2$  folgt

$$\underline{Z}_L|_{\omega \gg \frac{1}{\tau_2}} = n^2 R_L \quad . \quad (8.58)$$

Der Strom im Arbeitspunkt wird so eingestellt, dass bei Verdopplung auf  $I_C = 2I_{CQ}$  durch dynamische Aussteuerung gerade  $U_{CE} = 0$  gilt; also der Spannungshub den Maximalwert von  $\hat{U}_{RL,max} = U_{CEQ} = U_B$  besitzt. Dann ist symmetrische Vollaussteuerung ( $U_{CEQ} \pm U_B (= U_{CEQ})$ ) gegeben. Da bei Vollaussteuerung die Stromamplitude gleich dem Strom im Arbeitspunkt ist, folgt mit Gl. (8.58)

$$I_{CQ} = \frac{U_B}{n^2 R_L} \quad . \quad (8.59)$$

Die maximale Spannungsamplitude  $U_B$  überträgt sich auf die Sekundärseite zu  $\hat{U}_{RL,max} = \frac{U_B}{n}$ . Damit lässt sich der maximale Wirkungsgrad für Klasse-A Verstärker mit Übertragungskopplung berechnen. Mit Gl. (8.31) ergibt sich

$$\eta_{max}^{(c)} = \frac{\hat{U}_{RL,max}^2}{2 R_L U_B I_{CQ}} = \frac{U_B^2 n^2 R_L}{2 n^2 R_L U_B^2} = \frac{1}{2} \hat{=} 50 \% \quad (8.60)$$

Bei breitbandigen Signalübertragungen sind entsprechend Kapitel 1.2 Abb. 1.7 die, durch Streuung und endliche Wicklungsinduktivität  $L_1(L_2)$  bedingte obere und untere Grenzfrequenz zu beachten. Auch ergibt sich eine Grunddämpfung im Durchlassbereich aufgrund nicht verschwindend geringer Wicklungswiderstände.

Wird (bei NF-Verstärkern üblich) ein Übertrager mit Kernmaterial verwendet, ergeben sich abhängig von dem verwendeten Material und der Aussteuerung nichtlineare Verzerrungen, die den Klirrfaktor erhöhen.

#### 8.4.2 Wirkungsgrad des bipolaren Emitterfolgers

Betrachtet wird ein Emitterfolger, dessen Eingang so angesteuert wird, dass sein Ausgang symmetrisch zu einem Masse-Bezugspotential angesteuert

wird. Hierzu wird die in Abb. 8.12 links dargestellte Schaltung mit symmetrischer Betriebsspannung untersucht. Für die gewünschte symmetrische Aussteuerung um das Masse-Potential benötigt die Eingangsspannung  $U_e$  eine Vorspannung (AP-Potential) in der Höhe einer Basis-Emitterflußspannung  $U_{BEf}$ , der der Wechsellspannung  $\tilde{u}_e(t)$  überlagert wird:  $u_e(t) = U_{BEf} + \tilde{u}_e(t)$ . Für  $\tilde{u}_e(t) = 0$  folgt dann  $U_L = 0$ .

Eine einfache Schaltung zur Erzeugung dieser Vorspannung ist in Abb. 8.12 rechts dargestellt. Zu beachten ist hierbei, dass die Flussspannung der Diode

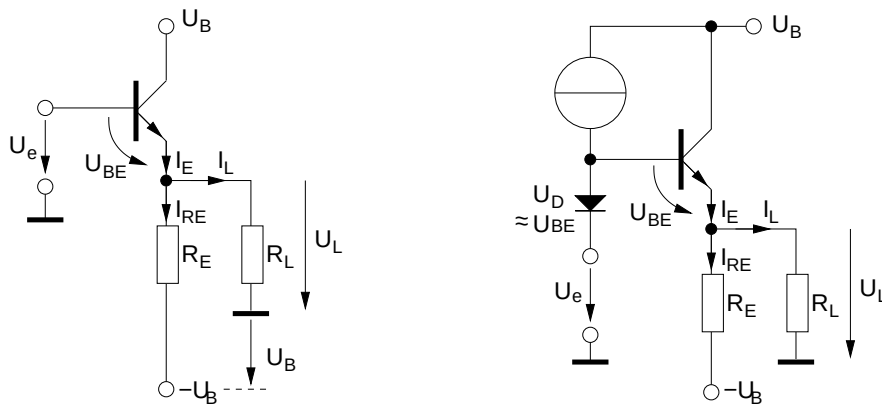


Abb. 8.12: Links: Bipolarer Emitterfolger mit einer Betriebsspannung von  $\pm U_B$ . Rechts: Schaltungsvariante (Prinzipschaltung) zur Erzeugung einer Vorspannung.

$U_D$  gleich  $U_{BEf}$  des Transistors sein muss, damit  $U_L = 0$  gilt. Dazu sind insbesondere die Einflüsse unterschiedlicher Transistor- und Diodenkennlinien aufgrund von Bauelement-Toleranzen, Temperatur, Stromdichten etc. zu beachten.

Für die folgenden Berechnungen nehmen wir zur Vereinfachung quasistatisches Verhalten an und verwenden daher auch für veränderliche Spannungen und Ströme Großbuchstaben. Für die Ströme am Ausgang gilt allgemein:

$$I_E = I_{RE} + I_L = \frac{U_L + U_B}{R_E} + \frac{U_L}{R_L} \approx I_C \quad . \quad (8.61)$$

Danach wird der Emitterstrom zu Null für eine negative Spannung an der Last in der Nähe von

$$-U_{L,min} = U_B \frac{R_L}{R_L + R_E} = \hat{U}_{RL,max} \quad . \quad (8.62)$$

Da symmetrische Aussteuerung um Null gefordert wird, ist dies die maximal mögliche Amplitude  $\hat{U}_{RL,max}$  des bipolaren Emitterfolgers. Im AP gilt  $U_{CE} = U_B$ .

Der Ruhestrom durch den Emitterfolger ist wegen  $U_L(\tilde{u}_e(t) = 0) = 0$  nach Gl. (8.61)  $I_{CQ} = \frac{U_B}{R_E}$ . Aus Gl. (8.31) ergibt sich damit der Wirkungsgrad

$$\eta_{\hat{U}_{RL,max}} = \frac{\hat{U}_{RL,max}^2}{2R_L(2U_B)I_{CQ}} = \frac{U_B^2 R_L^2 R_E}{4(R_L + R_E)^2 R_L U_B^2} = \frac{R_L R_E}{4(R_L + R_E)^2} \quad (8.63)$$

Der bezüglich  $R_L$  maximale Wirkungsgrad ergibt sich daraus mit  $\frac{d\eta_{\hat{U}_{RL,max}}}{dR_L} = 0$  bei  $R_L = R_E^*$ <sup>33</sup> zu

$$\eta_{max} = \frac{R_L^2}{4(2R_L)^2} = \frac{1}{16} = 6,25\% \quad (8.64)$$

Für die Ermittlung der Lastgeraden im Ausgangskennlinienfeld bestimmen wir aus dem Maschenumlauf:  $U_L = U_B - U_{CE}$ . Eingesetzt in Gl. (8.61) ergibt sich:

$$I_C = \frac{2U_B - U_{CE}}{R_E} + \frac{U_B - U_{CE}}{R_L}$$

$$I_C = U_B \left( \frac{2}{R_E} + \frac{1}{R_L} \right) - U_{CE} \left( \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_L} \right) \quad (8.65)$$

$$I_C = 0 \Rightarrow U_{CE,max} = U_B \frac{\frac{2}{R_E} + \frac{1}{R_L}}{\frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_L}} = U_B \frac{2R_L + R_E}{R_E + R_L} \quad (8.66)$$

Damit läßt sich die Lastgerade des bipolaren Emitterfolgers in Abb. 8.13 zeichnen, die auch eine anschauliche Begründung für den schlechten Wirkungsgrad des bipolaren Emitterfolgers liefert.

Hauptgrund ist, dass der Bereich zur Vollaussteuerung durch den relativ kleinen Bereich für negative Spannungen ( $U_L < 0$ ) begrenzt wird. Der für positive Spannungen mögliche große positive Spannungsbereich bleibt weitgehend ungenutzt und erzeugt durch das große  $U_{CE}$  eine hohe

---

<sup>33</sup>Dieses Ergebnis scheint sich nicht mit der allgemein bekannten Forderung nach konjugiert komplexer Anpassung, also  $R_L = \text{Quellimpedanz}^*$  ( $\approx \frac{U_T}{I_C}$  des Emitterfolgers) zu decken. Die Ursache liegt darin, dass die allgemeine Forderung für Quellen mit konstanter Quellspannung gilt, was hier nicht erfüllt ist. Im vorliegenden Fall nimmt die Quellspannung mit sinkendem  $R_L$  ab.

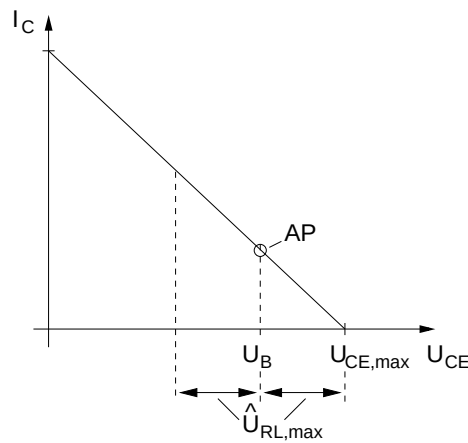


Abb. 8.13: Lastgerade im Ausgangskennlinienfeld des bipolaren Emitterfolgers.

Verlustleistung, die den Wirkungsgrad verschlechtert. Eine Verbesserung des Wirkungsgrades kann die Verwendung einer Stromquelle anstelle  $R_E$  bringen, da deren Strom im Gegensatz zu dem Strom durch  $R_E$  nicht mit sinkender Ausgangsspannung abnimmt. Zur Übung sollte der Wirkungsgrad für die Variante mit Stromquelle ermittelt werden.

Deutlich höhere Wirkungsgrade lassen sich jedoch erzielen, wenn auf eine symmetrische Aussteuerung des Emitterfolgers gänzlich verzichtet wird, und der Emitterfolger nur die positive Halbwelle ( $U_L > 0$ ) übertragen soll. In diesem Fall kann der gesamte Bereich  $0 \leq U_{CE} \leq U_B$  ausgenutzt werden. Die negative Halbwelle kann in diesem Fall von einer dazu komplementären Schaltung übertragen werden. Aus den beiden Teilschaltungen ergibt sich die Gesamtschaltung in Abb. 8.14.

Anstelle der beiden Dioden zur Vorspannungserzeugung können auch andere Schaltungen eingesetzt werden. Ziel aller Varianten ist eine möglichst definierte und an die Basis-Emitterspannungen der Ausgangstransistoren angepasste Vorspannung zu erzeugen, die nicht notwendigerweise identisch mit der, der Ausgangstransistoren sein muss. Bei linearen Verstärkern ist das Ziel, möglichst geringe Übernahmeverzerrungen beim Übergang von der positiven zur negativen Halbwelle zu erzeugen.

Im Folgenden werden für die gleiche Endstufe verschiedene Einstellungen der Vorspannung und die sich daraus ergebenden Kennlinien betrachtet.<sup>34</sup>

<sup>34</sup>Annäherung der Kennlinien durch idealisierte abschnittsweise Geradenverläufe.



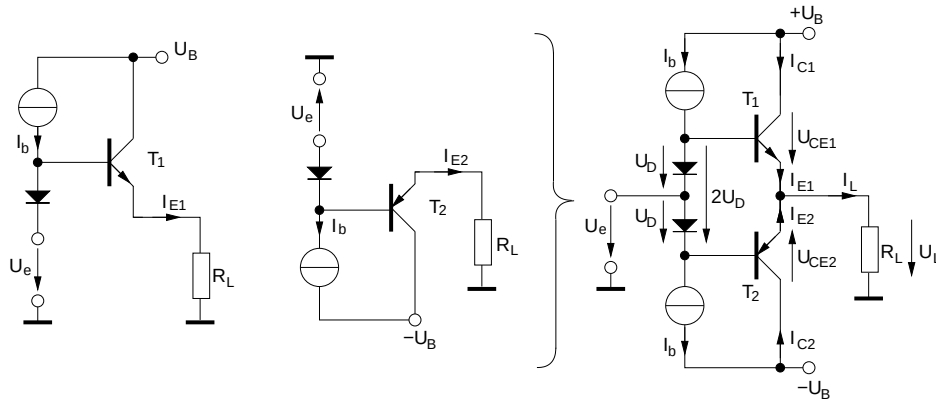


Abb. 8.14: Prinzipschaltung einer Gegentaktendstufe, die aus zwei komplementären bipolaren Emitterfolgern aufgebaut wird. Links: Schaltung für die positive Halbwelle. Mitte: Schaltung für die negative Halbwelle. Rechts: zusammengesetzte Gesamtschaltung der Gegentaktendstufe.

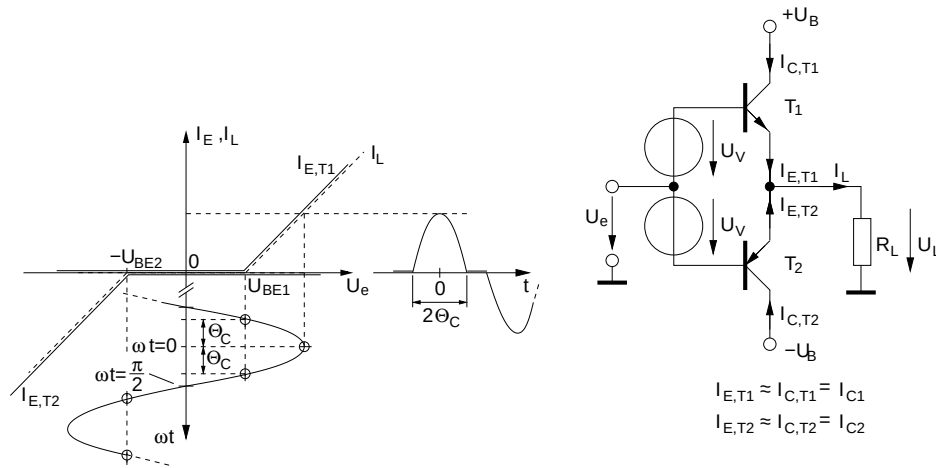


Abb. 8.15: Konstruktion der Übertragungskennlinie  $I_L(U_e)$  aus den Kennlinien der Gegentakt-Transistoren für den Fall ohne Vorspannung ( $U_V = 0$ ).

Im Fall ohne oder mit geringer Vorspannung nach Abb. 8.15 entsteht um  $U_e = 0$  herum ein sogenanntes „totes Band“ oder „toter Bereich“, in dem kein Ausgangsstrom fließt, da  $|U_e|$  erst so groß werden muss, dass die Basis-Emitter-Dioden von  $T_1$  bzw.  $T_2$  zu „leiten“ beginnen (d.h. es muß gelten  $U_{BE} \rightarrow U_{BEf}$ ). Es liegt also genau genommen C-Betrieb vor.

Beachten: Sobald die Basis-Emitter-Strecke einer der Transistoren leitet, d. h. der Transistor als Emitterfolger betrieben wird, folgt die Ausgangsspannung  $U_L$  der Eingangsspannung  $U_e$  sehr linear, da der Emitterfolger einen sehr großen, linearen Aussteuerbereich besitzt ( $U_e - U_L = U_{BE} - U_V \approx 0$ ).

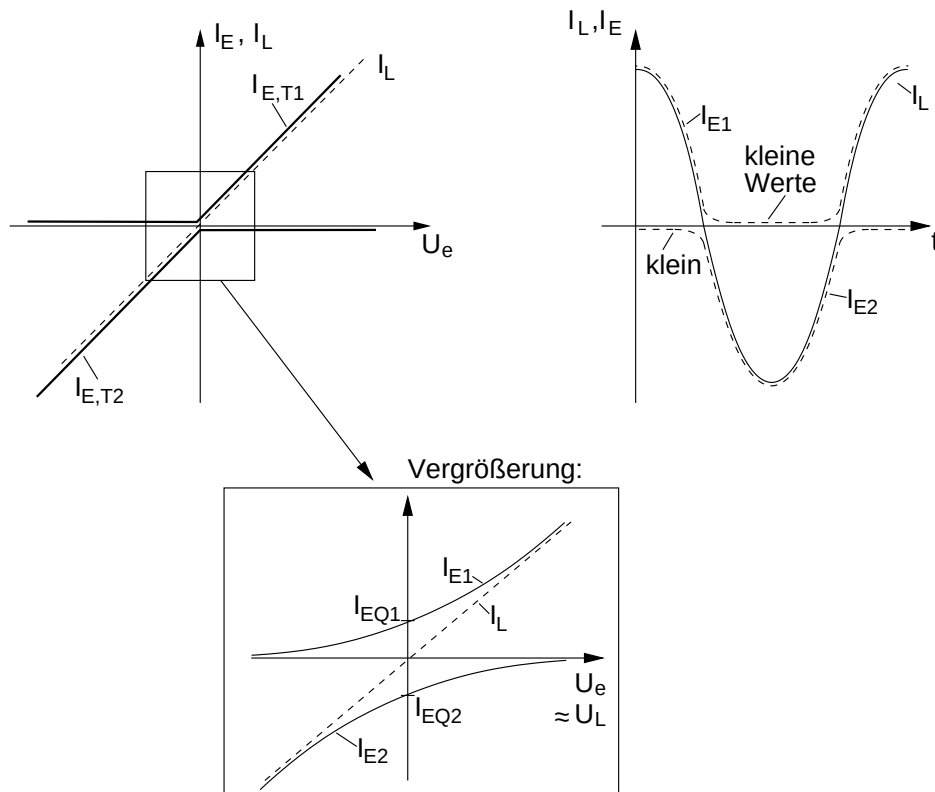


Abb. 8.16: Konstruktion der Übertragungskennlinie  $I_2(u_e)$  aus den Kennlinien der Gegentakt-Transistoren für den Fall mit Vorspannung  $U_V \geq U_{BEf}$ .

Für Vorspannungen  $U_V \geq U_{BEf}$  liegt AB...A-Betrieb vor. Die Knickstellen der Geraden-approximierten Kennlinien  $I_E(U_e)$  der beiden Transistoren liegen in diesem Fall übereinander oder fallen sogar in den ansteigenden Bereich der jeweils anderen Kennlinie. Abb. 8.16 zeigt den idealisierte Verlauf sowie Details des Übergangsbereiches um  $U_e = 0$ . Kennzeichen des AB-Betriebes ist, daß ohne Eingangsspannung (Arbeitspunkt:  $U_e = 0$ ) durch die Transistoren ein Querstrom  $I_{EQ1} = -I_{EQ2} > I_E(U_{BE} = 0)$  fließt. Beachten: Für ein ideal-komplementäres Transistorpaar  $T_1, T_2$  gilt für  $U_e = 0$  immer  $I_{E1} + I_{E2} = I_L = 0$  dabei sind aber  $I_{E1}, I_{E2} \neq 0$ . Es gilt:

$I_{E1}, I_{E2}$  sind umso kleiner, je näher der Arbeitspunkt dem B-Betrieb ist,  
 $I_{E1}, I_{E2}$  sind umso größer, je näher der Arbeitspunkt dem A-Betrieb ist.

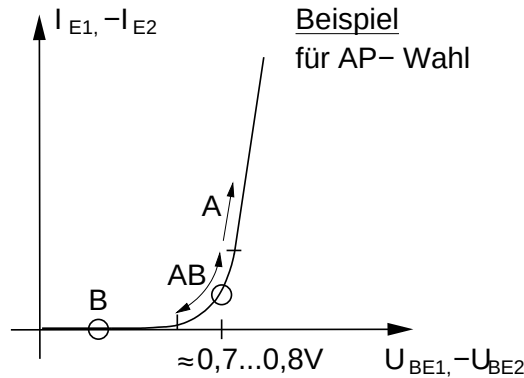


Abb. 8.17: Beispiel für die Wahl des Arbeitspunktes auf der Steuerkennlinie der Transistoren für die verschiedenen Verstärkerklassen.

Um den Wirkungsgrad der Gegentaktstufe möglichst groß zu machen und gleichzeitig die statische Verlustleistung ohne Eingangssignal zu minimieren wird ein möglichst geringer Querstrom gewählt. Abb. 8.17 zeigt die Wahl des AP anhand der Steuerkennlinien der Gegentakttransistoren.

Im folgenden soll das Ausgangskennlinienfeld des Gegentakt-Transistorpaares konstruiert werden. Als Maschenumlauf in der Schaltung nach Abb. 8.15 kann sofort hingeschrieben werden:

$$U_B - U_{CE1} = U_L = -U_B - U_{CE2} \quad . \quad (8.67)$$

Darin kann man, wie in Abb. 8.18 gezeigt,  $U_L$  als die Abweichung von  $U_{CE1}$  (bzw.  $U_{CE2}$ ) zu  $U_B$  (bzw.  $-U_B$ ) interpretieren:

$$U_{CE1} = U_B - U_L \quad (8.68)$$

$$U_{CE2} = -(U_B + U_L) \quad (8.69)$$

$U_{CE2}$  hat demnach im Betrag die gleiche Abweichung zu  $U_B$  wie  $U_{CE1}$ , jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Beachtet werden muß, daß  $U_{CE2}$  negativ ist und daher auf einer negativen Achse eingetragen werden kann. Liegen die beiden  $U_{CE}$ -Achsen der Ausgangs-Kennlinienfelder von  $T_1$  und  $T_2$  wie in Abb. 8.18 so zueinander, dass  $U_B$  und  $-U_B$  auf gleicher Höhe sind, so

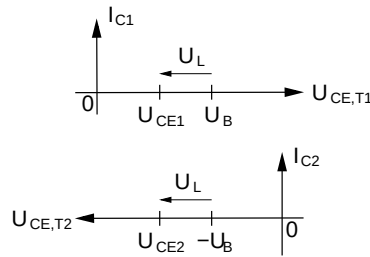


Abb. 8.18: Grafische Darstellung von Gl. (8.68) und (8.69) auf den  $U_{CE}$ -Achsen der Ausgangskennlinienfelder von  $T_1$  und  $T_2$ .

liegen aufgrund der betragsmäßig gleichen Abweichung  $U_L$  automatisch auch die  $\{U_{CE1}, U_{CE2}\}$ -Paare übereinander. Für die Konstruktion der Ausgangskennlinienfelder müssen noch die Verläufe der Kollektorströme  $I_{C1}$ ,  $I_{C2}$  und des Laststroms  $I_L$  ermittelt werden. Am Ausgang gilt:

$$I_L = \frac{U_L}{R_L} = I_{E1} + I_{E2} \approx I_{C1} + I_{C2} . \quad (8.70)$$

Die Gleichung beschreibt direkt den Verlauf der Lastgeraden als Summe der Kollektorströme der beiden Transistoren.

Der Verlauf kann entsprechend Abb. 8.18 entweder in das Koordinatensystem von  $T_1$  oder von  $T_2$  gezeichnet werden. Für die folgenden Abbildungen wählen wir das Kennlinienfeld von  $T_1$ .

Abb. 8.19 zeigt den Verlauf des Kollektorstroms von  $T_1$ . Zur Erläuterung der Besonderheiten stellen wir Gl. (8.70) um

$$I_{C1} \approx \frac{U_L}{R_L} - I_{C2}(U_L) \quad (8.71)$$

Dabei ist zu beachten, daß aufgrund der gewählten Zählpfeilrichtung  $I_{C2} < 0$  gilt und daß  $I_{C2} = I_{C2}(U_L)$  eine Funktion von  $U_L$  ist. Für eine AP-Einstellung im AB-Betrieb bei der ein hinreichend kleiner Querstrom fließt, so daß näherungsweise gilt

$$I_{C2,min} := I_{C2}(U_L = U_B) \ll \frac{U_B}{R_L} \quad (8.72)$$

ist der Kollektorstrom von

$$T_1 : I_{C1,max} := I_C(U_L = U_B) \approx \frac{U_B}{R_L} - I_{C2,min} \approx \frac{U_B}{R_L} . \quad (8.73)$$

Je schlechter Gl. (8.72) erfüllt ist, umso größer wird  $I_{C1,max}$ , da nach Gl. (8.71) der Zusatzstrom  $I_{C2,min}$  durch  $T_1$  fließt.

Bei kleinen Auslenkungen gilt Gl. (8.72) nicht mehr und der Kollektorstrom von  $T_1$  verläuft nicht mehr linear, d. h. nicht mehr proportional zu  $\frac{U_B}{R_L}$ . (vgl. Vergrößerung Abb. 8.16). Neben dem Laststrom übernimmt der komplementäre Transistor (hier im Beispiel  $T_2$ ) einen Teil des Kollektorstroms (vgl. Gl. (8.71)). Mit wachsender Übernahme ( $|I_{C2}| \uparrow$ ) verringert sich die Steigung der Lastkennlinie von  $T_1$ . Für den komplementären Transistor gelten entsprechende Überlegungen.

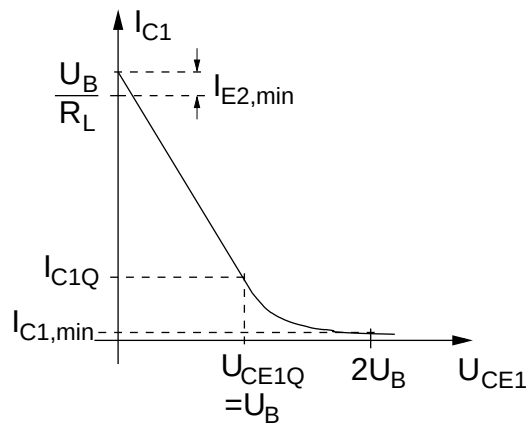


Abb. 8.19: AP-Einstellung

Mit den vorangegangenen Überlegungen können die Lastkennlinien  $I_L(U_{CE1})$ ,  $I_{C1}(U_{CE1})$ ,  $I_{C2}(U_{CE2})$  der Gegentaktstufe in Abb. 8.20 gezeichnet werden.

**Beachten:** Bei Arbeitspunkteinstellung für AB-Betrieb kann selbst der „gesperrte“ Transistor eine Basis-Emitterspannung in der Nähe der Flußspannung haben. Es gilt z. B. bei leitendem  $T_1$  für die Basis-Emitter-Spannungen bei einer Signalauslenkung um  $\Delta U$ :

$$U_{BE1} = U_{BEQ} + \Delta U, \quad U_{BE2} = U_{BEQ} - \Delta U \quad (8.74)$$

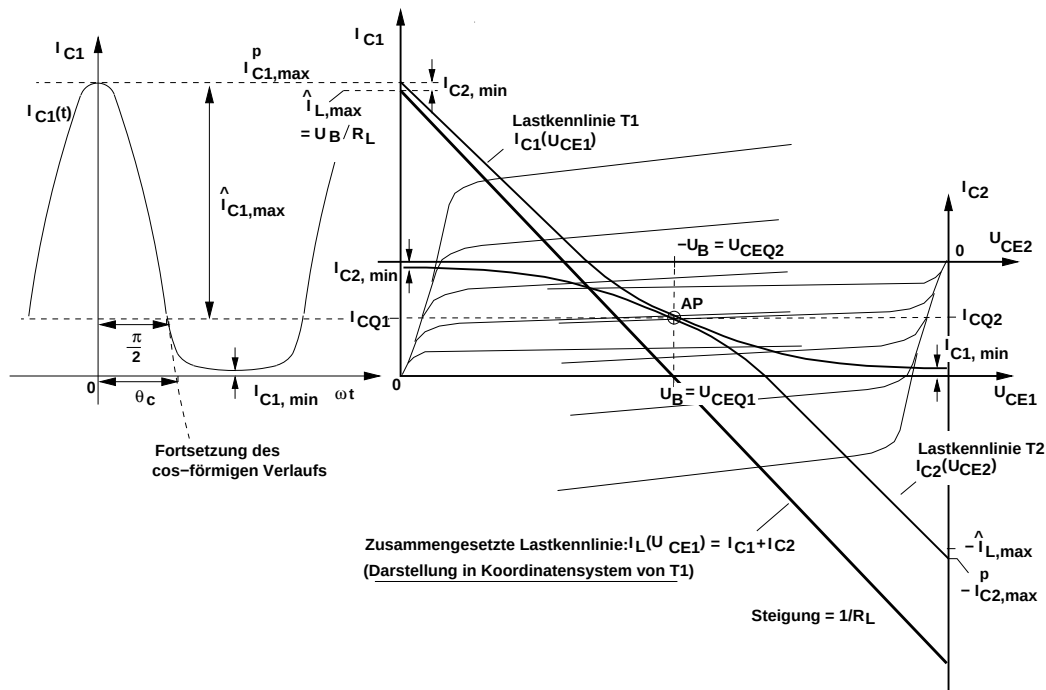


Abb. 8.20: Lage der Kennlinienfelder von  $T_1$  und  $T_2$  zueinander entsprechend den Überlegungen zu Abb. 6.2

### Beispiel:

$$\begin{aligned} U_{BEQ} &= 700 \text{ mV} \\ \Delta U &= 100 \text{ mV} \Rightarrow \frac{I_{C1,max}}{I_{C2,min}} \approx e^{\frac{200}{27}} \approx 1648 ! \end{aligned}$$

D. h.  $I_{C2,min}$  kann gegenüber  $I_{C1,max}$  sicher vernachlässigt werden ( $T_2$  ist also „gesperrt“) wobei sich  $U_{BE1} = 800 \text{ mV}$  und  $U_{BE2} = 600 \text{ mV}$  nicht signifikant unterscheiden.

Der in Abb. 8.20 dargestellte Fall weist zur Demonstration einen relativ hohen Reststrom ( $I_{C1,min}$ ,  $I_{C2,min}$ ) des nicht-leitenden Komplementärtransistors auf, der für übliche Dimensionierungen eher untypisch ist. Außer in der Umgebung des Nulldurchgangs wird die positive Halbschwingung von  $I_L$  im Wesentlichen von Transistor  $T_1$  und die negative Halbschwingung von  $T_2$  geliefert. Beide Anteile überlagern sich zu einem annähernd harmonischen

Verlauf. Es gilt für die positive Halbschwingung unter Vernachlässigung des Reststromes des Komplementärtransistors ( $I_{C2,min} \ll \hat{I}_L$ ) mit den Bezeichnungen aus Abb. 8.20 ( $I_{C1}^P$  ist der Spitzen- („P“=Peak)-Wert des Kollektorstroms)

$$\hat{I}_L \approx I_{C1}^P := I_{CQ1} + \hat{I}_{C1} . \quad (8.75)$$

Für  $\hat{I}_{C1} \geq I_{CQ1}$  arbeitet  $T_1$  im AB- oder B-Betrieb ( $I_{CQ1} \geq 0$ ).

Für  $\hat{I}_{C1} < I_{CQ1}$  arbeitet  $T_1$  im A-Betrieb.

Betrachtet wird im folgenden der erste Fall. Hier ergibt sich der Kollektorstrom von  $T_1$  unter der Annahme eines näherungsweise cos-förmigen Verlaufs im Bereich des Stromflusswinkels  $-\Theta_C \leq \omega t \leq \Theta_C$ :

$$i_{C1}(t) = \hat{I}_{C1} \cos(\omega t) + I_{CQ1} . \quad (8.76)$$

Der Strom ist gemäß Definition Null bei

$$0 = \hat{I}_{C1} \cos(\Theta_C) + I_{CQ1} . \quad (8.77)$$

Aufgrund des zwischen B und A (also AB) Betrieb gewählten AP gilt:  $\frac{\pi}{2} < \Theta_C < \pi$ . Die positive Betriebsspannung  $U_B$ <sup>35</sup> liefert entsprechend dem aus ihr gezogenen Kollektorstroms  $i_{C1}(t)$  mit (8.76) eine Leistung

$$P_{0,1} = \frac{U_B}{2\pi} \int_{-\Theta_C}^{\Theta_C} (\hat{I}_{C1} \cos(\omega t) + I_{CQ1}) d\omega t \quad (8.78)$$

$$= \frac{U_B}{\pi} (\hat{I}_{C1} \sin \Theta_C + \Theta_C I_{CQ1}) . \quad (8.79)$$

Aus Gl. (8.77) ergibt sich direkt eine Möglichkeit den darin enthaltenen Stromflusswinkel durch Ströme auszudrücken

$$\Theta_C = \arccos \left( \frac{-I_{CQ1}}{\hat{I}_{C1}} \right) \quad (8.80)$$

und mit  $\sin \Theta_C = (1 - \cos^2 \Theta_C)^{\frac{1}{2}}$

$$\hat{I}_{C1} \sin \Theta_C = \hat{I}_{C1} \left( 1 - \left( \frac{I_{CQ1}}{\hat{I}_{C1}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \hat{I}_{C1}^2 - I_{CQ1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (8.81)$$

---

<sup>35</sup>Bitte bei Vergleich mit altem Skript von Prof. Blum beachten, daß dort  $\frac{U_B}{2}$  statt  $U_B$  verwendet wurde.

Mit Gl. (8.80) und Gl. (8.81) kann in Gl. (8.79) der Stromflusswinkel eliminiert werden. Es ergibt sich die Leistung aus der positiven Betriebsspannungsquelle

$$P_{0,1} = \frac{U_B}{\pi} \left( (\hat{I}_{C1}^2 - I_{CQ1}^2)^{\frac{1}{2}} + I_{CQ1} \arccos \left( \frac{-I_{CQ1}}{\hat{I}_{C1}} \right) \right) \quad (8.82)$$

Die Herleitung für die negative Halbwelle erfolgt analog und liefert aufgrund der Symmetrie während der Stromflussphase in der negativen Betriebsspannung  $P_{0,2} = P_{0,1}$ .

Die Gesamtleistungsaufnahme aus der Versorgungsspannungsquelle beträgt also

$$P_0 = P_{0,1} + P_{0,2} = 2P_{0,1} \quad (8.83)$$

Anmerkung: Gl. (8.83) bzw. Gl. (8.82) gilt für alle  $\Theta_C$ , für die Gl. (8.77) bzw. Gl. (8.80) erfüllt ist. Dies ist auch bei C-Betrieb der Fall, obwohl dies hier nicht Gegenstand der Untersuchung ist.

Hingegen gilt nachfolgend berechneter Wirkungsgrad nicht mehr für C-Betrieb, da bei der Bestimmung der Signalleistung an  $R_L$  ein cos-förmiger Verlauf des Ausgangsstroms angenommen wird. Dies ist, wie später gezeigt wird, bei C-Betrieb nicht gegeben.

Für den hier untersuchten Bereich von B...A-Betrieb gilt mit dem Effektivwert für cos-förmigen Laststrom mit  $\hat{I}_L \approx I_{CQ1} + \hat{I}_{C1}$  nach (8.75) für die an die Last abgegebene Signalleistung:

$$P_a = \left( \frac{\hat{I}_L}{\sqrt{2}} \right)^2 R_L \approx \frac{R_L}{2} (I_{CQ1} + \hat{I}_{C1})^2 \quad (8.84)$$

wobei Symmetrie der Gegentaktseite bezüglich der negativen Halbwelle vorausgesetzt wurde:  $(I_{CQ1} + \hat{I}_{C1}) = (I_{CQ2} + \hat{I}_{C2})$ . D.h. positiver und negativer Spitzenwert sind gleich.

Damit wird der Wirkungsgrad der Gegentaktstufe bei AP-Einstellungen zwi-



schen B... A-Betrieb:

$$\eta = \frac{P_a}{P_0} = \frac{\frac{R_L}{2}(I_{CQ1} + \hat{I}_{C1})^2}{2\frac{U_B}{\pi} \left( (\hat{I}_{C1}^2 - I_{CQ1}^2)^{\frac{1}{2}} + I_{CQ1} \arccos \left( \frac{-I_{CQ1}}{\hat{I}_{C1}} \right) \right)} \quad (8.85)$$

$$\eta = \frac{\pi R_L I_{CQ1}}{4U_B} \frac{(1 + \gamma)^2}{\sqrt{\gamma^2 - 1} + \arccos \left( \frac{-1}{\gamma} \right)} \quad (8.86)$$

$$\text{mit } \gamma := \frac{\hat{I}_{C1}}{I_{CQ1}} = \frac{-1}{\cos \Theta_C} \quad (8.87)$$

$$(8.88)$$

Danach wächst  $\eta$  für  $\gamma > 1$  ( $\hat{I}_C > I_{CQ}$ ) mit  $\gamma$  monoton an. Daher ergibt sich  $\eta = \eta_{max}$  für  $\gamma = \gamma_{max}$ . Für größtmögliches  $\gamma_{max}$  ist daher  $\hat{I}_{C1}$  maximal und  $I_{CQ1}$  minimal (= 0 bei B-Betrieb) zu wählen (Maximale Aussteuerung (=Vollaussteuerung), minimaler Strom im AP).

Es soll noch der maximale Wirkungsgrad bei Vollaussteuerung in Abhängigkeit von  $\Theta_C$  untersucht werden. Bei Vollaussteuerung gilt  $\hat{I}_{C1} = \hat{I}_{C1,max}$ , wodurch sich die Abhängigkeit von  $\Theta_C$  über die Lage des AP in Form von  $I_{CQ1}$  einstellen läßt. Aus Abb. 8.19 und Abb. 8.20 lesen wir ab:

$$\hat{I}_{L,max} = \frac{U_B}{R_L} \approx I_{C1,max}^P = \hat{I}_{C1,max} + I_{CQ1} \quad (8.89)$$

$$\Rightarrow \frac{U_B}{R_L} \frac{1}{I_{CQ1}} = \frac{\hat{I}_{C1,max}}{I_{CQ1}} + 1 \quad (8.90)$$

Mit  $\frac{\hat{I}_{C1,max}}{I_{CQ1}} = \frac{-1}{\cos \Theta_C} = \gamma$  nach Gl.(8.87) folgt:

$$\Rightarrow \frac{U_B}{R_L} \frac{1}{I_{CQ1}} = 1 - \frac{1}{\cos \Theta_C} = \frac{\cos \Theta_C - 1}{\cos \Theta_C} \quad (8.91)$$

Gl. (8.91) eingesetzt in den Vorfaktor von Gl. (8.86) und Gl. (8.87) eingesetzt für  $\gamma$  liefert die gewünschte Darstellung des maximalen Wirkungsgrades in Abhängigkeit von  $\Theta_C$ :

$$\eta_{max} = \frac{\pi}{4} \frac{-\cos \Theta_C}{1 - \cos \Theta_C} \frac{(1 - \frac{1}{\cos \Theta_C})^2}{(\frac{1}{\cos^2 \Theta_C} - 1)^{\frac{1}{2}} + \Theta_C} = \frac{\pi}{4} \frac{1 - \cos \Theta_C}{\sin \Theta_C - \Theta_C \cos \Theta_C} \quad (8.92)$$

Hierbei ist berücksichtigt  $|\cos \Theta_C| = -\cos \Theta_C$  und  $|\sin \Theta_C| = \sin \Theta_C$  für den Bereich  $\frac{\pi}{2} < \Theta_C < \pi$  zwischen B- und A-Betrieb.

Grenzfälle sind der Gegentakt-B-Verstärker und der Gegentakt-A-Verstärker. Für den Gegentakt-B-Verstärker ergibt sich mit  $\Theta_C = \frac{\pi}{2}$  der maximale Wirkungsgrad  $\eta_{max} = \frac{\pi}{4} \equiv 78,5\%$  und für den Gegentakt-A-Verstärker mit  $\Theta_C = \pi : \eta_{max} = \frac{1}{2} \equiv 50\%$ , also der gleiche maximale Wirkungsgrad wie bei Eintakt-A-Verstärkern mit Übertragerkopplung.

Die Gegentaktstufe im B-Betrieb hat damit den größten Wirkungsgrad der bisher untersuchten Verstärker. Wegen ihres hohen Wirkungsgrades und ihres niederohmigen Ausgangs (Emitterfolger) wird die Gegentaktstufe bevorzugt als Ausgangstreiber („Endstufe“) eingesetzt. Bekannteste Beispiele von Gegentakt-Ausgangstreibern sind die Endstufe der HiFi-Anlage, der Ausgang von TTL-Gattern und die gesamte CMOS-Technologie. Neben der Spannungsfestigkeit ( $U_{CE} \leq 2U_B$ ) müssen die Transistoren der Gegentaktstufe auch entsprechend der in ihnen in Wärme umgesetzte Verlustleistung  $P_{tot}$  ausreichend gekühlt werden.

Wir untersuchen daher im Folgenden die Abhängigkeit der Verlustleistung von der Amplitude des Kollektorstroms in  $T_1$  bzw.  $T_2$ . Aufgrund der Symmetrie der Gegentaktstufe werden im folgenden die Indizes weggelassen. Es gilt

$$I_{CQ1} = -I_{CQ2} = I_{CQ} \quad \text{und} \quad \hat{I}_{C1} = -\hat{I}_{C2} = \hat{I}_C \quad (8.93)$$

Die von beiden Transistoren  $T_1, T_2$  „aufgenommene“ Verlustleistung ist die

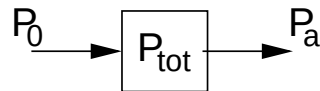


Abb. 8.21: Die, von den beiden Gegentakttransistoren aufgenommene Verlustleistung  $P_{tot}$  ist die Differenz aus zugeführter Leistung  $P_0$  und an die Last abgegebener Leistung  $P_a$ .

Differenz zwischen der von der Betriebsspannung (Quellen  $U_B$  und  $-U_B$ ) abgegebenen Leistung  $P_0$  und der von der Stufe an die Last abgegebenen Leistung  $P_a$ . Mit dem Zähler und dem Nenner von Gl. (8.85) kann direkt angegeben werden:

$$P_{tot} = P_0 - P_a = \frac{2U_B}{\pi} \left( \sqrt{\hat{I}_C^2 - I_{CQ}^2} + I_{CQ} \arccos \left( \frac{-I_{CQ}}{\hat{I}_C} \right) \right) - \frac{R_L}{2} (I_{CQ} + \hat{I}_C)^2 \quad (8.94)$$

Diese Beziehung gilt, wie schon zuvor bei der Herleitung gefordert, bei cos-förmigem Verlauf des Stromes durch die Last und bei cos-förmigem Verlauf des Kollektorstromes von  $T_1, T_2$  im Bereich des Stromflusswinkels  $\frac{\pi}{2} \leq \Theta_C \leq \pi$ , was für A-Betrieb Vollaussteuerung fordert, damit Gl. (8.77) eine Nullstelle besitzt.  $P_{tot}$  wird maximal bei gegebenem Arbeitspunkt ( $I_{CQ} = \text{const.}$ ) für einen Wert von  $\hat{I}_C(P_{tot} = P_{tot,max}) = \hat{I}_{CPX}$ . Das Maximum ergibt sich für

$$\frac{dP_{tot}}{d\hat{I}_C} = 0 = \frac{2U_B}{\pi\hat{I}_{CPX}} \sqrt{\hat{I}_{CPX}^2 - I_{CQ}^2} - R_L(I_{CQ} + \hat{I}_{CPX}) \quad (8.95)$$

wobei bei der Differentiation von Gl. (8.94) von der Identität

$$\frac{d}{d\hat{I}_C} I_{CQ} \arccos\left(\frac{-I_{CQ}}{\hat{I}_C}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{I_{CQ}}{\hat{I}_C}\right)^2}} \frac{I_{CQ}^2}{\hat{I}_C^2} \quad (8.96)$$

Gebrauch gemacht wird.

Für die Gegentaktstufe im B-Betrieb ( $I_{CQ} = 0$ ) liefert Gl. (8.95) die Amplitude

$$\frac{2U_B}{\pi} = R_L \hat{I}_{CPX} \Rightarrow \hat{I}_{CPX} = \hat{I}_C(P_{tot} = P_{tot,max}) = \frac{2U_B}{\pi R_L} \quad (8.97)$$

des Kollektorstroms eingesetzt für  $\hat{I}_C$  in Gl. (8.94) die maximale Verlustleistung:

$$\begin{aligned} P_{tot,max} &= \frac{2U_B}{\pi}(\hat{I}_{CPX} + 0) - \frac{R_L}{2}\hat{I}_{CPX}^2 \\ P_{tot,max} &= \frac{2U_B^2}{\pi^2 R_L} - \frac{R_L}{2} \left(\frac{2U_B}{\pi R_L}\right)^2 = \frac{2U_B^2}{\pi^2 R_L} \end{aligned} \quad (8.98)$$

Zum Vergleich betrachten wir die Verlustleistung in den Transistoren bei maximalem Wirkungsgrad.

Bei der Herleitung des Wirkungsgrades in Gl. (8.86) wurde festgestellt, dass sich der maximale Wirkungsgrad bei Vollaussteuerung ergibt. Bei Vollaussteuerung ist  $I_C = I_{C,max}^P \approx \frac{U_B}{R_L}$  und die Gesamt-Verlustleistung von  $T_1$  und  $T_2$  ergibt sich durch Einsetzen in Gl. (8.94) zu

$$\begin{aligned} P_{tot}(\hat{I}_C = \hat{I}_{C,max}) &= \frac{2U_B}{\pi}(\hat{I}_{C,max} + 0) - \frac{R_L}{2}\hat{I}_{C,max}^2 \\ &= \frac{2U_B}{\pi} \left(\frac{U_B}{R_L}\right) - \frac{R_L}{2} \frac{U_B^2}{R_L^2} \\ P_{tot}(\hat{I}_C = \hat{I}_{C,max}) &= \frac{2U_B^2}{\pi R_L} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = P_{tot,max} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (8.99)$$

Wir wollen uns allgemein den Verlauf von  $P_{tot}$  für eine Gegentaktstufe im B-Betrieb anschauen und dabei die beiden bereits berechneten Punkte Gl. (8.98) und Gl. (8.99) wiederfinden. Dazu formen wir die Bestimmungsgleichung (8.94) für  $P_{tot}$  etwas um und normieren die darin enthaltenen Größen:

$$\begin{aligned} P_{tot} \Big|_{B\text{-Betrieb}} &=: P_{tot,B} = P_{tot}(I_{CQ} = 0) \\ &= P_0(I_{CQ} = 0) - P_a(I_{CQ} = 0) \\ &= P_{0,B} - P_{a,B} \end{aligned} \quad (8.100)$$

mit den Größen aus Gl. (8.94)

$$P_{0,B} = \frac{2U_B}{\pi} \hat{I}_C \approx \frac{2U_B}{\pi} \hat{I}_L \quad (8.101)$$

$$P_{a,B} = \frac{R_L}{2} \hat{I}_C^2 \approx \frac{R_L}{2} \hat{I}_L^2 \quad (8.102)$$

Die Näherung von Gl. (8.102) ist für B-Betrieb gut erfüllt, da der Komplementärtransistor sperrt und keinen Beitrag liefert. Für eine allgemeingültige grafische Darstellung ist es sinnvoll Gl. (8.101), Gl. (8.102) auf die maximale Leistung  $P_{0,B,max}$  bei maximal möglichem Strom durch den Lastwiderstand  $\hat{I}_{L,max} = \frac{U_B}{R_L}$  zu normieren:

$$\frac{P_{tot,B}}{P_{0,B,max}} = \frac{P_{0,B}}{P_{0,B,max}} - \frac{P_{a,B}}{P_{0,B,max}} \quad (8.103)$$

mit

$$\frac{P_{0,B}}{P_{0,B,max}} \approx \frac{\frac{2U_B}{\pi} \hat{I}_L}{\frac{2U_B}{\pi} \hat{I}_{L,max}} = \frac{\hat{I}_L}{\hat{I}_{L,max}} \quad (8.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{a,B}}{P_{0,B,max}} &\approx \frac{\frac{R_L}{2} \hat{I}_L^2}{\frac{2U_B}{\pi} \hat{I}_{L,max}} \\ &= \frac{\pi R_L}{4U_B} \hat{I}_{L,max} \left( \frac{\hat{I}_L}{\hat{I}_{L,max}} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\hat{I}_L}{\hat{I}_{L,max}} \right)^2 \end{aligned} \quad (8.105)$$

Mit Gl. (8.104), Gl. (8.105) und Gl. (8.103) ergeben sich die in Abb. 8.22 dargestellten Verläufe der Verlustleistungen, in denen auch die speziellen Punkte für maximale Verlustleistung und maximalen Wirkungsgrad aus Gl. (8.98) und Gl. (8.99) enthalten sind.<sup>36</sup>

<sup>36</sup>Aus Sicht des Elektronikers kann somit begründet werden, dass Musik am besten sehr laut, bei Vollaussteuerung der Endstufe gehört werden muss, da dann der Wirkungsgrad am größten und die Verlustleistung der Endstufentransistoren am geringsten ist.

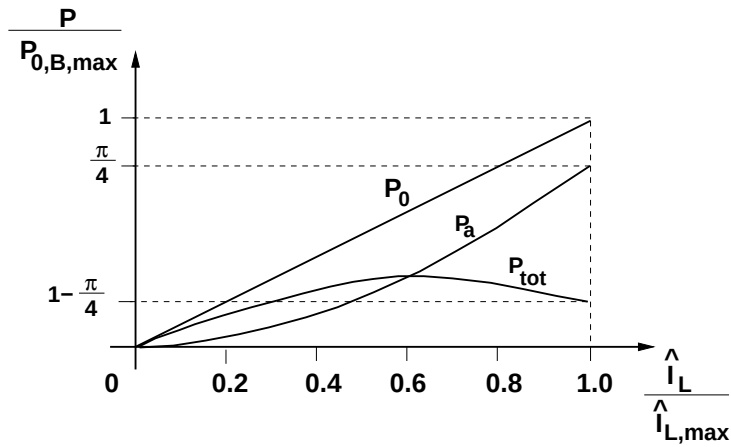


Abb. 8.22: Verlustleistungen der Gegentakt-Stufe in Abhängigkeit von der Aussteuerung.

Bisher wurde der Fall  $\hat{I}_C < I_{CQ}$  ausgenommen, da dann Gl. (8.94) wegen nicht erfüllter Gl. (8.77) nicht gilt. In diesem Fall befinden sich die Transistoren der Gegentaktstufe in A-Betrieb. Abb. (8.23) zeigt das zugehörige zusammengesetzte Ausgangskennlinienfeld. Wegen der symmetrischen Aussteuerung um den AP ist die mittlere, aus der Betriebsspannung entnommene Signalleistung gleich Null und es gilt  $P_{0,A} = 2U_B I_{CQ}$  für die Versorgungsleistung. Die Signalleistung berechnet sich wie gewohnt mit dem Effektivwert des Laststromes:

$$\begin{aligned} P_{a,A} &= \frac{1}{2} R_L \hat{I}_L^2 \approx \frac{1}{2} R_L (2\hat{I}_C)^2 \\ &\approx 2R_L \hat{I}_C^2 \end{aligned} \quad (8.106)$$

(Überlegen Sie bitte, woher die 2 in der Klammer vor  $\hat{I}_C$  in (8.106) stammt und auf welcher Näherung sie basiert.)

Die Verlustleistung der beiden Transistoren zusammen ist dann

$$P_{tot} = P_{0,A} - P_{a,A} \approx 2U_B I_{CQ} - 2R_L \hat{I}_C^2. \quad (8.107)$$

Die Verlustleistung ist also maximal bei fehlender Aussteuerung. Sie entspricht dann der, aus der Betriebsspannung aufgenommenen Leistung  $2U_B I_{CQ}$ , die sich zu gleichen Teilen auf beide Transistoren aufteilt.

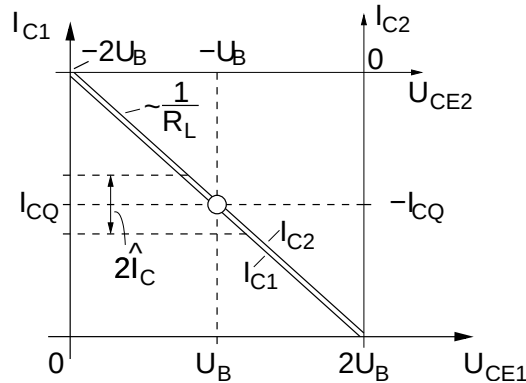


Abb. 8.23: Aus den Ausgangskennlinienfeldern von  $T_1$  und  $T_2$  zusammengesetztes Ausgangskennlinienfeld der Gegentaktstufe bei Arbeitspunkteinstellung für A-Betrieb. Gezeigt ist die Einstellung für  $I_{CQ} = \hat{I}_{C,max}$ .

### 8.4.3 Verstärker im C-Betrieb

Im C-Betrieb ist das Ausgangssignal eines Verstärkers kein lineares Abbild des Eingangssignals mehr. Bei cos-förmigem Eingangssignal fließt, wie in Abb. 8.24 gezeigt, bei einem Eintakt-Verstärker nur noch im Bereich  $-\Theta_C \leq \omega t \leq \Theta_C$ ,  $0 \leq \Theta_C < \frac{\pi}{2}$  ein Ausgangsstrom.

Aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgangssignal wird der C-Betrieb bevorzugt in schmalbandigen Sendeendstufen mit hohem Wirkungsgrad eingesetzt. Durch die scharfe Begrenzung des Ausgangsstromes entstehen neben der Grundwelle auch Oberwellen. Je nach Anwendung wird im Ausgangskreis ein Filter eingesetzt, das nur eine der Frequenzkomponenten hervorhebt und die anderen Frequenzen unterdrückt. Ist das Filter auf eine der Oberwellen abgestimmt, arbeitet der Verstärker als Frequenzvervielfacher. Aufgrund des C-Betriebs fließt in dem Transistor kein Kollektorstrom im Arbeitspunkt. ( $P_{0,Q} = 0!$ ) Bei angelegtem Signal entsteht jedoch aufgrund der Gleichrichtwirkung des C-Betriebs eine Gleichstromkomponente in Höhe des Mittelwertes des Kollektorstromes.

Wir wollen den Wirkungsgrad eines Eintaktverstärkers im C-Betrieb für die Grundwelle  $\omega_0$  berechnen. Dafür machen wir die vereinfachende Annahme, dass der Kollektorstrom im Bereich des Flusswinkels cos-förmig verläuft.

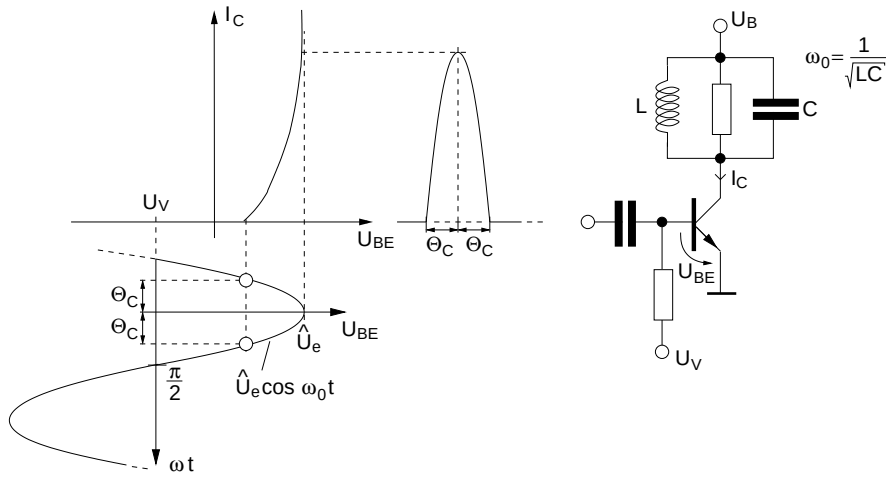


Abb. 8.24: Verstärker im C-Betrieb. Links: Steuerkennlinie mit Vorspannung  $U_V$  zur AP-Einstellung. Rechts: Prinzipschaltung eines selektiven Eintaktverstärkers für die Grundwelle  $\omega_0$ .

Es gilt dann für den Kollektorstrom

$$i_C(\omega_0 t) = \begin{cases} \hat{I}_C \cos \omega_0 t - I_{CQ} & ; -\Theta_C \leq \omega_0 t \leq \Theta_C \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases} \quad (8.108)$$

An den Grenzen des Stromflussbereiches gilt

$$i_C(\Theta_C) = 0 = \hat{I}_C \cos \Theta_C - I_{CQ} \Rightarrow I_{CQ} = \hat{I}_C \cos \Theta_C \quad (8.109)$$

Damit lässt sich der virtuelle Ruhestrom  $I_{CQ}$  aus Gl. (8.108) durch den Stromflusswinkel ersetzen und Gl. (8.108) lautet im Bereich des Stromflusswinkels:

$$i_C(\omega_0 t) = \hat{I}_C (\cos \omega_0 t - \cos \Theta_C) \quad -\Theta_C \leq \omega_0 t \leq \Theta_C \quad (8.110)$$

Der Spitzenwert des Laststromes (= Kollektorstrom) liegt bei  $\omega t = 0$  vor. Gl. (8.110) ergibt hier

$$i_C(0) = \hat{I}_L = \hat{I}_C (1 - \cos \Theta_C) \quad (8.111)$$

$$\Rightarrow \hat{I}_C = \frac{\hat{I}_L}{1 - \cos \Theta_C} \quad (8.112)$$

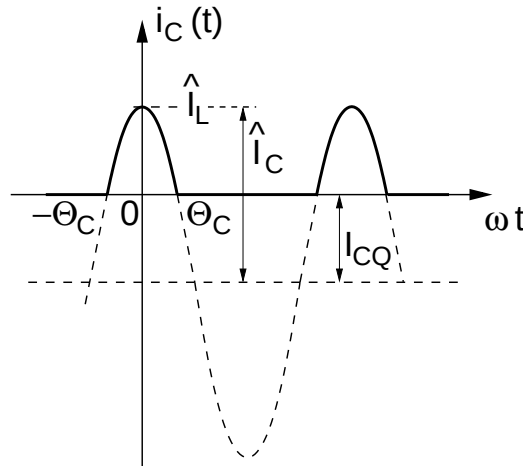


Abb. 8.25: Kollektorstrom des Eintaktverstärkers im C-Betrieb. Es fließt aufgrund des mit dem virtuellen Ruhestrom  $I_{CQ}$  im Sperrbereich vorgestellten Arbeitspunktes nur im Bereich  $-\Theta_C \leq \omega t \leq \Theta_C$  ein Strom.

Mit Gl. (8.112) kann der virtuelle Ruhestrom  $\hat{I}_C$  aus Gl. (8.110) durch den physikalisch messbaren Spitzenwert des Laststromes  $\hat{I}_L$  ersetzt werden. Es gilt für den Ausgangsstrom des Eintaktverstärkers im C-Betrieb damit allgemein:

$$i_C(\omega_0 t) = \begin{cases} \hat{I}_L \frac{\cos \omega_0 t - \cos \Theta_C}{1 - \cos \Theta_C} & -\Theta_C \leq \omega_0 t \leq \Theta_C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.113)$$

Dieser Ausgangsstrom besitzt einen Gleichanteil von

$$I_{C,DC} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Theta_C}^{\Theta_C} \hat{I}_L \frac{\cos \omega_0 t - \cos \Theta_C}{1 - \cos \Theta_C} d\omega_0 t \quad (8.114)$$

$$I_{C,DC} = \frac{\hat{I}_L}{\pi} \frac{\sin \Theta_C - \Theta_C \cos \Theta_C}{1 - \cos \Theta_C} \quad (8.115)$$

Da der Mittelwert der Wechselstromanteile im Kollektorstrom Null ist, nimmt der Verstärker nur aufgrund dieses Gleichanteils eine aus der Spannungsversorgung gelieferte Leistung

$$P_0 = I_{C,DC} U_B = \frac{U_B \hat{I}_L}{\pi} \frac{\sin \Theta_C - \Theta_C \cos \Theta_C}{1 - \cos \Theta_C} \quad (8.116)$$



auf.

Die Amplitude des Kollektorstroms (= Laststrom) bei der Nutzfrequenz (hier Grundwelle)  $\omega_0$  ergibt sich durch die Fourierzerlegung von Gl. (8.113). Es gilt in alternativer Darstellung zu Kap. 7 Gl. (7.9) für eine allgemeine periodische Funktion  $f(\omega t)$  mit der Periodendauer  $T$  die Zerlegung:

$$f(\omega t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots \\ + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (8.117)$$

Mit den Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f(\omega t) d\omega t \quad (8.118)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f(\omega t) \cos(n\omega t) d\omega t \quad (8.119)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f(\omega t) \sin(n\omega t) d\omega t \quad (8.120)$$

Da die Darstellung unseres Kollektorstroms in Gl. (8.113) eine gerade Funktion ist ( $f(x) = f(-x)$ ) sind alle  $b_n$  identisch Null. Der Koeffizient  $a_0$  wurde bereits in Gl. (8.114) zur Ermittlung des Gleichanteils benutzt. Die Komponente von  $i_C(t)$  bei der Nutzfrequenz ist  $i_{C,\omega_0}(\omega_0 t) = \hat{I}_{C,\omega_0} \cos \omega_0 t$  mit  $\hat{I}_{C,\omega_0} = a_1$  aus Gl. (8.119)

$$\hat{I}_{C,\omega_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\Theta_C}^{\Theta_C} i_C(\omega_0 t) \cos \omega_0 t d\omega_0 t \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\Theta_C}^{\Theta_C} \hat{I}_L \frac{\cos \omega_0 t - \cos \Theta_C}{1 - \cos \Theta_C} \cos \omega_0 t d\omega_0 t \quad (8.121)$$

$$= \frac{\hat{I}_L}{\pi(1 - \cos \Theta_C)} \int_{-\Theta_C}^{\Theta_C} \cos^2 \omega_0 t - \cos \Theta_C \cos \omega_0 t d\omega_0 t \quad (8.121b)$$

$$= \frac{\hat{I}_L}{\pi(1 - \cos \Theta_C)} \left[ \frac{1}{2} \omega_0 t + \frac{1}{4} \sin 2\omega_0 t - \cos \Theta_C \sin \omega_0 t \right]_{-\Theta_C}^{\Theta_C} \quad (8.121c)$$

$$= \frac{\hat{I}_L}{\pi(1 - \cos \Theta_C)} \left( \Theta_C + \frac{1}{2} \sin 2\Theta_C - \underbrace{2 \cos \Theta_C \sin \Theta_C}_{\sin 2\Theta_C} \right) \quad (8.121d)$$

$$\hat{I}_{C,\omega_0} = \frac{\hat{I}_L}{\pi} \frac{\Theta_C - \frac{1}{2} \sin 2\Theta_C}{1 - \cos \Theta_C} \quad (8.122)$$

Dies ist die Amplitude der Grundwelle  $\omega_0$  des Kollektorstroms  $i_C(t)$ .

Unter der Annahme, dass bei der Grundfrequenz die Lastimpedanz im Kollektorkreis reell wird und an ihr eine Spannungsamplitude  $\hat{U}_L(\omega_0)$  anliegt, gibt der Verstärker bei der Grundfrequenz eine Leistung

$$P_a = \frac{\hat{U}_L(\omega_0)}{\sqrt{2}} \frac{\hat{I}_{C,\omega_0}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{U}_L(\omega_0) \hat{I}_L}{2\pi} \frac{\Theta_C - \frac{1}{2} \sin 2\Theta_C}{1 - \cos \Theta_C} \quad (8.123)$$

an die Last ab.

Der Wirkungsgrad des Eintakt-C-Verstärkers für die Grundwelle beträgt demnach mit Gl. (8.116) und Gl. (8.123):

$$\eta = \frac{P_a}{P_0} = \frac{\hat{U}_L(\omega_0) \hat{I}_L}{2\pi} \frac{\Theta_C - \frac{1}{2} \sin 2\Theta_C}{1 - \cos \Theta_C} \frac{\pi}{\hat{I}_L U_B} \frac{1 - \cos \Theta_C}{\sin \Theta_C - \Theta_C \cos \Theta_C} \quad (8.124)$$

$$\eta = \frac{\hat{U}_L(\omega_0)}{4U_B} \frac{2\Theta_C - \sin 2\Theta_C}{\sin \Theta_C - \Theta_C \cos \Theta_C} \quad (8.125)$$

Bei der maximalen Aussteuerung beträgt  $\hat{U}_L(\omega_0) = U_B$ . Der Wirkungsgrad des Eintakt-C-Verstärkers bei maximaler Aussteuerung bei der Grundwelle beträgt dann mit Gl. (8.125)

$$\eta_{max} = \frac{2\Theta_C - \sin 2\Theta_C}{4(\sin \Theta_C - \Theta_C \cos \Theta_C)} \quad (8.126)$$

Als Grenzwert ergibt sich für  $\Theta_C = \frac{\pi}{2}$  der gleiche Wirkungsgrad wie für den Gegentakt-B-Verstärker von  $\eta_{max}(\Theta_C = \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$ . Dieses Ergebnis war zu erwarten, da bezüglich der Herleitung für einen Transistor der Gegentaktstufe die gleichen Annahmen gemacht wurden (Vollaussteuerung bei der Grundwelle, keine statische Verlustleistung ohne Aussteuerung). Ein anderer Grenzwert ergibt sich für  $\Theta_C = 0$  aus Gl. (8.126). Es ergibt sich nach mehrmaligen Anwenden der Regel von de l'Hôpital zu  $\eta_{max}(\Theta_C = 0) = 1$ . Leider beträgt in diesem Fall die, an den Lastwiderstand abgegebene Leistung nach Gl. (8.123) Null  $P_a(\Theta_C = 0) = 0$  (100 % einer aufgenommenen Leistung von Null werden an die Last abgegeben).

Für die Praxis interessant ist die Frage, wie sich der Wirkungsgrad in Abhängigkeit von der abgegebenen Leistung verhält. Um nicht von absoluten Größen abhängig zu sein, empfiehlt sich eine Normierung der abgegebenen Leistung. Als Normierungsparameter bietet sich die maximal abgebbare Leistung  $P_{a,max}$  an. Diese ergibt sich aus Gl. (8.123) bei maximal möglichem Stromflusswinkel für C-Betrieb von  $\theta_C = \frac{\pi}{2}$ . Dieses Ergebnis kann anhand

einfacher Überlegungen hergeleitet werden. Z.B. kann hierfür ausgenutzt werden, dass der Zähler in Gl. (8.126) eine monoton steigende bzw. der Nenner eine monoton fallende Funktion in  $\theta_C$  ist. Folglich ist  $P_a$  maximal für maximales  $\theta_C = \frac{\pi}{2}$ . Es gilt dann

$$P_{a,max} = P_a(\theta_C = \frac{\pi}{2}) = \frac{\hat{U}_L(\omega_0)\hat{I}_L}{4} \quad (8.127)$$

Die normierte, an den Lastwiderstand abgegebene Leistung beträgt damit:

$$\frac{P_a}{P_{a,max}} = \frac{2\theta_C - \sin 2\theta_C}{\pi(1 - \cos \theta_C)} \quad (8.128)$$

Mit  $0 \leq \theta_C \leq \frac{\pi}{2}$  als Parameter zur Bestimmung der normierten Leistung  $\frac{P_a}{P_{a,max}}$  nach Gl. (8.128) und des Wirkungsgrades  $\eta_{max}$  nach Gl. (8.126) ergibt sich die in Abb. (8.26) dargestellte Abhängigkeit des maximalen Wirkungsgrades (Vollauststeuerung) des Eintakt-C-Verstärkers von der, an die Last abgegebenen Signalleistung.

Große Bedeutung haben die vorangegangenen Betrachtungen, z.B. bei der

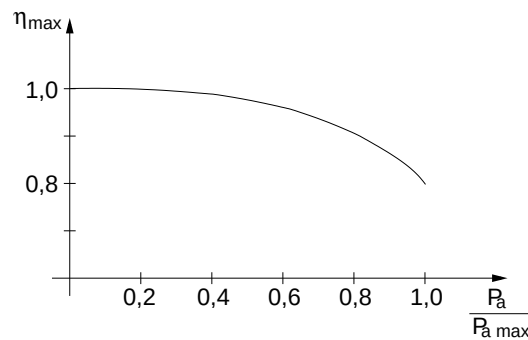


Abb. 8.26: Abhängigkeit des Wirkungsgrades eines vollausgesteuerten Eintakt-C-Verstärkers von der an die Last abgegebenen Leistung.

Entwicklung von Sendeverstärkern in Mobiltelefonen, wobei ein hoher Wirkungsgrad im wesentlichen Reichweite und Batterielebensdauer vergrößert. Beachten: Die vorangegangenen Herleitungen von Leistungen und der daraus ermittelten Wirkungsgraden basieren auf einer Vielzahl idealisierter Annahmen, die in der Praxis nur näherungsweise erfüllt sind (z.B. Vollauststeuerung mit  $U_{CE} = U_B$  ist wegen  $U_{CE} \geq U_{CEsat}$  und Widerständen / Impedanzen in der Emitterleitung nicht möglich). Auch sind für Schaltungen im praktischen Einsatz in der Regel weitere Funktionalitäten zu realisieren (z.B.

---

Kurzschlußstrombegrenzung) die den Wirkungsgrad weiter verringern. An den prinzipiellen Erkenntnissen über das Zustandekommen und die Unterschiede der Wirkungsgrade zwischen den verschiedenen Betriebsarten (6,25 % für A-Betrieb mit kapazitiver Kopplung  $\dots \approx 100\%$  bei C-Betrieb) ändern diese quantitativen Einschränkungen jedoch nichts.

## 8.5 Beispiele für die Ausführung von Leistungsverstärkern

### Beispiel 3: Verringerung von Übernahmeverzerrungen

In Bild Abb. 8.27 ist die allgemeine Struktur von Gegentaktverstärkern der Klasse AB und B dargestellt. In der Umgebung des Nulldurchgangs des Stroms durch  $R_L$  (vergleiche Bild Abb. 8.15 und Abb. 8.16) kommt es zu Übernahmeverzerrungen; diese müssen durch Gegenkopplung reduziert werden. Die Analyse ergibt unter der Voraussetzung  $r_e \gg R_p$

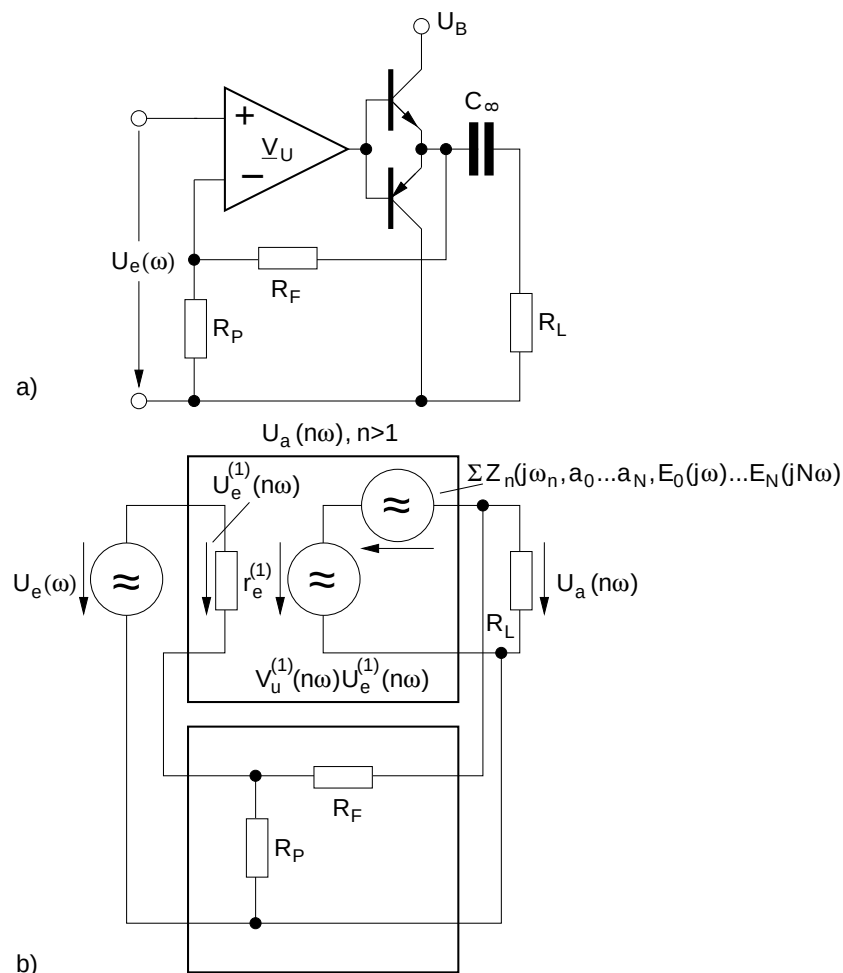


Abb. 8.27: Allgemeine Struktur von Gegentaktverstärkern.

a) Prinzipschaltung, b) Modell zur Verzerrungsanalyse.



vorgenommen. Der Transistor  $T_3$  bildet zusammen mit den Widerständen  $R_{P1}$  (oberer Teilwiderstand) und  $R_{P2}$  (unterer Teilwiderstand) des Potentiometers eine Diode mit vergrößerter Flußspannung für die gilt ( $I_B(T_3)$  vernachlässigt):

$$U_{CE}(T_3) \approx U_{BE}(T_4) - U_{BE}(T_5) \approx (1 + R_{P1}/R_{P2})U_{BE}(T_3)$$

Der Temperaturkoeffizient von  $U_{CE}$  wird mit dem gleichen Spannungsteiler-

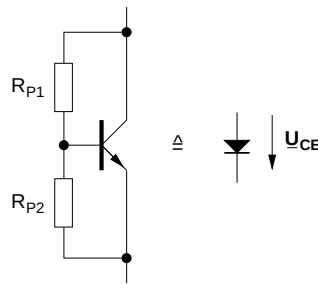


Abb. 8.29: Einfache Schaltung zur Erzeugung einer variablen Vorspannung.

verhältnis multipliziert. Zur vollen Aussteuerung von  $T_4$  ist eine Anhebung des Basispotentials von  $T_4$  über  $U_B$  bei  $I_{Bmax}$  erforderlich<sup>37</sup>. Diese Anhebung wirkt durch Mitkopplung über den Kondensator  $C_B$  („Bootstrapping“). Es gilt:

$$U_{CB} \approx \frac{R_{S1}}{R_{S1} + R_{S2}} \frac{U_B}{2} ; U_{CK} \approx \frac{U_B}{2} ;$$

hieraus folgt

$$U_{Smax} \approx \frac{U_B}{2} + \frac{R_{S1}}{R_{S1} + R_{S2}} \frac{U_B}{2} + U_{RLmax} \approx U_B \left( 1 + \frac{R_{S1}}{2(R_{S1} + R_{S2})} \right)$$

mit  $U_{RLmax} \approx \frac{U_B}{2}$ .

Entsprechend ist zur Vollaussteuerung eine Absenkung des Basispotentials von  $T_5$  unter  $\frac{U_B}{2}$  erforderlich. In gleicher Näherung ergibt sich:

$$U_{Smin} = \frac{R_{S1}}{R_{S1} + R_{S2}} \cdot \frac{U_B}{2}.$$

<sup>37</sup>In diesem Zusammenhang ist auch der Einfluss der Basisströme von  $T_4$  und  $T_5$  zu beachten.

Die maximale Signalleistung beträgt bei  $R_L = 16\Omega$   $P_{amax} \approx U_B^2/8R_L = 5.3 \text{ W}$ .

Abb. 8.30 stellt die Emitterströme der Transistoren  $T_4$  und  $T_5$  für den Betrieb als A-Verstärker und AB-Verstärker dar, bewirkt durch unterschiedliche Potentiometereinstellungen.

Anmerkungen zu Beispiel 8.5: Die Überlegungen, welcher Arbeitspunkt sich in der Schaltung einstellt, sind anhand des vollständigen Schaltplans für Ungeübte mitunter schwierig. Die dargestellte Schaltung läßt sich mit einfachen Überlegungen in die folgende Ersatzschaltung nach Abb. 8.31 überführen.

Man kann anhand dieser Ersatzschaltungen unmittelbar die folgenden Aussagen machen:

1.  $T_1$  arbeitet als Basisschaltung bezüglich der Einstellung des Arbeitspunktes.
2. Die Arbeitspunkteinstellung arbeitet als Regelkreis.

3. Näherungsweise Berechnung des Arbeitspunktes:  $U_Q \approx \frac{U_B}{2}$   
 $\Rightarrow$  Arbeitspunkt in der Mitte des Aussteuerbereiches:  $\frac{(\frac{U_B}{2} - U_V)}{R_{S1} + R_{S2}} = I_{C,T2}$

Mit Näherung  $U_V \approx U_{BE} \approx 0,8 \text{ V} \Rightarrow I_{C,T2} \approx \frac{13 \text{ V} - 0,8 \text{ V}}{538\Omega} \approx 23 \text{ mA}$

$\Rightarrow U_x \approx \frac{U_B}{2}, \quad U_y \approx \frac{160}{260} U_B = 16 \text{ V} \quad (I_{B,T1} \text{ vernachlässigt})$

$\Rightarrow I_{C,T1} \approx \frac{(U_y - U_x)}{R_F} = \frac{16 \text{ V} - 13 \text{ V}}{4,7 \text{ k}\Omega} \approx 0,64 \text{ mA}$ .

Bei idealem  $T_2 \Rightarrow U_{BE} = 0,64 \text{ mV}$ .

Bei realem  $T_2 \Rightarrow B \approx 230 \Rightarrow I_{B,T2} = 0,1 \text{ mA} \Rightarrow U_{BE} \approx (0,64 - 0,1) \text{ mA} \cdot 1 \text{ k}\Omega \approx 540 \text{ mV}$ .

Die Näherungsrechnung ergibt also einen sinnvollen (wegen der Größenordnung) Wert, der eher etwas zu klein ist (600...700 mV realistischer) aufgrund der starken Vereinfachung der Berechnung.

Verstärkungsberechnung: WS-ESB Wir betrachten die vereinfachte Schaltung des Leistungsverstärkers nach Abb. 8.32. Durch Bootstrap-Kondensator  $C_B$  liegt auf der Seite y von  $R_{S1}$  fast die gleiche Wechselspannung wie an x.



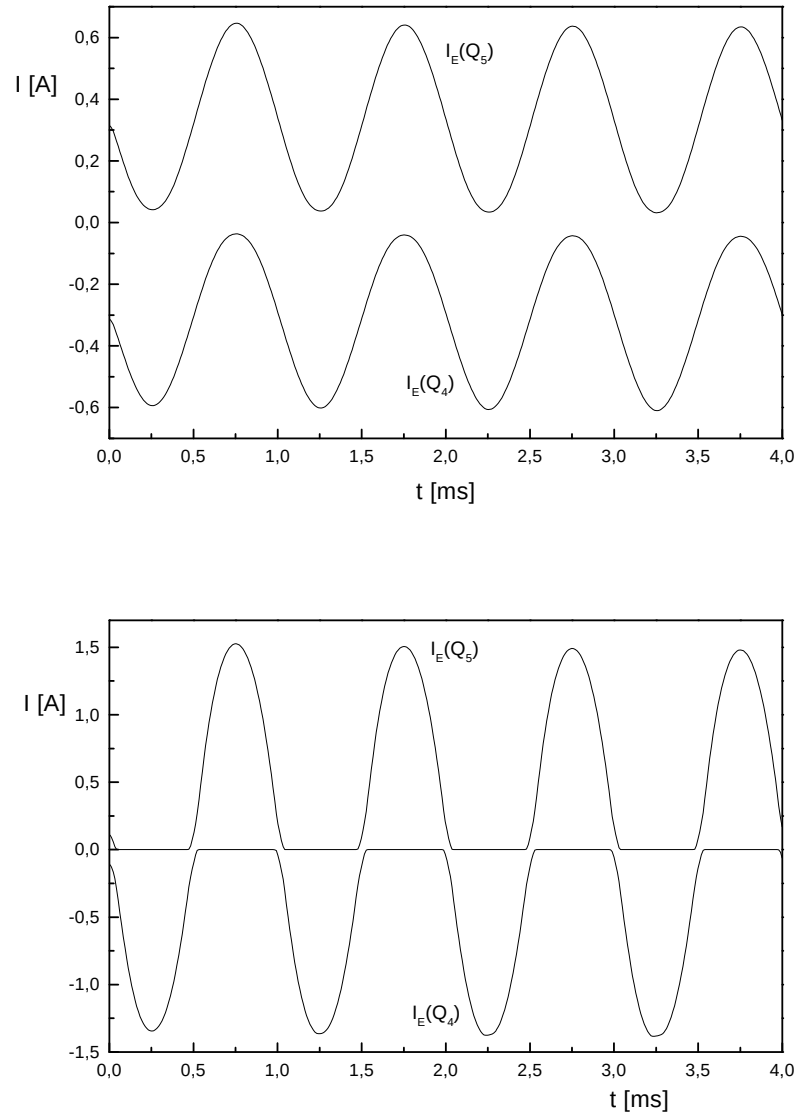


Abb. 8.30: Emitterströme der Gegentaktstufen-Transistoren. Oben: Vorspannungseinstellung im A-Betrieb. Unten: Einstellung für AB-Betrieb.

Dadurch wird  $R_{S1}$  um den Faktor  $\frac{1}{1-v}$  vergrößert ( $v = \frac{U_y}{U_x}$ ). Da  $T_4$  als Emitterfolger betrieben wird, ist  $v \approx 1$  und es gilt:  $\frac{1}{1-v}R_{S1} = R_{S1}^* \gg R_{S1}$ . Da

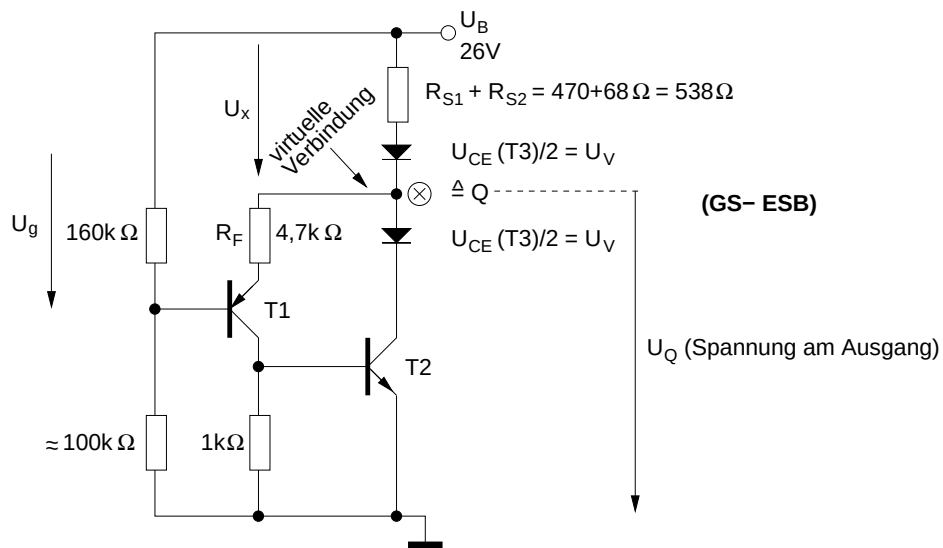


Abb. 8.31: Ersatzschaltung für den Leistungsverstärker nach Abb. 8.28

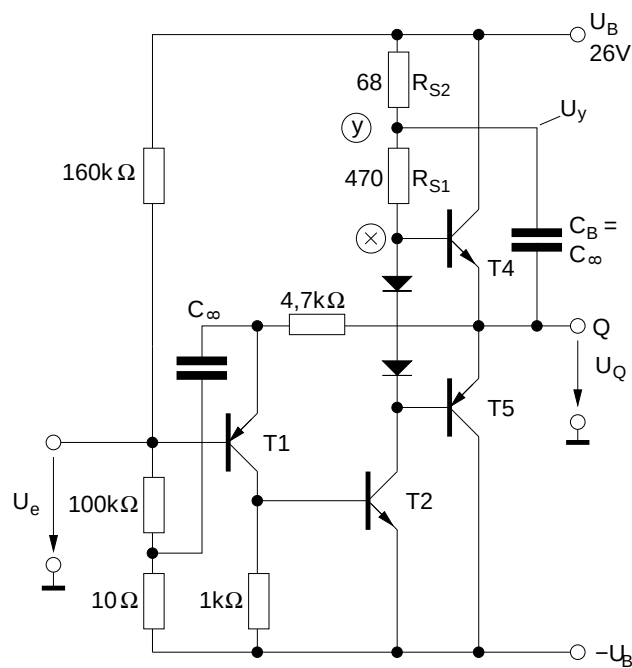


Abb. 8.32: Vereinfachte Schaltung des Leistungsverstärkers nach Abb. 8.28 als Grundlage für die Verstärkungsberechnung.

$U_{BE,T_4}$  klein ist (Wechselstrom) gilt näherungsweise:

$$U_x \approx U_Q = U_y$$

Damit läßt sich das vereinfachte WS-ESB (Gegentaktstufe wurde weggelassen, da  $U_Q \approx U_y$ ) in Abb. 8.33 zeichnen. Da  $F_a$  sehr groß ist läßt sich die Gesamtverstärkung einfach abschätzen

$$F = \frac{U_a}{U_e} = \frac{F_a}{1 + F_a F_2} \approx \frac{1}{F_2} = \frac{4710}{10} = 471 \quad (8.131)$$

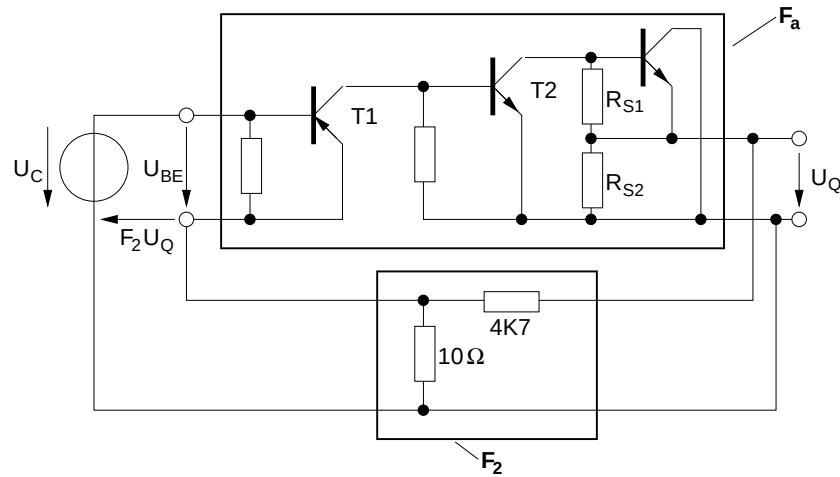


Abb. 8.33: Wechselstrom Ersatzschaltbild der Schaltung nach Abb. 8.32. Der Verstärker ist aufgrund der nicht erfüllten Torbedingung als 4-Pol zu behandeln.

### **Beispiel 5:** Integrierte Leistungsverstärker

Bei integrierten Leistungsverstärkern ist eine Kompensation von Parameterstreuungen bei der Arbeitspunkteinstellung mit Hilfe eines Potentiometers wie bei der Schaltung des vorangegangenen Beispiels 8.5 nicht möglich. Deshalb ist hier eine andere Schaltungstechnik erforderlich. In Bild Abb. 8.34 ist die Grundstruktur einer Klasse-B-Gegentaktstufe in integrierter Schaltungstechnik dargestellt.

Die Dioden  $D_1$  bis  $D_3$  bilden eine Konstantspannungsquelle zur Arbeitspunkteinstellung der Endstufentransistoren  $T_3|T_4$  und  $T_5|T_6$ . Diese Dioden haben gleiches thermisches Verhalten wie die Basis - Emitter - Dioden der Transistoren  $T_3$  bis  $T_5$ . Die Transistoren  $T_3$  und  $T_4$  bilden einen Darlington -

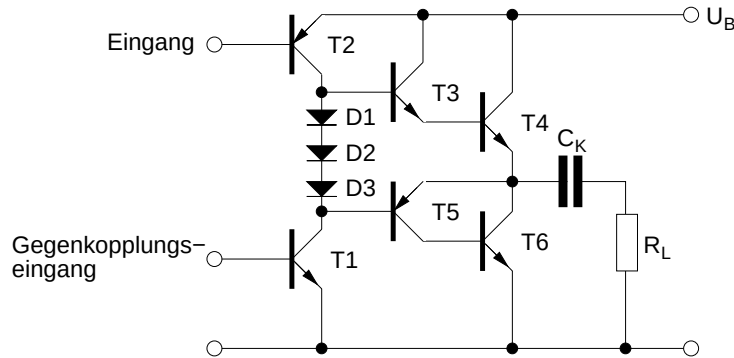


Abb. 8.34: Grundstruktur einer Klasse-B-Gegentaktendstufe.

Transistor mit der Stromverstärkung  $\beta_{AC} = \beta_{AC3}\beta_{AC4}$  und die Transistoren  $T_5$  und  $T_6$  einen PNP - Transistor mit der Stromverstärkung  $\beta_{AC} = \beta_{AC5}\beta_{AC6}$ . Nachteilig bei dieser Schaltung ist die relativ große Restspannung. Sie beträgt beim oberen Schaltungsteil

$$U_{Ro} = U_{BE}(T_3) + U_{BE}(T_4) + U_{ECsat}(T_2) \geq 1.5V , \quad (8.132)$$

und beim unteren Schaltungsteil

$$U_{Ru} = U_{BE}(T_6) + U_{ECsat}(T_5) \geq 0.8V . \quad (8.133)$$

In Bild Abb. 8.35 ist eine modifizierte Struktur mit geringeren Restspannungen dargestellt. Bei der Struktur des Verstärkers von Bild Abb. 8.34 können die Transistoren  $T_4$  und  $T_6$  deswegen nicht voll angesteuert werden, weil das Basispotential nicht das Kollektorpotential erreichen kann. Hier wird nun durch 'Bootstrapping' über  $C_B$  ähnlich wie bei der Schaltung des Beispiels 2 die Sättigung des Transistors  $T_3$  verhindert. Durch Einfügen des Emitterfolgers  $T_7$  und der Dioden  $D_1$  bis  $D_3$  liegt das Emitterpotential von  $T_5$  stets um zwei Diodendurchlaßspannungen über dem Kollektorpotential von  $T_6$ , so daß  $T_6$  auch bei  $U_{CEsat}(T_5)$  voll angesteuert werden kann. Es gilt also hier

$$\min(U_{CE,T_4}) = U_{CEsat}(T_4) , \quad (8.134)$$

$$\min(U_{CE,T_6}) = U_{CEsat}(T_6) . \quad (8.135)$$

Der Durchlaßstrom für die nur schwach in Durchlaßrichtung gepolten Dioden  $D_1$  bis  $D_3$  wird von einer Konstantstromquelle geliefert, die als Stromspiegelschaltung (siehe nächstes Kapitel) realisiert ist. Diese liefert

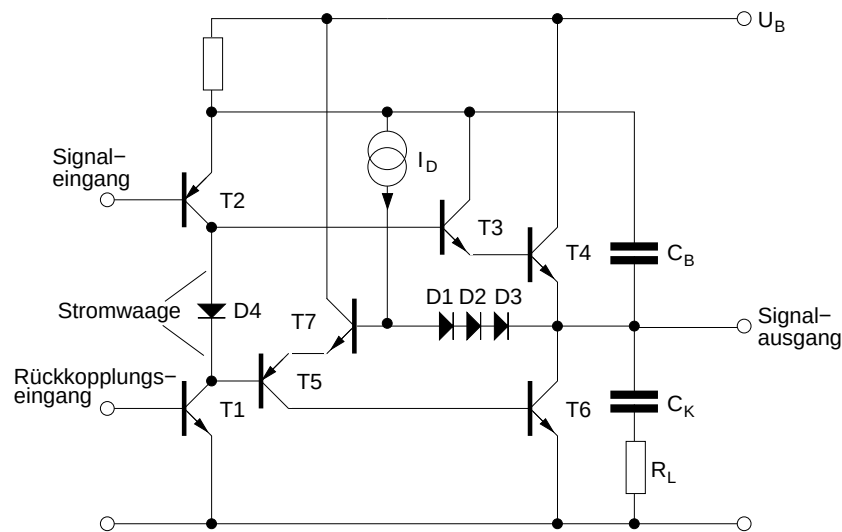


Abb. 8.35: Modifizierte Struktur einer Klasse - B - Gegentaktendstufe mit reduzierten Restspannungen.

auch den Basisstrom für den Transistor  $T_7$ , so daß der Emitterstrom von  $T_5$  und der Strom durch die Dioden  $D_1$  bis  $D_3$  voneinander entkoppelt sind. Durch die Diode  $D_4$ , die ebenfalls als Konstantspannungsquelle wirkt, ergibt sich eine Arbeitspunkteinstellung für B - Betrieb. Ein vollständiger integrierter Leistungsverstärker enthält noch eine Treiberstufe sowie Hilfschaltungen gegen Überlastungen. Das Beispiel 8.5 zeigt die Beschaltung eines integrierten Leistungsverstärkers.

#### Anmerkung zur Schaltungsanalyse

Besonders bei der Analyse integrierter Schaltungen mit vielen Transistoren gilt die Regel, dass die Funktion und die Arbeitspunkte der Schaltung nur über leitende Diodenstrecken (speziell Basis-Emitter) festgelegt werden. Kollektoren und damit auch C-B und C-E Strecken sind als Stromquellen zu betrachten deren Potential „beliebig“ sein kann und das über leitende Strecken bestimmt wird.

Um also z.B. das Potential an  $D_4$  im letzten Beispiel zu bestimmen, muss vom Ausgang über die leitenden B-E-Strecken rückwärts gerechnet werden. Die Stromwaage, die  $T_1$  und  $T_2$  aufbauen, führt dazu, dass der Differenzstrom von  $I_{C,T_1}$  und  $I_{C,T_2}$  den Basisstrom von  $T_3$  bzw.  $T_5$  stellt.

Ebenso werden  $T_4$  und  $T_6$  in einer Darlington Konfiguration betrieben, in der sie über Ströme gesteuert werden. Die Folge ist ein Verstärker mit sehr hoher Verstärkung. Die Eigenschaften des Verstärkers lassen sich über eine Rückkopplung definieren, wodurch die Übertragungsfunktion die Inverse der Rückkopplungsfunktion ist. Durch die Rückkopplung wird der Verstärker auch unabhängig von den, in integrierten Schaltungen üblichen hohen  $\beta$ -Schwankungen.

Zum Nachdenken:

- wohin fließt der Strom  $I_D$  (Stromkreis)?
- warum ist der Kollektorstrom von  $T_3$  an den Emitter von  $T_2$  angeschlossen?

**Beispiel 6:** Beschaltung des integrierten OP-Verstärker nach Abb. 8.35

Abb. 8.36 zeigt eine mögliche Beschaltung des integrierten Verstärkers aus Abb. 8.35, der als Operationsverstärker aufgefasst werden kann.

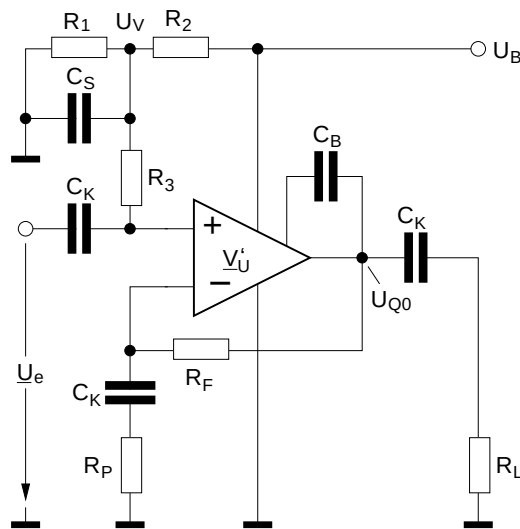


Abb. 8.36: Beschaltung eines Operationsverstärkers als (Leistungs)Verstärker mit nur einer Betriebsspannung.

Die Ruhespannung  $U_{Q0}$  wird mit Hilfe eines Spannungsteilers  $R_1$ ,  $R_2$  festgelegt.  $C_S$  dient zur Tiefpaßfilterung der Gleichspannung,  $R_3$  zur Entkopplung von  $C_S$  vom Verstärkereingang. Die Eingangsgleichströme sind sehr gering, ebenso ist die Differenz - Eingangsgleichspannung sehr klein, so daß sich durch Gegenkopplung  $U_{Q0} \approx U_V = (R_1/(R_1 + R_2))U_B$

eingestellt. Es gilt  $\underline{V}_U \approx (R_F + R_P)/R_P \approx R_F/R_P$ . Warum ist  $C_B$  nicht in der integrierten Schaltung? Zum Schluß dieses Abschnitts wird noch ein HF - Leistungsverstärker vorgestellt.

**Beispiel 7:** HF-Leistungsverstärker (Abb. 8.37)

Der in Abb. 8.37 gezeigte NF-Verstärker besitzt eine Dimensionierung für  $f_0 = 175\text{MHz}$ ,  $V_P = 10$ ,  $\eta = 0,5$ . Die Bauelementewerte für diese Dimensio-

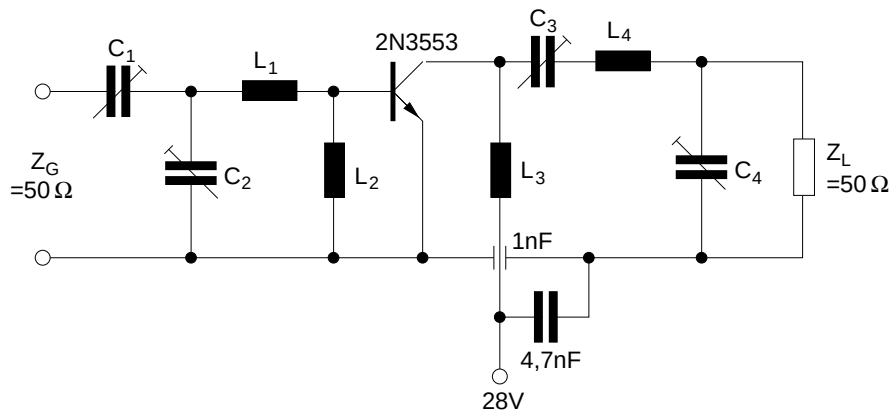


Abb. 8.37: HF - Leistungsverstärker der Klasse B und mit einer Modifikation der Klasse C.

nierung betragen:

$C_1 \dots C_4$ : 3 ... 35 pF einstellbar

$L_1$ : 2 Wdg. 8mm  $\phi$

$L_3$ : 2 Wdg. 7mm  $\phi$

$L_4$ : 4 Wdg. 6mm  $\phi$

versilberter Kupferdraht 1mm  $\phi$

$L_2$  Ferritperle

Zur Abschätzung der Induktivität einer Luftpule nach Abb. 8.38 gilt z.B. eine Faustformel nach Meinke-Gundlach:

$$\frac{L}{nH} \approx \frac{22n^2 \frac{D}{cm}}{1 + 2,2 \frac{l}{D}}, \quad l > 0,3D \quad (8.136)$$

n=Anz. der Windungen

Für C-Betrieb muß in die Emitterleitung ein Widerstand eingefügt wer-

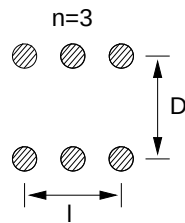


Abb. 8.38: Luftspule mit  $n=3$  Windungen des Durchmessers  $D$ .

den, dessen Selbstinduktion zu berücksichtigen ist und dem ein Kondensator parallel geschaltet wird, so daß das Netzwerk bei seiner Parallelresonanz betrieben wird. Für  $\omega L \gg R$  gilt  $Z_{res} = L/(RC)$  mit  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ .

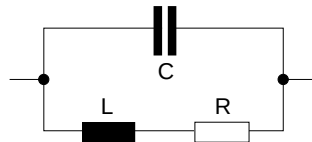


Abb. 8.39: HF-Ersatzschaltung eines diskreten Widerstandes mit nicht zu vernachlässigender Selbstinduktion. Die zwischen den Anschlüssen liegenden Widerstandskapazität kann durch Parallelschaltung einer weiteren Kapazität auf den Wert  $C$  vergrößert werden.



## 9 Kopplung von Verlustleistung und Arbeitspunkt

Bereits in Kapitel 4.2 wurde die Stabilität des Arbeitspunktes eines Verstärkers im A-Betrieb aufgrund einer Temperaturabhängigkeit des Kollektorstroms untersucht. Es ergab sich das Prinzip der halben Versorgungsspannung.

Neben Parametern, die vom Anwender für die Erzielung einer bestimmten Eigenschaft oder Funktion einer Schaltung geändert werden, stellt die Änderung der Temperatur den in der Regel größten unbeabsichtigten Einfluß auf eine Schaltung dar. Temperaturveränderungen können aufgrund einer sich ändernden Umgebungstemperatur auftreten (Spezifikationswerte:  $-55 \dots -20 \dots +120 \dots 160^\circ\text{C}$ ). Sie können aber auch aus der Schaltung oder dem Gerät selbst kommen, wenn z.B. verschiedene Funktionsmodi mit unterschiedlichen Verlustleistungen aktiviert werden.

Aufgrund der Temperaturabhängigkeit von Schaltungsparametern ändert sich mit der Temperatur der Arbeitspunkt. Ein geänderter Arbeitspunkt wiederum bedeutet eine Änderung der Verlustleistung und damit wiederum der Temperatur.

Für den Schaltungsentwickler ist es daher von Interesse festzustellen, in wie weit in diesem verkoppelten Kreis, eine thermische Mit- oder Gegenkopplung vorliegt. Im Folgenden wollen wir daher die Reaktion der Temperatur eines Verstärkertransistors mit Kühlung auf einen sich aufgrund eines sich mit der Temperatur ändernden AP-Stromes betrachten. Die Änderung des AP-Stromes mit der Temperatur soll definiert werden mit der Empfindlichkeit

$$S_I := \left. \frac{\partial I_{CQ}}{\partial T} \right|_{T=T_U} \quad (9.1)$$

Dabei steht  $T_U$  für die Umgebungstemperatur (in Kap. 4.3 mit  $T_a$  bezeichnet). Die Sperrschichttemperatur  $T_j$  eines bei Umgebungstemperatur gelagerten Verstärkertransistors beträgt im Einschaltmoment ebenfalls  $T_U$ , steigt dann aber an, bis sie im stationären Zustand ( $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ) den Wert  $T_j = T_S$  erreicht.

Im Folgenden soll nur der stationäre Zustand betrachtet werden.

Nach (4.48) gilt im stationären Zustand

$$T_S - T_U = R_{\Theta SU} P_{tot}(T_S). \quad (9.2)$$

$R_{\Theta SU}$  ist darin die Summe aller Wärmewiderstände zwischen Sperrschicht und der Umgebung mit der Temperatur  $T_U$ .

Betrachten wir jetzt die Abhängigkeit der Verlustleistung  $P_{tot}$  eines Transistors von seiner Sperrschichttemperatur und modifizieren Gl. (9.2) entsprechend. In einem einfachen Modell wird die Änderung der Verlustleistung, wie in Abb. 9.1 gezeigt, durch lineare Approximation beschrieben.

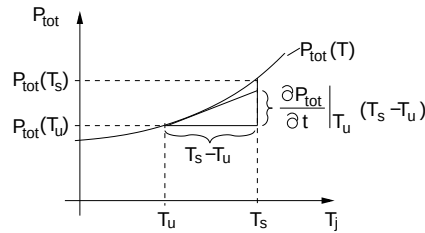


Abb. 9.1: Beispielverlauf für die Abhängigkeit der Verlustleistung eines Transistors von seiner Sperrschicht-Temperatur.

Bei geeignetem Verlauf von  $P_{tot}(T_j)$  oder bei kleinen Änderungen  $T_S - T_U$  ergibt dies hinreichende Genauigkeit. Es gilt dann für das lineare Modell:

$$P_{tot}(T_S) = P_{tot}(T_U) + \left. \frac{\partial P_{tot}}{\partial T} \right|_{T_j=T_U} (T_S - T_U) \quad . \quad (9.3)$$

Umstellen von Gl. (9.2) nach  $P_{tot}(T_S)$  und Gleichsetzen mit Gl. (9.3) liefert nach Umstellen die zu untersuchende Temperatur-Kopplung:

$$T_S = T_U + \frac{R_{\Theta SU} P_{tot}(T_U)}{1 - R_{\Theta SU} \left. \frac{\partial P_{tot}}{\partial T} \right|_{T_U}} \quad (9.4)$$

Weist der Transistor in der Schaltung keine Abhängigkeit seiner Verlustleistung von der Temperatur auf ( $\frac{\partial P_{tot}}{\partial T} = 0$ ), geht Gl. (9.4) wieder in Gl. (9.2) über, da keine Kopplung vorliegt.

Im Folgenden sollen die bisher untersuchten Ein- und Gegentaktverstärker hinsichtlich ihrer Temperaturkopplung untersucht werden. Von Interesse ist dabei der Nenner, der den Einfluss der Kopplung berücksichtigt. Es gilt mit der Abkürzung

$$N_{\Theta} := 1 - R_{\Theta SU} \left. \frac{\partial P_{tot}}{\partial T} \right|_{T_U} \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} 0 < N_\Theta < 1 & \Rightarrow \text{thermische Mitkopplung} \\ N_\Theta > 1 & \Rightarrow \text{thermische Gegenkopplung} \end{aligned}$$

da im ersten Fall der stationäre Wert der Sperrschichttemperatur  $T_S$  in Gl. (9.4) gegenüber dem ungekoppelten Fall ( $N_\Theta = 1$ ) steigt, bzw. im gekoppelten zweiten Fall fällt.

Wir formen noch mit Hilfe der Definition Gl. (9.1)

$$\left. \frac{\partial P_{tot}}{\partial T} \right|_{T_U} = S_I \frac{\partial P_{tot}}{\partial I_{CQ}} \quad (9.6)$$

um und erhalten mit Gl. (9.4) die endgültige Version der Beziehung zur Bestimmung der Sperrschichttemperatur in Abhängigkeit von der Empfindlichkeit  $S_I$  des Arbeitspunkt-Stromes von der Temperatur:

$$T_S = T_U + \frac{R_{\Theta SU} P_{tot}(T_U)}{1 - R_{\Theta SU} S_I \left. \frac{\partial P_{tot}}{\partial I_{CQ}} \right|_{T_U}} \quad (9.7)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung untersuchen wir zunächst einen Eintakt-Verstärker der Klasse A mit direkter Ankopplung des Lastwiderstandes nach Abb. 8.7(b) Seite 177. Die Verlustleistung des Transistors (d.h. ohne  $R_E, R_L$ ) berechnet sich mit:

$$U_{CE} = U_B - I_{CQ}(R_E + R_L) - i(t)R_L \quad (9.8)$$

$$i_C = I_{CQ} + i(t); \quad i(t) = \hat{I}_C \cos \omega t \quad (9.9)$$

zu

$$P_{tot} = \frac{1}{T} \int_T [U_B - I_{CQ}(R_E + R_L) - i(t)R_L][I_{CQ} + i(t)] dt. \quad (9.10)$$

Darin sind die Integrale mit  $i(t)$  identisch null, da der Mittelwert der cos-Funktion über eine Periode identisch Null ist. Es ergibt sich

$$P_{tot} = \frac{1}{T} \int_T U_B I_{CQ} dt - \frac{1}{T} \int_T I_{CQ}^2 (R_E + R_L) dt - \frac{1}{T} \int_T R_L i^2(t) dt \quad (9.11)$$

$$= U_B I_{CQ} - I_{CQ}^2 (R_E + R_L) - \frac{R_L}{T} \hat{I}_L^2 \underbrace{\int_T \cos^2(\omega t) dt}_{\frac{T}{2}} \quad (9.12)$$

$$P_{tot} = \underbrace{U_B I_{CQ}}_{\substack{\text{Leistung aus} \\ \text{Versorgungsspannung}}} - \underbrace{I_{CQ}^2 (R_E + R_L)}_{\substack{\text{statische Leistung} \\ \text{an } R_E, R_L}} - \underbrace{\frac{R_L}{2} \hat{I}_L^2}_{\text{Wechselleistung}}. \quad (9.13)$$

$R_E$  besitzt keinen Wechselleistungsanteil, da er kapazitiv bei der Signalfrequenz kurzgeschlossen ist. Zur Vereinfachung wollen wir im Folgenden nur den statischen Anteil der Verlustleistung betrachten, also den Betrag  $R_L/2 \hat{I}_L^2$  vernachlässigen. Diese Näherung ist bei kleiner Aussteuerung (z.B.  $\hat{I}_L < \frac{I_{CQ}}{2}$ ) gut erfüllt. Da die maximale Verlustleistung gerade im Fall ohne Aussteuerung ( $\hat{I}_L = 0$ ) auftritt, stellt diese Näherung den Sonderfall für maximale Verlustleistung am Transistor dar. Wir betrachten also

$$P_{tot,max} = U_B I_{CQ} - I_{CQ}^2 (R_E - R_L) \quad (9.14)$$

Mit

$$\frac{\partial P_{tot,max}}{\partial I_{CQ}} = U_B - 2I_{CQ}(R_E - R_L) \quad (9.15)$$

erhalten wir für die Sperrschichttemperatur des Eintakt-Klasse-A-Verstärkers bei kleiner Aussteuerung durch Gl. (9.7)

$$T_S = T_U + \frac{R_{\Theta SU} I_{CQ} (U_B - I_{CQ} (R_E - R_L))}{1 - R_{\Theta SU} S_I (U_B - 2I_{CQ} (R_E - R_L))} \quad (9.16)$$

Es liegt, wie mit Gl. (9.5) demonstriert thermische Mitkopplung vor für:

$$0 < 1 - R_{\Theta SU} S_I (U_B - 2I_{CQ} (R_E - R_L)) < 1 \quad (9.17)$$

Für  $S_I > 0$  ist diese Forderung gleichbedeutend damit, dass der Ausdruck in der Klammer nicht negativ werden darf, also

$$\text{Gl. (9.17)} \Leftrightarrow U_B > 2I_{CQ} (R_E - R_L) \quad (9.18)$$

Für den, in der Entwicklung angestrebten Fall der thermischen Gegenkopplung kehrt sich die Ungleichung (9.18) um in die Forderung

$$U_B < 2I_{CQ} (R_E - R_L) = 2(U_B - U_{CE}), \quad (9.19)$$

die umgestellt das bereits bekannte Prinzip der halben Versorgungsspannung

$$U_B > 2U_{CEQ} \quad (9.20)$$

ergibt.

Aufgrund der allgemeineren Herleitung besteht anhand von Gl. (9.13) auch die Möglichkeit den Einfluss der Signalaussteuerung über den Term  $\frac{R_L}{2}\hat{I}_L^2$  zu berücksichtigen. Dabei ist zu beachten, dass  $\hat{I}_L$  je nach Art der Ansteuerung des Verstärkers auch eine Funktion von  $I_{CQ}$  sein kann. Allgemein gilt bei kapazitiv überbrücktem  $R_E$ :  $\hat{I}_C = g_m \hat{U}_e = \frac{I_{CQ}}{U_T} \hat{U}_e$ ; Linearität bei maximaler Aussteuerung vorausgesetzt.

Für Gegentaktverstärker (Klasse AB und B) ist von Gl. (8.94) auszugehen. Aus ihr folgt

$$\frac{\partial P_{tot}}{\partial I_{CQ}} = \frac{2U_B}{\pi} \arccos\left(\frac{-I_{CQ}}{\hat{I}_C}\right) - R_L(I_{CQ} + \hat{I}_C). \quad (9.21)$$

Für den B-Betrieb gilt  $I_{CQ} = 0$  und damit wird aus Gl. (8.94)  $P_{tot} = \frac{2U_B}{\pi}\hat{I}_C - \frac{1}{2}R_L\hat{I}_C^2$  und aus Gl. (9.21)  $\frac{\partial P_{tot}}{\partial I_{CQ}} = U_B - R_L\hat{I}_C$ . Einsetzen in Gl. (9.7) liefert

$$T_S = T_U + \frac{R_{\Theta SU}((\frac{2U_B}{\pi})\hat{I}_C - \frac{1}{2}R_L\hat{I}_C^2)}{1 - R_{\Theta SU}S_I(U_B - R_L\hat{I}_C)} \quad (9.22)$$

Betrachten wir wieder den Nenner von Gl. (9.22), so stellen wir fest, dass bis zur Vollaussteuerung von  $R_L\hat{I}_C = U_B$  thermische Mitkopplung vorliegt, da der Nenner  $< 1$  ist. Bei Vollaussteuerung ist die thermische Kopplung aufgehoben (Nenner = 1) und es gilt

$$T_S = T_U + R_{\Theta SU} \frac{2U_B^2}{R_L} \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right). \quad (9.23)$$

Bei geringer Aussteuerung ist eine thermische Mitkopplung vorhanden. Für Gegentaktverstärker der Klasse A ist von Gl. (8.107) auszugehen, da mit  $I_{CQ}(T_S) > I_{CQ}(T_U)$  keine Vollaussteuerung mehr vorhanden ist, wenn  $\hat{I}_C$  konstant gehalten wird. Dabei ergibt sich

$$T_S = T_U + \frac{R_{\Theta SU}(I_{CQ}U_B - 2R_L\hat{I}_C^2)}{1 - R_{\Theta SU}S_I U_B} \quad (9.24)$$

Für  $S_I > 0$  (für Feldeffekt-Transistoren kann eine analog der Gl. (9.1) definiertes  $S_I < 0$  sein) ist also eine thermische Mitkopplung vorhanden. Die Mitkopplung kann hinreichend klein gehalten werden, durch:

- möglichst kleines  $S_I$ , erreichbar durch Einbau von Emitterwiderständen
- möglichst kleines  $R_{\Theta SU}$ , erreichbar durch Wärmabfuhr über einen ausreichend dimensionierten Kühlkörper (vgl. Kap. 5)

## 10 Schaltungsstrukturen mit bestimmten Eigenschaften und Funktionen (für integrierte Analogschaltungen)

In den letzten Kapiteln wurden einfache Verstärker mit ihren Eigenschaften betrachtet und Methoden zur Einstellung und Stabilisierung des Arbeitspunktes gezeigt. In diesem Kapitel befassen wir uns mit Schaltungen, die bestimmte Eigenschaften oder Funktionen besitzen, aufgrund derer sie für die funktionale Erweiterung und Verbesserung von Verstärkern verwendet werden. Diese Schaltungen sind von so grundlegender Bedeutung, dass sie in fast jeder Art von integrierter Schaltung anzutreffen sind. (Bspl.: Operationsverstärker, Spannungsregler, Logikschaltungen z.B. TTL-Gatter).

Aufgrund des zeitlichen Rahmens der Vorlesung werden in diesem Kapitel geeignete Näherungen und Annahmen verwendet, die die Demonstration der gewünschten Eigenschaft in den Vordergrund stellen. Ob und wie weit diese Annahmen erfüllt sind und welche Änderungen oder zusätzliche Eigenschaften sich bei Abweichungen von den Annahmen ergeben, muss bei dem Einsatz einer Schaltung geklärt werden. Worauf im Speziellen zu achten ist, hängt von den Parametern ab, die für die Leistungsfähigkeit der Gesamtschaltung wichtig sind (z.B. Basis-Ströme bei hochohmigen Schaltungen, WS-ESB bei Schaltungen mit hoher Grenzfrequenz, Symmetrie und Technologiegrenzen bei Schaltungen für kleine Spannungen und Ströme).

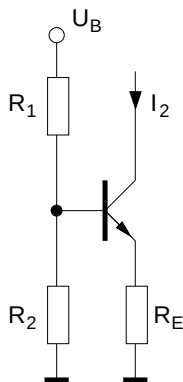
Die hier gezeigten Betrachtungsweisen eignen sich hervorragend für die beim Schaltungsentwurf wichtige intuitive Vorgehensweise. Sie ermöglichen auch komplexe Schaltungen zu analysieren, indem die Gesamtschaltung auf hier gezeigte einzelne Teilschaltungen heruntergebrochen wird.

Die hier gezeigten Schaltungen werden bevorzugt in integrierter Form eingesetzt, da die dort gegebenen, besonderen technologischen Möglichkeiten es erlauben, Elemente mit besonders angepassten Eigenschaften zu realisieren (z.B. gleicher Temperaturgang,  $U_{BE}$  Anpassung (Matching), Skalierung). Durch die drastische Reduktion parasitärer Elemente und Effekte (Gehäusekapazität, Anschlussinduktivität, ...) können integrierte Schaltungen in physikalische Grenzbereiche der eigentlichen Bauelemente vorstoßen, die mit diskreter Aufbautechnik nicht erreichbar sind.

Dazu ist es notwendig, sich genauer mit den nichtidealen Eigenschaften der hier gezeigten Schaltungen zu beschäftigen. Dabei zeigt sich, dass bei genauer Kenntnis der Eigenschaften, diese sogar vorteilhaft bei der Optimierung eingesetzt werden können. Nach dieser Methode entwickelte Schaltungen erzielen weit bessere Ergebnisse, als von der einfachen Theorie, die auf eine bloße Minimierung der Einflüsse zielt, zu erwarten wäre. Dies ist eines der Themen, der weiterführenden Vorlesung Elektronik III – Entwicklung integrierter Hochgeschwindigkeitsschaltungen.

## 10.1 Stromquellen und Stromspiegel

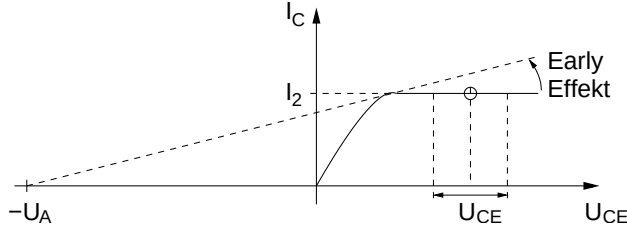
Sowohl Stromquellen als auch Stromspiegel werden je nach Anwendung für Wechselströme als auch für Gleichströme eingesetzt. Eine einfache Variante der Stromquelle kennen wir bereits in Form des Transistors im A-Betrieb, für dessen Kollektorstrom unter Vernachlässigung des Basistroms gilt:



$$I_2 = \frac{1}{R_E} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_B - U_{BE} \right) \quad (10.1)$$

Aufgrund der idealisierten Steuerkennlinie  $I_C \approx I_S e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$  wird über die Basis-Emitter-Spannung  $U_{BE}$  ein Kollektorstrom  $I_2 = I_C$  eingestellt. Dieser Kollektorstrom ist unter Vernachlässigung des wesentlichsten nichtidealen Einflusses, des Early Effektes (und Miller Effektes bei Wechselstrom-Betrachtung), unabhängig von  $U_{CE}$  und damit auch unabhängig von der Lastimpedanz. Abb. 10.1 zeigt diesen Sachverhalt anhand des Ausgangskennlinienfeldes des Transistors.

Der Strom dieser Quelle lässt sich nach Gl. (10.1) über das Spannungsteilverhältnis  $R_1/R_2$  sowie über  $R_E$  einstellen. Nachteile dieser einfachen Quelle sind die Abhängigkeit des „konstanten“ Stromes von der Betriebsspannung

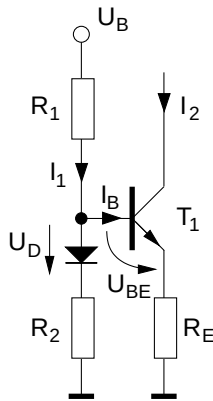


Ohne Early-Effekt:

$$I_2(U_{CE}) \approx \text{const.} \quad (10.2)$$

 Abb. 10.1: Ohne Early-Effekt ( $U_A \rightarrow \infty$ ) ist der Kollektorstrom unabhängig von  $U_{CE}$ .

sowie über  $U_{BE}$  von der Temperatur (vgl. hierzu Kap. 4). Als Maßnahme zur Stabilisierung des Arbeitspunktes gegenüber Temperatureinflüssen wurde, wie in Abb. 10.2 gezeigt, nach Kap. 4 in Reihe zu  $R_2$  eine Diode geschaltet, die im Idealfall die gleichen Eigenschaften wie die Basis-Emitter-Diode des Transistors aufweist. Es gilt mit  $I_B \approx 0$ :



$$I_2 = \frac{1}{R_E} \left( \frac{U_B - U_D}{R_1 + R_2} R_2 + U_D - U_{BE} \right) \quad (10.3)$$

Abb. 10.2: Konstantstromquelle mit Diode zur Temperaturkompensation.

Bei Anpassung des Temperaturganges der Diode an die Basis-Emitterstrecke gilt z.B.  $U_{BE} = U_D$  und Gl. (10.3) vereinfacht sich zu

$$I_2 = \frac{1}{R_E} \frac{U_B - U_D}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{R_2}{R_E} I_1 \quad (10.4)$$

Darin stellt der Faktor  $(U_B - U_D)/(R_1 + R_2) = I_1$  den Strom durch den Basis-Spannungsteiler bei Vernachlässigung von  $I_B$  dar. Bezieht man den Quellstrom auf den Eingangsstrom  $I_1$  ergibt sich die Grundgleichung des einfachen, temperaturkompensierten Stromspiegels mit Gegenkopplung:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_2}{R_E} \quad (10.5)$$



D. h. das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsstrom eines gegengekoppelten Stromspiegels hängt nur vom Verhältnis seiner Gegenkopplungswiderstände ab. Für  $R_E < R_2$  arbeitet der Stromspiegel als linearer Stromverstärker. Der Stromspiegel funktioniert auch bei Wechselströmen, jedoch ist die Grenzfrequenz von  $I_2$  niedriger als bei Spannungssteuerung des Transistors. Zur Übung sollte überlegt oder berechnet werden, warum.

Ein Nachteil des Stromspiegels mit Gegenkopplung ist der Spannungsabfall an den Gegenkopplungswiderständen der gerade in Schaltungen mit niedriger Betriebsspannung störend ist. Dieser Nachteil wird durch den in Abb. 10.3 dargestellten einfachen Stromspiegel ohne Gegenkopplung vermieden.

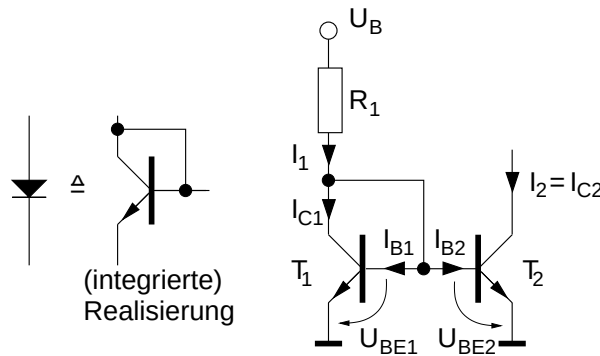


Abb. 10.3: Einfacher temperaturkompensierter Stromspiegel mit Gegenkopplung.

Unter Vernachlässigung der Basisströme ( $I_{C1} \approx I_1$ ) gilt

$$\begin{aligned} U_{BE1} &\approx U_T \ln \frac{I_1}{I_{S1}} = U_{BE2} \approx U_T \ln \frac{I_2}{I_{S2}} \\ \Rightarrow \ln \frac{I_1}{I_{S1}} &\approx \ln \frac{I_2}{I_{S2}} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} \approx \frac{I_{S2}}{I_{S1}} \end{aligned} \quad (10.6)$$

D. h. das Stromverhältnis des nicht gegengekoppelten Stromspiegels wird in erster Näherung über das Verhältnis der Sättigungsströme eingestellt. Aus den Grundlagen der Transistorthorie wissen wir, dass diese näherungsweise proportional zur Emitterfläche  $A_E$  des jeweiligen Transistors sind. Tatsächlich schwanken die Sättigungsströme der Transistoren aufgrund weiterer Abhängigkeiten aber stärker, als anhand eines reinen Flächenverhältnisses zu erwarten wäre<sup>38</sup>. Dadurch kommt es zu Toleranzen im Stromverhältnis

<sup>38</sup>Dies ist ein Vorteil der Variante mit Gegenkopplungswiderständen nach Gl. (10.5), da diese in der Regel ein besseres „Matching“ aufweisen als die Sättigungsströme.

und unerwünschten Abhängigkeiten (z.B. von der Temperatur). Der weiten Verbreitung dieser wichtigen Schaltung hat dies jedoch keinen Einhalt geboten, da die Schaltungsentwickler Methoden zur Verbesserung des Mismatch entwickelt haben und vor Einsatz der Schaltung diese auf die Auswirkung eines „Parameter-Mismatch“ untersuchen (Gegenstand der Vertiefungsvorlesung).

Aufgrund ihrer zentralen Bedeutung als Grundsaltung für Stromspiegel wollen wir uns die Schaltung etwas genauer ansehen. Wir berücksichtigen nun auch den Early-Effekt.

Wird der aufgrund der Vergrößerung der Kollektor-Basis-Raumladungszone (Verringerung der effektiven Basisweite), bei steigendem  $U_{CE}$  beobachtete Anstieg des Kollektorstroms als Gerade approximiert, so gilt für die beiden Transistoren

$$I_{C1} = I_{S1} \left( 1 + \frac{U_{CE1}}{U_A} \right) e^{\frac{U_{BE1}}{U_T}} = I_{S1} V_{A1} e^{\frac{U_{BE1}}{U_T}} \quad (10.7)$$

$$I_{C2} = I_{S2} \left( 1 + \frac{U_{CE2}}{U_A} \right) e^{\frac{U_{BE2}}{U_T}} = I_{S2} V_{A2} e^{\frac{U_{BE2}}{U_T}} \quad (10.8)$$

$$\text{mit } V_{A1} = 1 + \frac{U_{CE1}}{U_A} \approx 1 \text{ wegen } U_{CE1} \approx U_{BE1} \ll U_A \quad (10.9)$$

$$V_{A2} = 1 + \frac{U_{CE2}}{U_A}; \quad 1 < V_{A2} < 2 \quad (10.10)$$

Der Wertebereich des Faktors  $V_{A2}$  aufgrund des Early-Effektes wird in den meisten Anwendungen, für die  $U_{CE} < U_A$  gilt, zwischen 1...2 liegen. Für  $T_1$  ist  $U_{CE} = 0^{39}$  und damit  $V_{A1} = 1$ .

Die Stromverstärkung wird bei Berücksichtigung des Early Effektes ebenfalls abhängig von  $U_{CE}$  und wir können mit Gl. (10.7) ... (10.10) schreiben

$$\beta_{0A1} = \frac{I_{C1}}{I_{B1}} = V_{A1} \beta_0 \approx \beta_0 \quad (10.11)$$

$$\beta_{0A2} = \frac{I_{C2}}{I_{B2}} = V_{A2} \beta_0 \quad (10.12)$$

Dabei gehen wir zur Vereinfachung von der Näherung aus, dass beide Transistoren das gleiche  $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0$  besitzen. Umstellen von (10.11) und

<sup>39</sup>Strenggenommen muss anstelle  $U_{CE}$  die innere Spannung  $U_{C'E'}$  genommen werden, so dass nur  $V_{A1} \approx 1$  gilt.

(10.12) nach  $I_{C1}$  bzw.  $I_{C2}$  und Gleichsetzen mit (10.7) und (10.8) liefert den bekannten Zusammenhang

$$I_{C1} = I_{S1} e^{\frac{U_{BE1}}{U_T}} = \beta_0 I_{B1} \quad (10.13)$$

$$I_{C2} = I_{S2} V_{A2} e^{\frac{U_{BE2}}{U_T}} = \beta_0 V_{A2} I_{B2} . \quad (10.14)$$

Wir berechnen zuerst das Übersetzungsverhältnis des Stromspiegels mit Early Effekt. Es gilt für die Ströme der Zusammenhang (vgl. Schaltung in Abb. 10.3):

$$I_1 = I_{C1} + I_{B1} + I_{B2} = (1 + \beta_0) I_{B1} + I_{B2} . \quad (10.15)$$

Den Zusammenhang zwischen  $I_{B1}$  und  $I_{B2}$  erhält man durch Division von (10.13) und (10.14) mit  $U_{BE1} = U_{BE2}$ :

$$\frac{I_{S1}}{I_{S2}} = \frac{I_{B1}}{I_{B2}} . \quad (10.16)$$

Einsetzen von (10.16) in (10.15) liefert

$$I_1 = \left( (1 + \beta_0) \frac{I_{S1}}{I_{S2}} + 1 \right) I_{B2} \quad (10.17)$$

mit (10.12)

$$I_1 = \left( (1 + \beta_0) \frac{I_{S1}}{I_{S2}} + 1 \right) \frac{I_{C2}}{V_{A2} \beta_0} . \quad (10.18)$$

Das Übersetzungsverhältnis des Stromspiegels mit Early-Effekt ist also

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{\left( (1 + \frac{1}{\beta_0}) \frac{I_{S1}}{I_{S2}} + \frac{1}{\beta_0} \right) \cdot \frac{1}{V_{A2}}} \approx \frac{1}{1 + \frac{2}{\beta_0}} \quad (10.19)$$

Die Näherung gilt für den Fall:  $\frac{I_{S1}}{I_{S2}} = 1$ ,  $V_{A2} = 1$  (kein Early-Effekt). Für  $\beta_0 \gg 1$  ergibt Gl. (10.19) die Näherung

$$\frac{I_2}{I_1} \approx \frac{I_{S2}}{I_{S1}} V_{A2} = \frac{I_{S2}}{I_{S1}} \left( 1 + \frac{U_{CE2}}{U_A} \right) . \quad (10.20)$$

D.h. bei konstantem Eingangsstrom  $I_1$  steigt der Ausgangsstrom  $I_2$  des Strompegels mit größer werdender Kollektor-Emitter-Spannung.

Wir betrachten jetzt den Ausgangswiderstand des Stromspiegels.

Ohne Early Effekt ist aufgrund des horizontalen Verlaufs der Ausgangskennlinie ersichtlich, dass der Ausgangswiderstand unendlich groß sein muss. Bei Betrachtung höherer Frequenzen wird die Ausgangsimpedanz im wesentlichen durch die Summe aller zwischen Kollektor und Masse liegenden Kapazitäten gebildet und nimmt endliche Werte an.

Bei Berücksichtigung des Early-Effektes bleibt auch bei tiefen Frequenzen der Ausgangswiderstand endlich. Wir ermitteln zur Vereinfachung anstelle des Ausgangswiderstandes, den differentiellen Ausgangsleitwert bei Aussteuerung um einen Arbeitspunkt  $U_{CE2,Q}$  für die Näherung  $\beta_0 \gg 1$  mit Hilfe von Gl. (10.20):

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{I_{S2}}{I_{S1}} \left( 1 + \frac{U_{CE2}}{U_A} \right) I_1 \\ \Rightarrow g_a &= \left. \frac{\partial I_2}{\partial U_{CE2}} \right|_{U_{CE2}=U_{CE2,Q}} = \frac{I_{S2}}{I_{S1}} \frac{I_1}{U_A} \end{aligned} \quad (10.21)$$

Für intuitive Überlegungen lässt sich einfach merken:

$$g_a \sim I_1 \sim I_2 \quad \text{und} \quad g_a \sim \frac{1}{U_A} \quad (10.22)$$

Eine möglichst gute Stromquelle erhält man also für kleine Ströme und große Early-Spannungen. Bei einem 1:1 Stromspiegel mit  $I_{S1} = I_{S2}$  geht

$$g_a = \frac{I_1}{U_A} = \frac{I_2}{U_A} = g_{0,T_2} \quad (10.23)$$

in den Ausgangsleitwert des Transistors  $T_2$  über.

Um mit der bisher behandelten einfachen Stromspiegelschaltung kleine Ströme  $I_2$  zu erzeugen ist wegen  $I_2 \sim \frac{1}{R_1}$  ein großer Widerstand  $R_1$  und wegen  $I_S \sim A_E$  ein im Vergleich zu  $T_1$  kleiner Transistor  $T_2$ . Die Probleme bei einer solchen Dimensionierung liegen in einer hohen Toleranz und hohem Flächenbedarf bei der Realisierung eines hochohmigen Widerstandes. Bei der Verringerung der Fläche  $A_{E,T_2}$  von  $T_2$  liegt die Grenze bei der für eine Technologie gegebenen minimalen Emitterlänge, wodurch  $A_{E,T_1}$  im Vergleich sehr groß werden muss.

Eine Schaltungsvariante des Stromspiegels, die ohne diese Einschränkungen auskommt, ist der „Widlar-Stromspiegel“ in Abb. 10.4.

Wir wollen das Stromübersetzungsverhältnis bestimmen: Es gelten unter Berücksichtigung des Early-Effektes weiterhin Gl. (10.7) und Gl. (10.8) (Gl. (10.9)–Gl. (10.12) gelten natürlich auch):

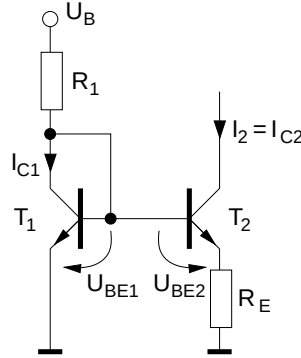


Abb. 10.4: Widlar-Stromspiegel.

$$I_{C1} = I_{S1} e^{\frac{U_{BE1}}{U_T}} \quad (10.24)$$

$$I_{C2} = I_{S2} V_{A2} e^{\frac{U_{BE2}}{U_T}} \approx I_{S2} V_{A2} e^{\frac{U_{BE1} - R_E I_{C2}}{U_T}} \quad (10.25)$$

Umstellen von Gl. (10.25) nach

$$e^{\frac{U_{BE1}}{U_T}} = \frac{I_{C2}}{V_{A2} I_{S2}} e^{\frac{R_E I_{C2}}{U_T}} \quad (10.26)$$

und einsetzen in (10.24) liefert das Stromübersetzungsverhältnis

$$I_{C1} = I_{S1} \frac{I_{C2}}{V_{A2} I_{S2}} e^{\frac{R_E I_{C2}}{U_T}} \quad (10.27)$$

$$\frac{I_{C2}}{I_{C1}} = \frac{I_{S2}}{I_{S1}} V_{A2} e^{\frac{-R_E I_{C2}}{U_T}}. \quad (10.28)$$

Im Vergleich zum einfachen Stromspiegel in Gl. (10.20) hat der Widlar-Stromspiegel noch den Faktor  $e^{\frac{-R_E I_{C2}}{U_T}}$ , der das Übersetzungsverhältnis bestimmt. Über den Spannungsabfall  $R_E I_{C2}$  kann bei vorgegebenem Ausgangsstrom  $I_{C2}$  das Übersetzungsverhältnis exponentiell verändert werden. Die Dimensionierungsvorschrift für  $R_E$  erhält man durch Umstellen von Gl. (10.28) nach  $R_E$ .

Durch die Gegenkopplung mit  $R_E$  steigt der Ausgangswiderstand der Quelle.

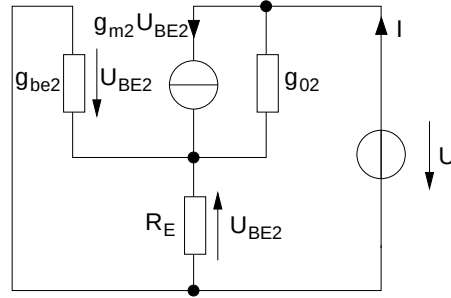


Abb. 10.5: Kleinsignal-Ersatzschaltbild des Stromquellentransistors  $T_2$  bei Annäherung des Quellenwiderstandes an der Basis ( $T_1$ ) durch einen Kurzschluss.

Zur Berechnung benutzen wir das Kleinsignal-Ersatzschaltbild für niedrige Frequenzen und nehmen an, dass die Basis-Emitterdiode von  $T_1$  (Widerstand  $\approx \frac{1}{g_m}$ ) niederohmig gegen den Eingangswiderstand von  $T_2$  ist.

Es ergibt sich dann das Ersatzschaltbild in Abb. 10.5, für das mit Überlagerungssatz und der Abkürzung

$$g_E := g_{be2} + \frac{1}{R_E} \quad (10.29)$$

gilt:

$$I = \frac{U}{\frac{1}{g_{02}} + \frac{1}{g_E}} + \frac{g_E}{g_{02} + g_E} g_{m2} U_{BE2}; \quad U_{BE2} = -\frac{I}{g_E} \quad (10.30)$$

$$= \frac{U}{\frac{1}{g_{02}} + \frac{1}{g_E}} - \frac{g_{m2}}{g_{02} + g_E} I \quad (10.31)$$

$$I \left( 1 + \frac{g_{m2}}{g_{02} + g_E} \right) = \frac{U}{\frac{1}{g_{02}} + \frac{1}{g_E}} = \frac{g_{02} g_E}{g_{02} + g_E} U \quad (10.32)$$

$$g_a = \frac{I}{U} = \frac{g_{02} g_E}{g_{02} + g_E + g_{m2}} = \frac{g_{02}}{1 + \frac{g_{02} + g_{m2}}{g_E}} = \frac{g_{02}}{1 + \frac{g_{02} + g_{m2}}{g_{be2} + \frac{1}{R_E}}} \quad (10.33)$$

$$\text{mit } g_{02} \ll g_{m2} \text{ und } g_{be2} = \frac{g_{m2}}{\beta_{0T2}} \ll R_E^{-1}$$

$$g_a \approx \frac{g_{02}}{1 + g_{m2} R_E / (1 + g_{be2} R_E)} \approx \frac{g_{02}}{1 + g_{m2} R_E} \quad (10.34)$$

Der Ausgangswiderstand der Stromquelle wird also umso größer, je höher der Spannungsabfall  $I_{C2} R_E$  an  $R_E$  ist (wegen  $g_{m2} R_E = \frac{I_{C2} R_E}{U_T}$ ). Dieses Ergebnis

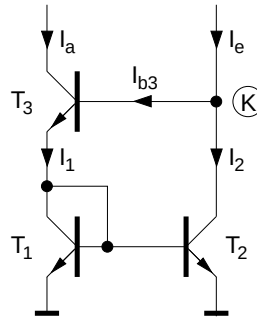


Abb. 10.6: Wilson-Stromspiegel.

gilt auch für den gegengekoppelten Stromspiegel nach Gl. (10.3) solange der Zweig aus Diode und  $R_2$  niederohmig gegenüber dem Eingangswiderstand von  $T_2$  mit  $R_E$  ist.

Sind noch höhere Ausgangswiderstände als in Gl. (10.34) und eine größere Unempfindlichkeit des Übersetzungsverhältnisses gegenüber Schwankungen/Toleranzen der Stromverstärkung als in Gl. (10.19) erforderlich, muss der einfache Stromspiegel durch Hinzunahme eines weiteren Transistors verbessert werden. Eine Schaltung, die beide Anforderungen sehr gut erfüllt, ist der Wilson-Stromspiegel, der aufgrund seiner verbesserten Eigenschaften auch als Präzisions-Stromspiegel bezeichnet wird. Die Präzisionseigenschaft ergibt sich besonders für ein Übersetzungsverhältnis von Eins.

Die Schaltung des Wilson-Stromspiegels ist in Abb. 10.6 dargestellt. Versuchen Sie einmal zu überlegen, wie er funktioniert (keine größeren Rechnungen!).

Man erkennt sofort den einfachen Stromspiegel aus  $T_1$  und  $T_2$ , der bereits untersucht wurde. Das Problem dieses Stromspiegels war, dass er aufgrund endlich großer Werte für  $\beta_0$  nicht das durch die Transistorflächen vorgegebene Übersetzungsverhältnis besitzt und damit das Übersetzungsverhältnis abhängig von  $\beta_0$  ist.

Wie hilft  $T_3$  gegen dieses Problem?<sup>40</sup>

**Lösungsweg 1:** Sofort Gleichungen aufstellen und rechnen (einfach, da  $\frac{I_2}{I_1}$

<sup>40</sup>Gleichbedeutend mit dieser Frage ist die Frage: „Wie kommt ein Schaltungsentwickler auf die Idee, einen Transistor dieser Art in die Schaltung einzufügen (und zu glauben, dass er hilft)?“

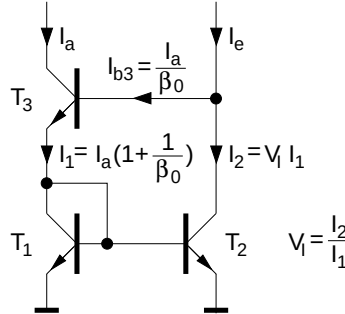


Abb. 10.7: Strombilanz am Wilson-Stromspiegel.

aus Gl. (10.19) bekannt).

**Lösungsweg 2:** Zuerst intuitive Analyse der Schaltungsfunktion; dann Gleichungen gezielt aufstellen und lösen.

Beide Wege führen zu dem gleichen Ergebnis. Lösungsweg 2 bringt jedoch zusätzlich ein Verständnis für die Funktion der Schaltung, das bei einer weiteren Optimierung oder Änderung der Schaltung vorteilhaft eingesetzt werden kann.

Wir gehen hier Lösungsweg 2: Bei Betrachtung der Schaltung fällt auf, dass gegenüber den bisher behandelten Stromspiegeln in dieser Schaltung eine Rückkopplung existiert. Der Basisstrom von  $T_3$  wird gebildet aus einem Teil des Eingangsstroms  $I_e$  und dem über den Stromspiegel  $T_1, T_2$  rückgeführten Ausgangsstrom  $I_a \approx I_1$ . Die Verknüpfung der drei Zweige im Knoten (K) stellt eine Stromwaage dar: Nur die Differenz zwischen  $I_e$  und  $I_2$  steuert als Basisstrom den Transistor  $T_3$ . Dessen Ausgangsstrom gelangt wieder über den Stromspiegel zurück an den Knoten K und verändert die Bilanz der Stromsumme. Ein Gleichgewicht der Waage tritt dann ein, wenn der zurückgeführte Strom  $I_2$  genau so groß ist, dass der daraus resultierende Strom  $I_{b3}$  über die Rückführung wieder genau  $I_2$  ergibt. Einer Störung dieser Gleichgewichtslage regelt (Proportionalglied) die Schaltung entgegen. Mathematisch lässt sich diese Strombilanz mit Hilfe des Übersetzungsverhältnisses  $v_I = \frac{I_2}{I_1}$  des einfachen Stromspiegels nach Gl. (10.19) einfach aufstellen:<sup>41</sup>

$$I_a \left( 1 + \frac{1}{\beta_0} \right) v_I + \frac{I_a}{\beta_0} = I_e, \quad (10.35)$$

<sup>41</sup>Wir nehmen zur Vereinfachung ein gleiches  $\beta_0$  für alle Transistoren an.



$$\frac{I_a}{I_e} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\beta_0}\right) v_I + \frac{1}{\beta_0}} . \quad (10.36)$$

Es gilt näherungsweise  $V_{A2} = 0$  (kein Early-Effekt), da  $T_2$  eine geringe Kollektor-Emitter-Spannung hat. Nach Einsetzen von Gl. (10.19) für  $v_I$  und kurzer Rechnung ergibt sich

$$\frac{I_a}{I_e} = \frac{1}{\left(\frac{I_{S1}}{I_{S2}} + \frac{1}{1+\beta_0}\right)^{-1} + \frac{1}{\beta_0}} \quad (10.37)$$

Um festzustellen, ob dies ein von  $\beta_0$  unabhängigeres Ergebnis ist, als beim einfachen Stromspiegel, betrachten wir den Sonderfall des Übersetzungsverhältnisses gleich Eins ( $\frac{I_{S1}}{I_{S2}} = 1$ ) und formen Gl. (10.37) geeignet um.

Bei der Umformung muss bezüglich Näherungen für alle Terme sehr sorgfältig umgegangen werden, da die hier untersuchte Auswirkung von  $\beta_0$  in erster Näherung ein zu vernachlässigender ( $\beta_0 \gg 1$ ) Einfluss ist. Es darf daher nur so genähert werden, dass die, in den  $\beta_0$ -Termen enthaltene Information höherer Ordnung ( $\beta_0^2$ ) nicht verloren geht:

$$\frac{I_a}{I_e} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1+\beta_0}\right)^{-1} + \frac{1}{\beta_0}} = \frac{1}{\left(\frac{2+\beta_0}{1+\beta_0}\right)^{-1} + \frac{1}{\beta_0}} = \frac{1}{\frac{1+\beta_0}{2+\beta_0} + \frac{1}{\beta_0}} \quad (10.38)$$

$$= \frac{1}{\frac{\beta_0(1+\beta_0)+2+\beta_0}{\beta_0(2+\beta_0)}} = \frac{1}{\frac{\beta_0(2+\beta_0)+2}{\beta_0(2+\beta_0)}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\beta_0(2+\beta_0)}} \quad (10.39)$$

$$\frac{I_a}{I_e} \approx \frac{1}{1 + \frac{2}{\beta_0^2}} \quad (10.40)$$

Beachten Sie, dass eine Näherung der Art  $\beta_0 > 1$  oder  $\beta_0 > 2$  bei einem der Zwischenschritte zu einem anderen Ergebnis als zu dem Endergebnis geführt hätte.

Wir erkennen am Ergebnis, dass im Vergleich zum einfachen Stromspiegel nach Gl. (10.19), das Übersetzungsverhältnis bei dem Wilson-Stromspiegel quadratisch in  $\beta_0$  gegen den Idealwert Eins strebt.

Wir wollen noch die eingangs gestellte Frage beantworten, warum der Wilson-Stromspiegel eine bessere Immunität gegenüber  $\beta_0$  aufweist. Betrachten wir den neu hinzugekommenen Transistor  $T_3$  und tragen die Ströme bei idealem Übersetzungsverhältnis von Eins in den Schaltplan in Abb. 10.8 ein. Wir sehen, dass das Verhältnis der Ströme

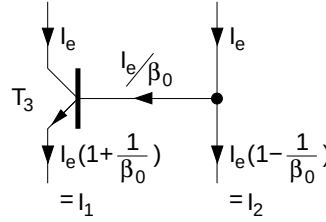


Abb. 10.8: Stromaufteilung am Ausgangstransistor des Wilson-Stromspiegels für ein ideales Übersetzungsverhältnis von Eins.

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_e \left(1 - \frac{1}{\beta_0}\right)}{I_e \left(1 + \frac{1}{\beta_0}\right)} = \frac{\beta_0 - 1}{\beta_0 + 1} \quad (10.41)$$

sein muss, damit das Übersetzungsverhältnis ideal zu Eins wird. Wir formen Gl. (10.41) wieder geeignet um:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\beta_0 - 1}{\beta_0 + 1} = \frac{(\beta_0 - 1)(\beta_0 + 1)}{\beta_0^2 + 2\beta_0 + 1} = \frac{\beta_0^2 - 1}{\beta_0^2 + 2\beta_0 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{\beta_0^2}}{1 + \frac{2}{\beta_0} - \frac{1}{\beta_0^2}} \quad (10.42)$$

$$\frac{I_2}{I_1} \approx \frac{1}{1 + \frac{2}{\beta_0}} \quad (10.43)$$

Diese Näherung entspricht der Näherung nach Gl. (10.19) für das Übersetzungsverhältnis des einfachen Stromschalters. Man kann also sagen, dass der Wilson-Stromspiegel deshalb eine gute  $\beta_0$ -Immunität besitzt, weil das nichtideale Übersetzungsverhältnis des darin enthaltenen einfachen Stromspiegels näherungsweise die Ströme liefert, die der Ausgangstransistor  $T_3$  für ein ideales Übersetzungsverhältnis benötigt.

Abschließend wollen wir noch den Ausgangswiderstand des Wilson-Stromspiegels ermitteln. Dafür zeichnen wir das Kleinsignal-Ersatzschaltbild in Abb. 10.9 und ersetzen die Transistordiode  $T_1$  direkt durch den Leitwert  $g_{m1}$  (vgl. KGS mit  $R_G$  und  $r_B = 0$ ).

Mit der in Abb. 10.9 (unten rechts) gezeigten Näherung und etwas Rechnung ergibt sich für die Näherung:  $g_{m1} \approx g_{m3} \approx v_I g_{m2}$ ;  $v_I = \frac{I_a}{I_e}$

$$g_0 = \frac{I_a}{U_a} = \frac{g_{03}}{1 + \frac{1}{1+v_I}\beta_0} \quad (10.44)$$

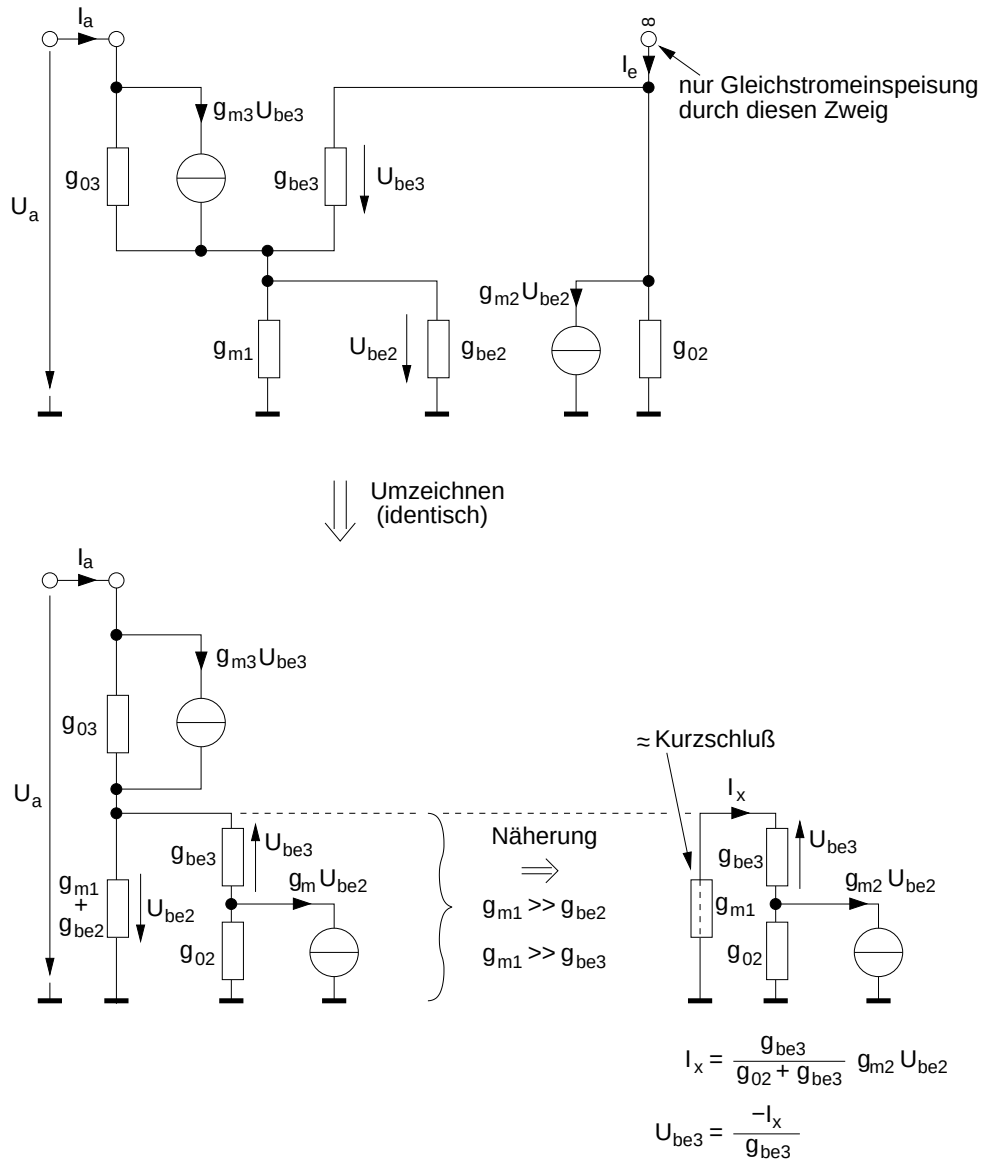


Abb. 10.9: Oben: Kleinsignal-Ersatz-Schaltbild des Wilson-Stromspiegels. Unten links: Leichter zu überschauende identische Darstellung der oben dargestellten Ersatzschaltung. Unten rechts: Durch Näherung vereinfachte Ersatzschaltung für den unteren Schaltungsteil.

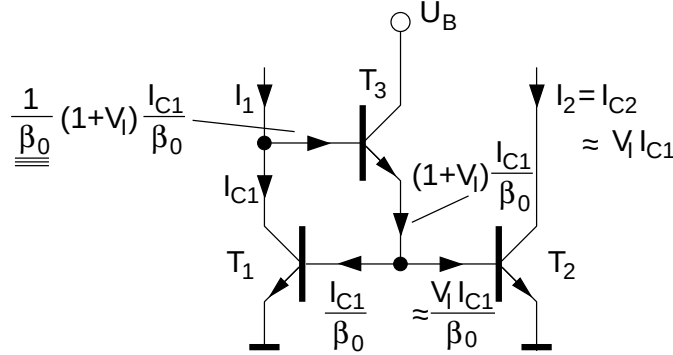


Abb. 10.10: Stromquelle mit Emitterfolger zur Verringerung des Einflusses der endlichen Stromverstärkungen von  $T_1$  und  $T_2$ .

Für einen 1:1 Wilson-Stromspiegel geht der Ausgangsleitwert über in

$$g_0 = \frac{g_{03}}{1 + \frac{\beta_0}{2}} \stackrel{(\frac{\beta_0}{2} \gg 1)}{\approx} \frac{g_{03}}{\frac{\beta_0}{2}} \quad (10.45)$$

Damit ist der Ausgangswiderstand des 1:1 Wilson-Stromspiegels um den Faktor  $\frac{\beta_0}{2}$  höher als der eines einfachen Stromspiegels.

Nachteilig bei dem Wilson-Stromspiegel ist, dass das minimal mögliche Kollektorpotential von  $T_3$  auf  $U_{CE,sat3} + U_{be1}$  begrenzt ist. Dies ist ein großer Nachteil bei Schaltungen mit geringer Versorgungsspannung oder bei Schaltungen, in denen das Kollektorpotential möglichst den gesamten Betriebsspannungsbereich („rail-to-rail“) annehmen können soll (z.B. bezüglich des „common-mode range“) bei Operationsverstärkern.

Hier bietet sich die Variante mit Emitterfolger aus Abb. 10.10 an, bei der ein Emitterfolger ( $T_3$ ) die Basisströme des Stromspiegelpaares  $T_1, T_2$  liefert. Der Basisstrom des Emitterfolgers ist dabei um seine Stromverstärkung geringer als die Summe der Basisströme von  $T_1$  und  $T_2$ .

Damit gehen die Basisströme von  $T_1$  und speziell bei großem Übersetzungsverhältnis von  $T_2$  um den Faktor  $\beta_0$  geringer in das Übersetzungsverhältnis ein. Dies führt zu einer weitgehenden Unempfindlichkeit des Übersetzungsverhältnisses von der toleranz- und temperaturbehafteten Stromverstärkung. Abbildung 10.10 verdeutlicht die Zusammenhänge anhand der eingezeichneten Ströme. Zur Übung empfiehlt sich die Berechnung von Übersetzungsverhältnis und Ausgangsleitwert.

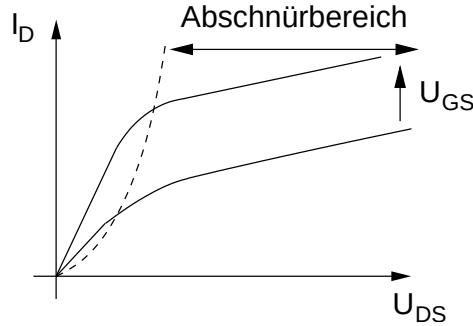


Abb. 10.11: Betrieb der Feldeffekttransistoren im Abschnürbereich für die Realisierung von Stromquellen mit hohem Innenwiderstand.

## 10.2 Stromquellen mit Feldeffekttransistoren

Für Stromquellen mit Feldeffekttransistoren lassen sich die zuvor hergeleiteten Gesetzmäßigkeiten direkt übertragen. Dies wird unmittelbar deutlich, bedenkt man die Ähnlichkeiten der Kennlinienfelder von Bipolar- und Feldeffekttransistor hinsichtlich der, für die Realisierung einer Stromquelle erforderlichen Verläufe. Um den horizontalen Verlauf der  $I_D(U_{DS})$ -Kennlinien auszunutzen, muss der FET im Abschnürbereich betrieben werden.

Als Beispiel betrachten wir den einfachen Stromspiegel mit selbstsperrenden n-Kanal-MOS-FETs. Im Abschnürbereich  $U_{DS} \geq U_{GS} - U_P$  gilt für die beiden Transistoren

$$I_{D1} \approx \frac{K_1}{2}(U_{GS1} - U_P)^2 \quad (10.46)$$

$$I_{D2} \approx \frac{K_2}{2}(U_{GS2} - U_P)^2 \underbrace{\left(1 + \frac{U_{DS2}}{U_A}\right)}_{V_{A2}} \quad (10.47)$$

Wie schon für den Bipolar-Transistor wird für  $T_1$  der Early-Effekt wegen des geringen  $U_{DS}$  weggelassen. Die Threshold-Spannung  $U_P$  wird für  $T_1$  und  $T_2$  gleich angenommen. Aufgrund der im statischen Fall vernachlässigbaren Gate-Ströme gilt  $I_{D1} = I_1$  und  $I_{D2} = I_2$ . Wegen  $U_{GS1} = U_{GS2}$  erhält man durch Division von Gl. (10.47) und Gl. (10.46) das Übersetzungsverhältnis

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_{D2}}{I_{D1}} = \frac{K_2}{K_1} V_{A2} \underset{U_{DS} \ll U_A}{\approx} \frac{K_2}{K_1} = \frac{b_2 L_1}{b_1 L_2} \quad (10.48)$$

Wegen  $K = \mu_n \frac{\epsilon_{0x}}{d_{0x}} \frac{b}{L}$  ist das Übersetzungsverhältnis des n-Kanal-Stromspiegels ohne Gegenkopplung in erster Näherung nur vom Größen-

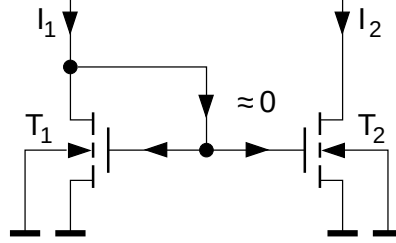


Abb. 10.12: Einfacher Stromspiegel mit selbstsperrendem n-Kanal-MOS-FETs.

verhältnis der MOS-FETs abhängig. Das ist das gleiche Ergebnis wie bei dem Bipolar-Transistor-Stromspiegel. Ein Unterschied zum Bipolar-Stromspiegel ergibt sich aus der minimalen Spannung über dem Stromquellen-Transistor  $T_2$ . Für den Bipolar-Transistor beträgt sie nahezu transistor- und sogar technologieunabhängig  $U_{CEmin} \approx U_{CE,sat} \approx 100 \text{ mV}$ . Für den FET wird die Grenze durch den Beginn des Abschnürbereichs:  $U_{DS} \geq U_{GS} - U_p$  markiert. Aus Gl. (10.47) ergibt sich daher die minimale Spannung über dem Stromquellentransistor (Early-Effekt kann vernachlässigt werden) mit  $U_{DSmin} = U_{GS} - U_p$  zu

$$U_{DSmin} \approx \sqrt{\frac{2I_{D2}}{K_2}} = \sqrt{\frac{2I_2}{K_2}} \quad (10.49)$$

Sie hängt also von der Größe von  $T_2$  ab. Für übliche Werte in analogen Schaltungen liegt  $U_{GS} - U_p$  bei ca. 1 V und ist damit in diesem Beispiel um einen Faktor 10 größer, als beim Bipolar-Transistor.

### 10.3 Darlington-Schaltungen

Als Darlington-Schaltung wird die Zusammenschaltung von zwei (sehr selten auch drei) Transistoren bezeichnet, die einen neuen Transistor (Darlington-Transistor) mit speziellen Eigenschaften bildet. Die wichtigste Eigenschaft ist die neue, drastisch höhere Stromverstärkung, die aus dem Produkt der beiden Einzel-Stromverstärkungen besteht. Durch die hohe Stromverstärkung steigt auch der Eingangsleitwert des Darlington-Transistors.

Eine andere Eigenschaft wird bei sog. Komplementär-Darlington-Schaltungen ausgenutzt, bei denen je ein npn- und ein pnp- Transistor kombiniert werden. Hierdurch lässt sich z.B. ein pnp-Darlington-Transistor

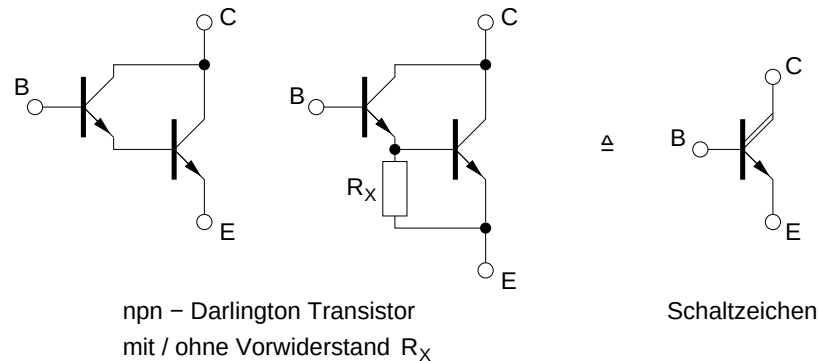


Abb. 10.13: npn-Darlington-Transistor-Schaltungen. Variante ohne (links) und mit (Mitte) Vorwiderstand  $R_X$ . Rechts: Schaltzeichen des npn-Darlington-Transistors.

mit einer deutlich höheren Stromverstärkung als bei einem einzelnen npn-Transistor realisieren. Darlington-Transistoren werden sowohl in integrierten Schaltungen als auch als diskrete Einzelbauelemente verwendet. Zuerst wollen wir uns eine mögliche Darlington-Schaltung für einen npn-Darlington-Transistor in Abb. 10.13 anschauen. Die Schaltung für den pnp-Darlington-Transistor sieht entsprechend aus.

Wir untersuchen zunächst das Großsignalverhalten am Beispiel des npn-Darlington-Transistors mit Vorwiderstand in Abb. 10.14. Die Variante ohne Vorwiderstand ergibt sich für  $R_x \rightarrow \infty$ . Offensichtlich besteht die Basis-Emitter-Strecke des Darlington-Transistors aus den beiden in Reihe geschalteten Basis-Emitterstrecken der Einzeltransistoren  $T_1$ ,  $T_2$ . Über die Spannung an den Basis-Emitterstrecken lässt sich der Betriebsbereich des Darlington-Transistors in drei Bereiche unterteilen. Zur Unterscheidung sind die Größen der Einzeltransistoren mit dem Index 1 oder 2 gekennzeichnet, während die Größen des Darlington Transistors ohne Index sind.

**Bereich 1:**  $U_{BE} < U_{BE1f} + U_{BE2f} \Leftrightarrow I_{C2} \ll I_{C1}; I_{C1}R_X < U_{BE2f}$  In diesem Bereich führt  $T_2$  nur einen vernachlässigbaren Strom, da  $U_{BE}$  nicht ausreicht um auch für  $U_{BE2}$  einen Anteil zu liefern, der groß genug ist für einen signifikanten Beitrag von  $I_{C2}$  an  $I_C$ . Die Flussspannungen im Knick der  $I_C(U_{BE})$  Kennlinie sind mit einem „f“ indiziert. Es gilt im einzelnen

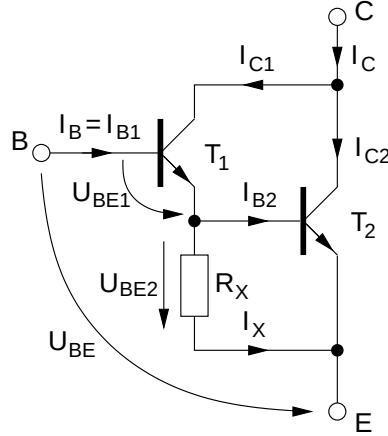


Abb. 10.14: Spannungen und Ströme zur Berechnung der Darlington Schaltung.

$U_{BEf} \approx 0,7 \dots 0,8 \text{ V}$ . Da in Bereich 1 nur  $T_1$  Strom führt, gilt

$$\left. \frac{I_C}{I_B} \right|_{\text{Bereich 1}} = \beta_0 \left( I_{C1} < \frac{U_{BE2f}}{R_X} \right) \approx \beta_{0T1} \quad (10.50)$$

und

$$U_{BE} \approx U_{BE1} + I_{C1} R_X \quad (10.51)$$

**Bereich 2, 3:**  $U_{BE2} \geq U_{BE2f} \Leftrightarrow I_{C2} R_X > U_{BE2f} \approx 0,7 \dots 0,8 \text{ V}$

In diesem Bereich leiten beide Transistoren. In Bereich 2 gilt  $U_{BE2} \approx U_{BE2f} = \text{const.}$  Daher ist auch der Strom durch  $R_X$  näherungsweise konstant

$$I_{Xf} = \frac{U_{BE2f}}{R_X} \quad (10.52)$$

Der Basisstrom von  $T_2$  übernimmt den wesentlichen Anteil von  $I_{C1}$ , wenn  $I_{C1}$  steigt.



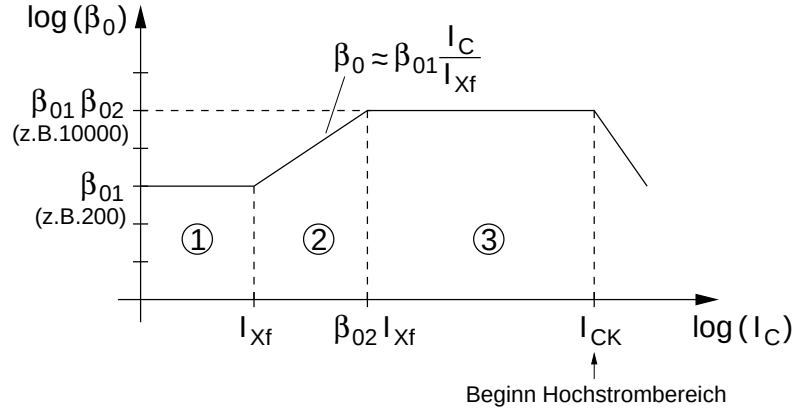


Abb. 10.15: Abhängigkeit der Stromverstärkung des Darlington Transistors von seinem Kollektorstrom. Beispielwerte sind  $\beta_{01} = 200$ ,  $\beta_{02} = 50$ .

Für den Kollektorstrom lässt sich mit  $I_{Xf}$  direkt schreiben:

$$I_{Xf} = \beta_{01} I_{B1} + \beta_{02} \underbrace{(I_{C1} + I_{B1})}_{(1+\beta_{01})I_{B1}} - I_{Xf} \quad (10.53)$$

$$I_C = (\beta_{01} + \beta_{02}(1 + \beta_{01})) I_{B1} - \beta_{02} I_{Xf} \quad (10.54)$$

$$1 = (\beta_{01} + \beta_{02}(1 + \beta_{01})) \frac{I_{B1}}{I_C} - \beta_{02} \frac{I_{Xf}}{I_C} \quad (10.55)$$

$$\frac{I_C}{I_{B1}} = \beta_0 = \frac{\beta_{01} + \beta_{02}(1 + \beta_{01})}{1 + \beta_{02} \frac{I_{Xf}}{I_C}} \quad (10.56)$$

$$\beta_0 \approx \begin{cases} \beta_{01} \frac{I_C}{I_{Xf}} & \text{für } \beta_{02} I_{Xf} \gg I_C & \underline{\text{Bereich 2}} \\ \beta_{01} \beta_{02} & \text{für } \beta_{02} I_{Xf} \ll I_C & \underline{\text{Bereich 3}} \end{cases} \quad (10.57)$$

Die Stromverstärkung des Darlington-Transistors ändert sich also in Abhängigkeit des Arbeitspunktes. Die Verläufe in den drei Bereichen sind in Abb. 10.15 grafisch dargestellt. Ohne den Vorwiderstand würde in Bereich 1 kein Kollektorstrom fließen. Erst nach  $U_{BE} > 2U_{BEf}$  würde ein merklicher Kollektorstromfluss einsetzen.

Weitere Besonderheiten des Darlington-Transistors sind die höhere Restspannung  $U_{CER} = U_{CE1sat} + U_{BE2f} \approx 0,8 \dots 1 \text{ V}$  und die doppelt so große Temperaturabhängigkeit der Basis-Emitter Strecke aufgrund der beiden in Reihe geschalteten Basis-Emitter Dioden. In manchen Anwendungen kann auch der durch  $T_2$  über  $\beta_{02}$  verstärkte Reststrom von  $T_1$  stören.

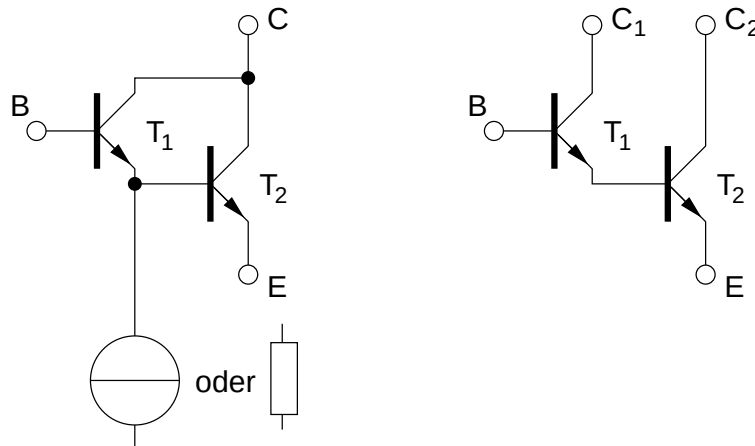
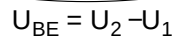


Abb. 10.16: Varianten der Darlington Schaltung. Links: mit Stromeinspeisung über Stromquelle oder Widerstand. Rechts: mit getrennten Kollektoranschlüssen für unterschiedliche Potentiale.

Neben der in Abb. 10.13 gezeigten Ausführung des Darlington-Transistors, können auch schaltungstechnische Modifikationen eingesetzt werden. In Abbildung 10.16 links wird  $U_{BE1}$  durch einen „von außen“ eingeprägten Strom eingestellt, wodurch die Steilheit erhöht wird. Würde auch der Emmitter von  $T_2$  mit einem Strom im Arbeitspunkt versorgt, dann wäre die Darlington-Schaltung identisch mit zwei kaskadierten Emitterfolgern. Die rechte Variante trennt die beiden Kollektoranschlüsse, so dass diese, falls vorteilhaft, auf verschiedene Potentiale gelegt werden können.

## 10.4 Quasistatische Eigenschaften des Darlington-Transistors

Für eine einfache Analyse und Berechnung von Schaltungen ist es wünschenswert die Darlington-Schaltung wie einen einzelnen Transistor behandeln zu können. Aus den Parametern der Bauelemente der Darlington Schaltung lassen sich die dafür erforderlichen Kenngrößen ( $g_m, r_{be}, \beta, r_{ce}$ ) berechnen. Damit die ermittelten Parameter in sich konsistent sind, empfiehlt sich eine systematische Berechnung mit Hilfe von Matrizen. Aufgrund der günstigen Darstellung als Kettenschaltung von Zweitoren, wie in Abb. 10.17 gezeigt, erfolgt die Berechnung durch Kettenparameter.



Es gilt mit

$$(10.58)$$

$$(10.59)$$

satzschaltbild am Beispiel von  $[\underline{\mathbf{K}}_2]$ :

(10.60)

Bei Bedarf kann  $r_{be2} \rightarrow r'_{be2} = r_{be} || R_x$  ersetzt werden, um den parallel geschalteten Vorwiderstand  $R_x$  zu berücksichtigen. Im Sinne einer übersichtlichen Schreibweise wird im Folgenden immer  $r_{be}$  als Platzhalter für  $r_{be} || R_x$  verwendet, außer es wird ausdrücklich eine explizite Darstellung in  $R_x$  angegeben. Zur Vereinfachung der Rechnung wird der Ausgangsleitwert  $r_{01}$  von

$T_1$  zunächst vernachlässigt. Es ergibt sich für den Darlington-Transistor eine resultierende Kettenmatrix.

$$\begin{aligned}
 [\underline{\mathbf{K}}] &= [\underline{\mathbf{K}}_1][\underline{\mathbf{K}}_2] \\
 &= \frac{1}{(1 + \beta_{01})(1 + \beta_{02})} \begin{bmatrix} (1 + \beta_{01})(1 + \beta_{02} + \frac{r_{be2}}{r_{02}}) & r_{be2}(1 + \beta_{01}) + r_{be1} \\ \frac{1}{r_{02}} & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{10.61}$$

(mit  $\beta_{01/2} = g_{m1/2} r_{be1/2}$ ).

Daraus ergeben sich die Kenngrößen des Darlington-Transistors mit den Klemmspannungen und -strömen nach Abb. 10.18:

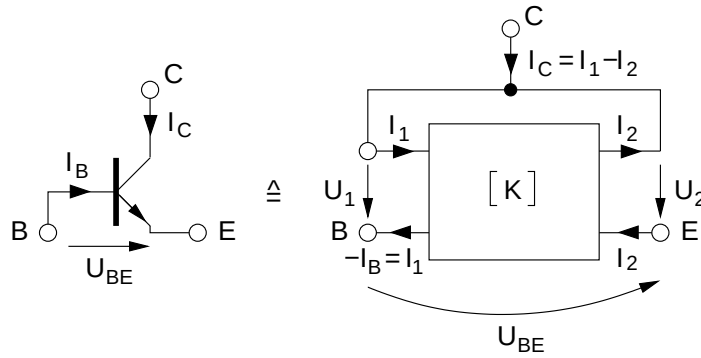


Abb. 10.18: Klemmspannungen und -ströme bei Verwendung der Darlington-Schaltung in  $[\underline{\mathbf{K}}]$  als ein Transistor-Dreipol.

Die Stromverstärkung für den Fall  $R_x \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= \frac{-(I_2 - I_1)}{-I_1} \bigg|_{U_2=0} = \frac{I_2}{I_1} - 1 \bigg|_{U_2=0} \\
 \beta_0 &= \frac{1}{K_{22}} - 1 \approx \beta_{01}\beta_{02} \quad \text{für } \beta_{01} \gg 1, \beta_{02} \gg 1 \quad .
 \end{aligned} \tag{10.62}$$

Für den Fall mit Vorwiderstand muss  $\beta_{02}$  ersetzt werden durch

$$\beta'_{02} = g_{m2} r'_{be2} = g_{m2} r_{be2} || R_x = g_{m2} r_{be2} \frac{R_x}{r_{be2} + R_x} = \beta_{02} \frac{R_x}{r_{be2} + R_x} \tag{10.63}$$

und es ergibt sich

$$\beta_0 = (1 + \beta_{01}) \left( 1 + \beta_{02} \frac{R_x}{r_{be2} + R_x} \right) \quad . \tag{10.64}$$

Für die Steilheit ergibt sich

$$g_m = \underbrace{\frac{I_1 - I_2}{U_2 - U_1}}_{U_{BE}} \bigg|_{U_2=0} \approx \frac{I_2}{U_1} = \frac{1}{K_{12}} . \quad (10.65)$$

Nach Einsetzen von  $K_{12}$  aus Gl. (10.61) und etwas Rechnen mit der Näherung  $\beta_{01} \gg 1$  ergibt sich

$$g_m \approx g_{m1} \frac{1 + g_{m2} r_{be2}}{1 + g_{m1} r_{be2}} \approx \frac{g_{m2}}{2} \quad (10.66)$$

Für die zweite Näherung in Gl. (10.66) wurde Gebrauch gemacht von

$$g_{m1} = \frac{I_{C1}}{U_T} \stackrel{R_x \gg r_{be2}}{\approx} \frac{I_{C2}}{\beta_{02} U_T} = \frac{g_{m2}}{\beta_{02}} \quad (10.67)$$

Gl. (10.66) zeigt, dass die Steilheit des Darlington-Transistors nur halb so groß ist, wie die Steilheit des Ausgangstransistors  $T_2$ !

Der Ausgangswiderstand  $r_0$  ist, solange der Ausgangswiderstand  $r_{01}$  von  $T_1$  hinreichend groß ist, immer gleich dem Ausgangswiderstand  $r_{02}$  des Transistors  $T_2$  am Ausgang des Darlington-Transistors.

$$r_0 \bigg|_{I_B=0} = \frac{U_2}{-I_2} \bigg|_{I_1=0} = \frac{-K_{22}}{K_{21}} = r_{02} \quad r_0 \bigg|_{U_{BE}=0} = \frac{U_2}{-I_2} \bigg|_{U_2=U_1=0} = \frac{K_{12}}{K_{11}-1} \approx r_{02}. \quad (10.68)$$

Wie die Berechnung zeigt, gilt dies unabhängig davon, ob der Darlington-Transistor am Eingang offen oder kurzgeschlossen (Strom-/Spannungsansteuerung) betrieben wird.

Wir wollen untersuchen, welche Auswirkung ein nicht vernachlässigbarer Ausgangswiderstand von  $T_1$  besitzt:

Die Kettenmatrix für den Darlington-Transistor in Gl. (10.61) wurde unter der Annahme eines unendlich großen Ausgangswiderstandes  $r_{01}$  hergeleitet. Um sie nicht erneut für ein endliches  $r_{01}$  berechnen zu müssen, wenden wir eine in der Praxis sehr hilfreiche Methode an:

Bei kurzgeschlossenem Eingangstor ( $U_1 = 0$ ) liegt  $r_{be1}$  parallel zur Ausgangsstromquelle, genau dort, wo auch  $r_{01}$  liegt. Der Ausgangswiderstand des Darlington-Transistors kann also für  $U_1 = 0$  ermittelt werden, indem

$$r_{be1} \rightarrow r_{be1} || r_{01} \quad (10.69)$$

substituiert wird.

Aber auch für den in der Praxis bedeutenden Fall der Stromansteuerung ( $I_1 = 0$ ) läßt sich diese Substitution anwenden, indem zusätzlich zum kurzgeschlossenen Eingang mit der Modifikation nach Gl. (10.69) auch noch

$$g_{m1} = 0 \quad (10.70)$$

gesetzt wird. Dies entspricht dem Fall  $I_1 = 0$ , bei dem  $U_{BE1} = 0$  und daher auch  $I_{C1} = g_{m1}U_{BE1} = 0$  ist. Wobei ausgenutzt wird, dass die Bedingung  $I_{C1} = 0$  gleichermaßen für  $g_{m1} = 0$  als auch für  $U_{BE1} = 0$  erfüllt ist.

Mit Hilfe der hier gezeigten Methode lassen sich häufig bereits ermittelte Ergebnisse an eine Schaltungsmodifikation anpassen, ohne den gesamten Rechengang erneut durchführen zu müssen.

Es ergibt sich damit für den Ausgangswiderstand des Darlington-Transistors bei Stromansteuerung unter Berücksichtigung von  $r_{01}$ :

$$r_0 \Big|_{r_{01}} = \frac{U_2}{-I_2} \Big|_{\substack{U_1=0, g_{m1}=0 \\ r_{be1} \rightarrow r_{01}}} = \frac{K_{12}}{K_{11}} \Big|_{\substack{g_{m1}=0 \\ r_{be1} \rightarrow r_{01}}} \quad (10.71)$$

$$r_0 \Big|_{r_{01}} = \frac{r_{be2} + r_{01}}{1 + \beta_{02} + \frac{r_{be2}}{r_{02} + \frac{r_{01}}{\beta_{02}}}} \approx \underset{\beta_{02} \gg 1}{\uparrow} r_{02} \frac{r_{be2} + r_{01}}{\beta_{02} r_{02} + r_{01} + r_{be2}} \quad (10.72)$$

$$= r_{02} \frac{1}{1 + \frac{\beta_{02} r_{02}}{r_{01} + r_{be2}}} \approx \underset{r_{01} \gg r_{be2}}{\uparrow} r_{02} \frac{1}{1 + \frac{\beta_{02} r_{02}}{r_{01}}} \quad (10.73)$$

Gl. (10.73) kann noch weiter vereinfacht werden, indem ausgenutzt wird, dass der Ausgangsleitwert eines Transistors proportional dem Kollektorstrom  $I_{CQ}$  im Arbeitspunkt ist. Für  $r_{02}$  bedeutet das

$$I_{C2Q} = I_{S2} e^{\frac{U_{BE2Q}}{U_T}} \left( 1 + \frac{U_{CE2Q}}{U_A} \right) \text{ mit } U_A = \text{Early-Spannung} \quad (10.74)$$

$$\frac{\partial I_{C2Q}}{\partial U_{CE2Q}} = \frac{I_{C2Q}}{U_A} \underbrace{\left( 1 + \frac{U_{CE2Q}}{U_A} \right)^{-1}}_{\approx 1} \approx \frac{I_{C2Q}}{U_A} = \frac{1}{r_{02}}. \quad (10.75)$$

Mit  $B_{N2} \approx \beta_{02}$  gilt

$$I_{C2Q} = \beta_{02} I_{C1Q} \quad (10.76)$$

und damit

$$r_{02} = \frac{U_A}{I_{C2Q}} = \frac{U_A}{\beta_{02} I_{C01}} \approx \frac{r_{01}}{\beta_{02}}. \quad (10.77)$$

Diese Näherung gilt, falls  $T_1$  und  $T_2$  die gleiche Early-Spannung  $U_A$  haben.

Gl. (10.77) gibt an, dass aufgrund des, um die Stromverstärkung größeren Arbeitspunkt-Stromes vom  $T_2$ , dessen Ausgangswiderstand um den Faktor der (Kleinsignal-)Stromverstärkung geringer ist.

Einsetzen von (10.77) in (10.73) ergibt eine gute Näherung für den Ausgangswiderstand des Darlington-Transistors bei Stromansteuerung und nicht vernachlässigbarem Ausgangswiderstand von  $T_1$ .

$$r_0 \bigg|_{r_{01}} \approx \frac{r_{02}}{2} \quad (10.78)$$

Als letzte Kenngröße des Darlington-Transistors kann noch der Eingangswiderstand

$$r_{be} = \frac{U_{BE}}{I_B} = \frac{U_2 - U_1}{-I_1} = \frac{U_2 - U_1}{-I_2} \frac{I_2}{I_1} = \frac{\beta_0}{g_m} \quad (10.79)$$

aus den bereits in (10.62) und (10.66) angegebenen Beziehungen berechnet werden. Es ergibt sich

$$r_{be} = \frac{2\beta_{01}\beta_{02}}{g_{m2}} \quad (10.80)$$

Zur Übersicht sind im Folgenden die Näherungen für die Kenngrößen eines Darlington-Transistors zusammengefasst:

$$\begin{aligned} r_{be} &\approx \frac{2\beta_{01}\beta_{02}}{g_{m2}} & g_m &\approx \frac{g_{m2}}{2} \\ \beta_0 &\approx \beta_{01}\beta_{02} & r_{ce} &\approx \frac{r_{ce2}}{2} \end{aligned} \quad (10.81)$$

## 10.5 Der komplementäre Darlington-Transistor

In Gegentaktstufen werden zwei komplementäre Transistoren benötigt um die Übertragungssymmetrie bezüglich des Arbeitspunktes zu gewährleisten. Aufgrund des Herstellungsverfahrens besitzen in der gleichen Technologie hergestellte (laterale) pnp-Transistoren eine deutlich geringere Stromverstärkung und maximale Stromdichte. Aus dem gleichen Grund sind speziell hergestellte diskrete pnp-Leistungstransistoren in der Regel teurer

als vergleichbare npn-Typen.

Als Lösung bietet sich hier die komplementäre Darlington-Schaltung an. Die Berechnung erfolgt entsprechend der am Beispiel des npn-Darlington-Transistor gezeigten Vorgehensweise. Die Besonderheiten des pnp-Komplementär-Transistors sind, dass

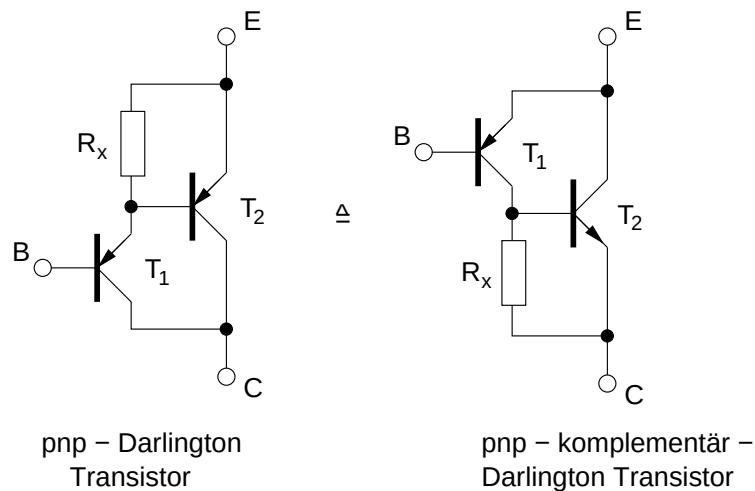


Abb. 10.19: Schaltungen für pnp-Darlington-Transistoren. Links: Aufbau mit pnp-Transistoren. Rechts: Variante mit npn-Ausgangstransistor.

1. er eine Flussspannung von nur  $1 \cdot U_{BEf} \approx 0,7 \dots 0,8 \text{ V}$  hat,
2.  $T_1$  am Eingang die Polarität festlegt und über seinen Kollektorstrom den Kollektorstrom des npn-(Leistungs)-Transistor  $T_2$  steuert,
3. der Kollektorstrom von  $T_2$  im Wesentlichen den Emitterstrom des Komplementär-Darlington-Transistors bildet,
4. der pnp-Komplementär-Darlington-Transistor bei älteren/einfacheren Technologien ( $\beta_{0pnp} \approx 2 \dots 50$ ) eine um ca.  $\frac{\beta_{0T_2,npn}}{\beta_{0T_2,pnp}} \approx \frac{100 \dots 200}{2 \dots 50} \approx 2 \dots 100$  mal größere Stromverstärkung besitzt.

## 10.6 Differenzverstärker (Stromschalter)

Der Differenzverstärker ist die wichtigste Grundsaltung in integrierten Schaltungen. Insbesondere bei der Verwendung von Bipolar-Transistoren



lassen sich mit Hilfe des Differenzverstärkers Schaltungen mit weitaus besseren Leistungsmerkmalen bauen, als es mit den bisher behandelten Verstärkergrundschaltungen möglich ist. Differenzverstärker werden ebenfalls in reiner MOS-Technologie eingesetzt, um durch die Vorteile, die dieses Schaltungsprinzip bietet, Schaltungen in MOS-Technologie leistungsfähiger zu machen. Dies gilt insbesondere, wenn mit MOS-Schaltungen hohe Geschwindigkeiten erzielt werden sollen. Für spezielle Anwendungen, die hohe Eingangswiderstände fördern, werden ein MOS-Transistor und ein Bipolar-Transistor als Darlington-Transistor geschaltet, der die Vorteile der hohen Steilheit des Bipolar-Transistors mit dem hohen Eingangswiderstand des MOS-Transistors kombiniert.

Im Folgenden beschränken wir uns wegen der weitaus höheren Verbreitung auf den Differenzverstärker mit Bipolar-Transistoren. Sämtliche Ergebnisse lassen sich aber leicht auf Differenzverstärker mit MOS-Transistoren übertragen. Wird der Differenzverstärker übersteuert, arbeitet er als Schalter und man spricht von einem Stromschalter. Er ist die Grundschaltung aller schnellen Digitalschaltungen und wird ausführlich in der Vertiefungsvorlesung Elektronik III behandelt.

Der Differenzverstärker besteht aus einem Transistorpaar („Emitter coupled pair“), das mit einem Konstantstrom  $I_0$  in die miteinander verbundenen Emitter gespeist wird. An den beiden Kollektorwiderständen entsteht hierdurch im Arbeitspunkt ein Spannungsabfall von  $\frac{I_0 R_C}{2}$ , wobei davon ausgegangen wird, dass  $T_1$  und  $T_2$  sowie  $R_{C1} = R_{C2} = R_C$  identisch sind und im Arbeitspunkt eine Eingangsdifferenzspannung  $U_{ed} = 0$  anliegt. Diese Identität der Bauelemente und aller Parameter in beiden Hälften der Schaltung nennt man Schaltungs-Symmetrie. Der Differenzverstärker ist in diesem Fall eine symmetrische Schaltung<sup>42</sup>.

Im Rahmen dieser Vorlesung gehen wir davon aus, dass bei Kleinsignalaussteuerung des Differenzverstärkers näherungsweise die Symmetrie erhalten bleibt. Liegt der Arbeitspunkt bei  $U_{ed} = 0$  und liegt Symmetrie in den Bauelementen vor, ist der Differenzverstärker immer eine symmetrische Schaltung.

<sup>42</sup>In der Umgangssprache wird auch dann von einem Differenzverstärker gesprochen, wenn keine Symmetrie (z.B. wegen Offsets) vorliegt. In diesen Fällen sollen meist durch diese Bezeichnung die grundlegenden Eigenschaften dieser Schaltung ausgedrückt werden.

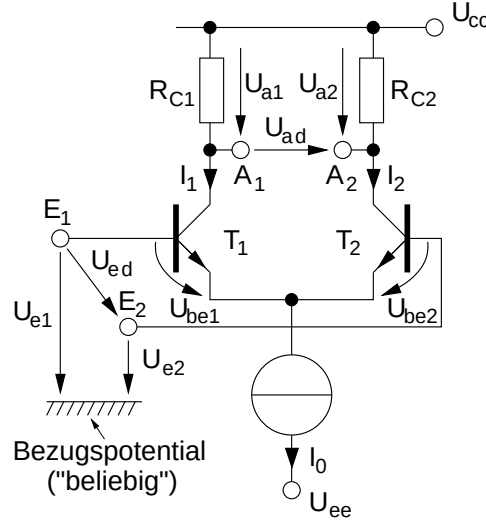


Abb. 10.20: Differenzverstärker

Die Bedeutung der Symmetrie ist weitreichend: Auf ihr baut sowohl die gesamte vereinfachte Schaltungsanalyse mit Hilfe von Gleich- und Gegen-taktzerlegung auf, als auch die Optimierung von Schaltungen hinsichtlich Betriebsspannungsunterdrückung- (PSRR) und Gleichtaktunterdrückung- (CMRR). Letztendlich ist die Symmetrie auch maßgebend für die Leistungsfähigkeit und Stabilität einer Schaltung (Gegenstand-Elektronik III). Eine weitere Besonderheit symmetrischer Schaltungen liegt in ihrer ungeraden Übertragungskennlinie, deren Eigenschaft für den Differenzverstärker formuliert lautet:

$$U_{ad}(-U_{ed}) = -U_{ad}(U_{ed}) \quad (10.82)$$

Diese Eigenschaft gilt auch für den Großsignalbetrieb und sogar bei Übersteuerung. Die Großsignal-Übertragungsfunktion  $\frac{U_{ad}}{U_{ed}}$  lässt sich mit Hilfe der Kollektorströme

$$i_{C1} \approx I_S e^{\frac{U_{BE1}}{U_T}} \quad (80.a)$$

$$i_{C2} \approx I_S e^{\frac{U_{BE2}}{U_T}} \quad (80.b)$$

$$i_{C1} + i_{C2} = I_0 \quad (80.c)$$

berechnen. Es folgt aus Gl. (80.a-80.c) mit der Differenz-Eingangsspannung

$$U_{ed} = U_{BE1} - U_{BE2} \quad (10.83)$$

$$\Rightarrow \frac{i_{C1}}{i_{C2}} = e^{\frac{U_{BE1} - U_{BE2}}{U_T}} = e^{\frac{U_{ed}}{U_T}} \quad (10.84)$$

$$\Rightarrow i_{C1} = i_{C2} e^{\frac{U_{ed}}{U_T}} = (I_0 - i_{C1}) e^{\frac{U_{ed}}{U_T}} \quad (10.85)$$

$$\Rightarrow i_{C1} = (1 + e^{\frac{-U_{ed}}{U_T}})^{-1} I_0 \quad (10.86)$$

$$i_{C2} = I_0 - i_{C1} = \frac{I_0(1 + e^{\frac{-U_{ed}}{U_T}}) - I_0}{1 + e^{\frac{-U_{ed}}{U_T}}} \quad (10.87)$$

$$i_{C2} = \frac{e^{\frac{-U_{ed}}{U_T}}}{1 + e^{\frac{-U_{ed}}{U_T}}} I_0 \quad (10.88)$$

Die Differenz-Ausgangsspannung

$$U_{ad} = U_{a2} - U_{a1} = (i_{C2} - i_{C1}) R_C \quad (10.89)$$

lässt sich durch die Kollektorströme in Gl. (10.86) und Gl. (10.88) ausdrücken

$$U_{ad} = R_C I_0 \frac{e^{\frac{-U_{ed}}{U_T}} - 1}{e^{\frac{-U_{ed}}{U_T}} + 1}, \quad (10.90)$$

die sich mit der Identität

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \quad (10.91)$$

und  $\tanh(-x) = -\tanh(x)$  überführen lässt in

$$U_{ad} = -R_C I_0 \tanh\left(\frac{U_{ed}}{2U_T}\right) \quad (10.92)$$

Da der  $\tanh$  eine ungerade Funktion ist (vgl. Abb. 10.21), ist auch die Großsignalübertragungsfunktion des Differenzverstärkers eine ungerade Funktion. Die Steigung der  $\tanh$  Funktion

$$\frac{d}{dU_{ed}} \tanh\left(\frac{U_{ed}}{2U_T}\right) = \frac{1}{2U_T \cosh^2\left(\frac{U_{ed}}{2U_T}\right)} \quad (10.93)$$

besitzt nach Abb. 10.21 im Nulldurchgang (= Arbeitspunkt) ihr Maximum von  $\frac{1}{2U_T}$ . Daher besitzt der Differenzverstärker im symmetrischen Arbeitspunkt  $U_{ed} = 0$  die maximale Verstärkung von

$$V_{ud} = \frac{dU_{ad}}{dU_{ed}} = \frac{U_{ad}}{U_{ed}} = \frac{-R_C I_0}{2U_T} \quad (10.94)$$

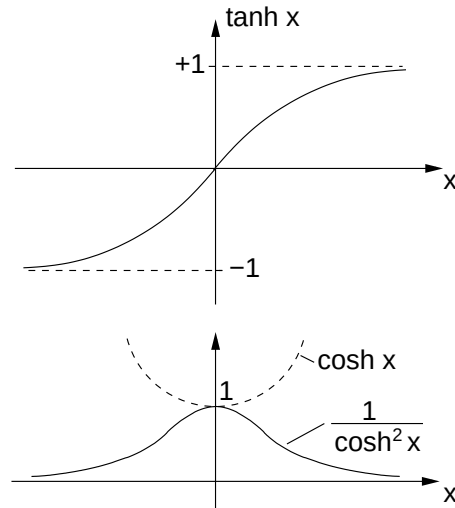


Abb. 10.21: Oben: Verlauf der tanh-Funktion. Unten: Verlauf der cosh-Funktion und der Ableitung der tanh-Funktion

Auf dieses Ergebnis kommt man auch unmittelbar mit Hilfe der später behandelten Gleich-Gegentakt-Zerlegung.

Für eine Analyse größerer Schaltungen ist die tanh Funktion in Gl. (10.92) zu unhandlich und eine hohe Genauigkeit nicht erforderlich. Wir betrachten daher einige Charakteristika der Großsignal-Übertragungsfunktion und führen die Definition der Knickspannung nach Abb. 10.22

$$U_K := 2U_T \quad (10.95)$$

ein.

Diese Definition erscheint hier wenig bedeutsam, ist aber sinnvoll zur Anknüpfung an die weiterführende Schaltungstheorie der Transadmittanzstufe (Elektronik III), bei der dem Differenzverstärker wie in Abb. 10.23 zur Linearisierung Gegenkopplungswiderstände  $R_E$  in Reihe zum Emitter geschaltet werden („Emitterdegeneration“). In diesem Fall wird

$$U_K := 2U_T + R_E I_0 \quad (10.96)$$

Der Vorteil der Einführung der Knickspannung ist, dass die Steigung der Großsignal-Übertragungsfunktion mit und ohne Gegenkopplung im Arbeitspunkt  $U_{ed} = 0$  lautet

$$V_{ud} = \frac{dU_{ad}}{dU_{ed}} = \frac{U_{ad}}{U_{ed}} = \frac{-R_C I_0}{U_K} . \quad (10.97)$$

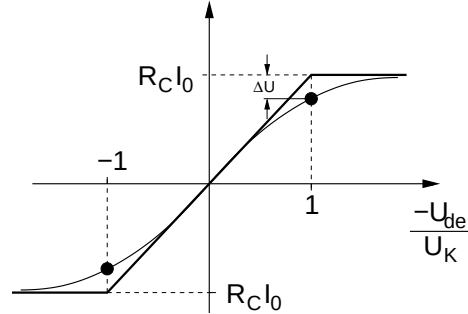


Abb. 10.22: Definition der Knickspannung  $U_K$  anhand des Schnittpunktes der beiden Tangenten für  $U_{ed} = 0$  und  $U_{de} \rightarrow \infty$ .

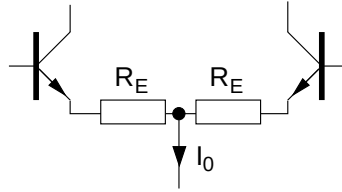


Abb. 10.23: Linearisierter Differenzverstärker

Für  $U_K$  ist die entsprechende Definition nach Gl. (10.95) bzw. Gl. (10.96) zu wählen. Wir konstruieren mit Gl. (10.97) die Tangente und Asymptoten der Großsignal-ÜF nach (10.92):

1. Eine Gerade mit der Steigung der Kleinsignalverstärkung nach Gl. (10.97) durch den Nullpunkt nähert die Großsignal-Übertragungsfunktion im Bereich um den Nulldurchgang an.
2. Asymptoten bei  $\pm R_C I_0$  nähern den Verlauf für  $U_{ed} \gg U_K$  an.
3. Für  $\left| \frac{U_{ed}}{U_K} \right| = 1$  geht die Kleinsignalgerade nach 1) in die Asymptoten nach 2) über.
4. Der Fehler zwischen der Näherung mit Geradenabschnitten und der exakten Funktion nach (10.92) ist bei  $\left| \frac{U_{ed}}{U_K} \right| = 1$  maximal und beträgt (vgl. Abb. 10.22)

$$\Delta U = R_C I_0 - R_C I_0 \tanh 1 \approx R_C I (1 - 0,76) \quad (10.98)$$

$$\Delta U \approx \frac{R_C I_0}{4} . \quad (10.99)$$

Mit Hilfe von Gl. (10.99) kann auch der Linearitätsfehler des nicht gegengekoppelten Differenzverstärkers bei einer Eingangsspannung  $|U_{ed}| = U_K$  angegeben werden:

$$\delta_{lin}(U_{ed} = U_K) = \left. \frac{V_{ud}U_{ed} - U_{ad}}{V_{ud}U_{ed}} \right|_{U_{ed}=U_K} = \frac{\Delta U}{V_{ud}U_K} \approx \frac{R_C I_0 U_K}{4R_C I_0 U_K} = \frac{1}{4} \quad (10.100)$$

Das Ergebnis läßt sich auch wie folgt interpretieren:

Bei einer Eingangsamplitude  $|U_{ed}| = U_K = 2U_T$  ist die Ausgangsspannung des nicht gegengekoppelten Differenzverstärkers bei ca. 75 % der Vollaussteuerung (bzw. zu 75 % umgeschaltet bei digitalen Schaltungen). Bei  $|U_{ed}| = 2U_K = 4U_T$  ist der Differenzverstärker zu ca. 96 % vollausgesteuert d.h. er ist nahezu voll umgeschaltet. Dies ergibt sich unmittelbar aus Gl. (10.92).

#### Arbeitspunkteinstellung am Differenzverstärker-Eingang

Bereits bei der Herleitung der Verstärkung wurde in Gl. (10.92) die Differenz-Eingangsspannung also die Differenz der beiden Basis-Emitterspannungen als die Eingangsgröße verwendet. Dies ist sinnvoll, da die Steuerung des Ausgangsstroms ausschließlich durch die Spannung über beide Basis-Emitterstrecken erfolgt<sup>43</sup>, solange wir voraussetzen, dass die Stromquelle ideal ist. Da also nur die Differenzspannung  $U_{ed}$  zur Ausgangsspannung  $U_{ad}$  beiträgt, besitzt die Schaltung einen Freiheitsgrad in der Wahl einphasiger („single ended“) Eingangsspannungen  $U_{e1}$  und  $U_{e2}$  vgl. Abb. 10.20. Genauer gesagt, ist der Anteil  $U_{ecm}$  (cm  $\hat{=}$  common mode) wegen

$$(U_{e1} + U_{ecm}) - (U_{e2} + U_{ecm}) = U_{e1} - U_{e2} = U_{ed} \quad (10.101)$$

frei wählbar, da er ohne Einfluss auf die Differenz-Eingangsspannung ist. Zu beachten bei der Wahl sind jedoch die, durch Sättigung und Durchbruch gegebenen Grenzen.

---

<sup>43</sup>Äquivalent dazu könnte man auch eine Steuerung über die Basis-Ströme formulieren. Da jedoch jeder Basisstrom eineindeutig in eine zugehörige Basis-Emitterspannung umgerechnet werden kann, genügt der Betrachtung einer Aussteuerart. Natürlich sind, speziell bei dynamischem Betrieb, die Unterschiede zwischen innerer und äußerer Basis zu beachten.

Gl. (10.101) gilt sowohl für Gleich- als auch für Wechselspannung. Meist besteht der, für beide Eingänge gleiche Anteil  $U_{ecm}$  aus einer Gleichspannungskomponente  $U_{eQ}^+$ , die den Arbeitspunkt einstellt und einer überlagerten Wechselstrom-Komponente  $U_e^+$ , die in der Regel ein, über die Arbeitspunkt-Einstellung eingekoppeltes Störsignal ist:

$$u_{ecm}(t) = U_{eQ}^+ + u_e^+(t) \quad (10.102)$$

Dabei wird der obere Index<sup>+</sup> im folgenden immer für Signalkomponenten verwendet, die an beiden Eingängen (identisch) gleich sind.

Wir betrachten im Folgenden nur die Wechselspannungsanteile und verwenden dafür die Phasorenschreibweise.

#### Gleichtakt-Gegentakt-Zerlegung

Wir nehmen zwei beliebige Phasoren der Eingangsspannungen  $\underline{U}_{e1}$  und  $\underline{U}_{e2}$  an, für die ein Beispiel in Abb. 10.24 dargestellt ist. Anhand von gra-

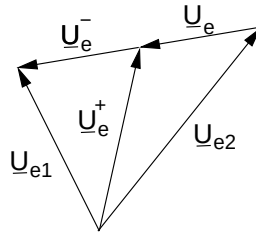


Abb. 10.24: Beispiel für die Lage der Phasoren der einphasigen Eingangsspannungen  $\underline{U}_{e1}$ ,  $\underline{U}_{e2}$  und deren Zerlegung in Gleich- und Gegentakt-Komponenten  $\underline{U}_e^+$ ,  $\underline{U}_e^-$ .

fischen Überlegungen ist einfach zu sehen, dass es zu jedem beliebigen Eingangsspannungspaar  $\underline{U}_{e1}$ ,  $\underline{U}_{e2}$  ein Phasor

$$\underline{U}_e^- = \frac{1}{2}(\underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}) = \frac{1}{2}\underline{U}_{ed} \quad (10.103)$$

gibt, für den mit dem Phasor

$$\underline{U}_e^+ = \frac{1}{2}(\underline{U}_{e1} + \underline{U}_{e2}) \quad (10.104)$$

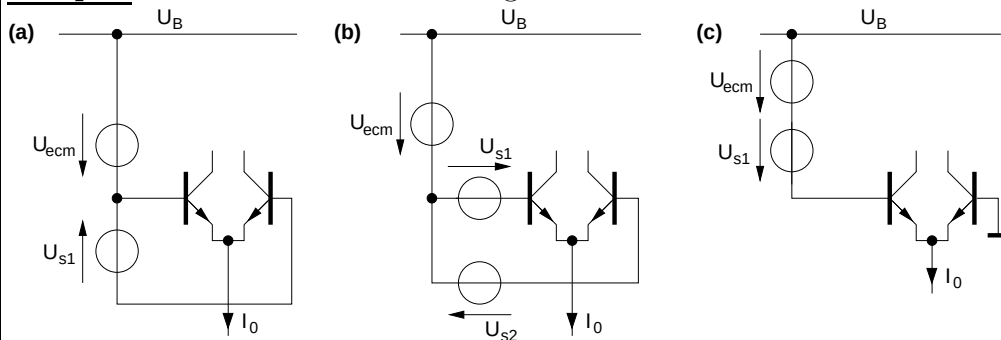
gilt:

$$\underline{U}_{e1} = \underline{U}_e^+ + \underline{U}_e^- \quad (102a)$$

$$\underline{U}_{e2} = \underline{U}_e^+ - \underline{U}_e^- \quad (102b)$$

Da  $\underline{U}_e^+$  sowohl in  $\underline{U}_{e1}$  als auch in  $\underline{U}_{e2}$  gleich enthalten ist, wird  $\underline{U}_e^+$  als Gleichtaktkomponente bezeichnet. Aufgrund des entgegengesetzten Vorzeichens von  $\underline{U}_e^-$  in den beiden einphasigen Eingangsspannungen wird  $\underline{U}_e^-$  als Gegentaktkomponente bezeichnet. Gl. (10.103) und (10.104) beschreiben die Gleichtakt-Gegentakt-Zerlegung eines aus  $\underline{U}_{e1}$  und  $\underline{U}_{e2}$  bestehenden differentiellen Eingangssignals. Ist eine der beiden Spannungen identisch Null spricht man von einer einphasigen („single-ended“) Ansteuerung. Im folgenden Beispiel sind einige Möglichkeiten der Ansteuerung gezeigt.

**Beispiel:** Varianten zur Ansteuerung eines Differenzverstärkers.



Führen Sie zur Übung eine Gleichtakt-Gegentakt-Zerlegung für das Eingangssignal des Differenzverstärkers.

### Berechnung des Differenzverstärkers mit Hilfe der Gleichtakt-Gegentaktzerlegung

Der Differenzverstärker in Abb. 10.25 befindet sich durch Einstellung eines geeigneten  $U_{eQ}^+$  innerhalb des zulässigen Betriebsbereichs. Es wird eine reale Stromquelle zur Erzeugung des Betriebsstroms  $I_0$  verwendet. Dafür eignen sich z.B. die zuvor behandelten Stromspiegel. Die Ausgangsimpedanz des Stromspiegels wird in der Ersatzschaltung durch  $\underline{Z}_q$  berücksichtigt. Es ergibt sich das Wechselstrom-Ersatzschaltbild in Abb. 10.26. Für Kleinsignalbetrieb gilt der Überlagerungssatz und wir können die Schaltung mit Gleich- und Gegentaktquellen getrennt betrachten.

Für Gegentakt gilt aufgrund der Symmetrie:  $\underline{I}_{e1} = -\underline{I}_{e2} \Rightarrow \underline{I}_q = 0$ . Wegen  $\underline{I}_q = 0$  liegt der Emitterknoten im Gegentaktfall auf Masse, da  $\underline{I}_q \underline{Z}_q = 0$ . Da sich der Emitterknoten im Gegentaktfall wie ein Masseknoten



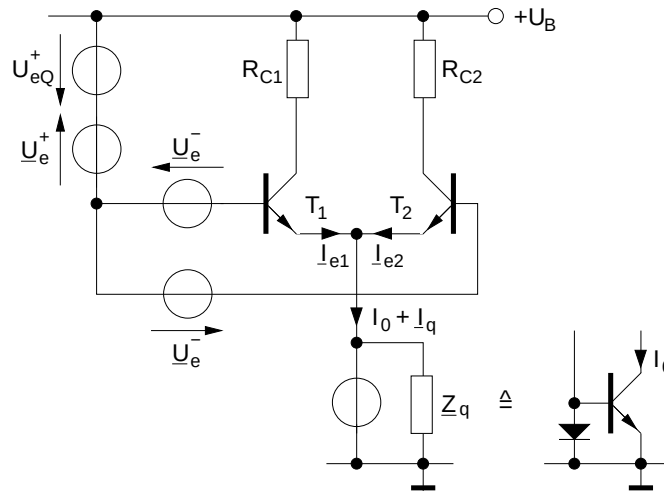


Abb. 10.25: Differenzverstärker mit Arbeitspunkteinstellung und realer Stromquelle. Der Strom in die Stromquelle besteht aus einem Gleichanteil  $I_0$  und einem Wechselanteil  $I_q$ .

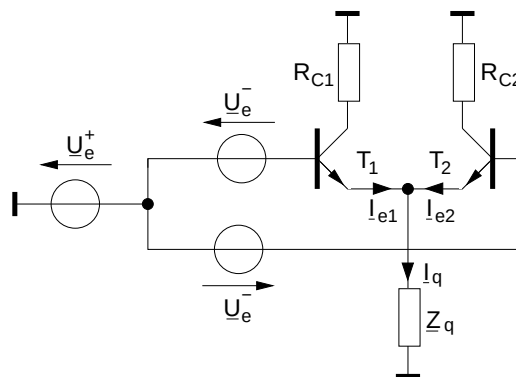


Abb. 10.26: Wechselstrom-Ersatzschaltbild des Differenzverstärkers in Abb. 10.25.

verhält, wird er als virtuelle Masse („virtual ground“) bezeichnet. Aus dem kompletten Wechselstrom-Ersatzschaltbild für Kleinsignalbetrieb kann das Gegentakt-Ersatzschaltbild gewonnen werden, indem virtuelle Masse und Masse gleich behandelt werden. Aus dem gleichen Grund würde z.B. auch eine in Reihe zur Quelle  $U_e^+$  liegende Impedanz verschwinden.

In der Literatur werden verschiedene Definitionen des Gegentakt- (und auch des Gleichtakt-Ersatzschaltbildes) verwendet. Wir verwenden sowohl

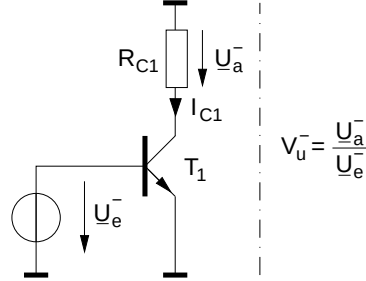


Abb. 10.27: Einphasige Ersatzschaltung für die Schaltung nach Abb 10.26 bei Betrachtung der Gegentakt-Quellen.

für Gegentakt, als auch für Gleichtakt immer das nur eine Symmetriehälfte beschreibende Ersatzschaltbild<sup>44</sup>. Dies ist sinnvoll, um bei der Beschreibung von gekoppelten Leitungen Konsistenz in der Definition von Gleichtakt- und Gegentakt-Wellenwiderstand zu erhalten (vgl. Elektronik III). Die anhand des Einzelleiter-Ersatzschaltbildes gewonnenen Gegentakt-Spannungen müssen entsprechend der Definition nach Gl. (10.103) noch mit zwei multipliziert werden, um die Differenzspannung (hier z.B.  $\underline{U}_{ed}$  und  $\underline{U}_{ad}$ ) zu erhalten. Entsprechend ist auch der Arbeitspunkt-Strom durch einen Transistor  $\frac{I_0}{2}$ .

Anhand des Gegentakt-Ersatzschaltbildes in Abb. 10.27 sehen wir ohne Rechnung, dass der Differenzverstärker für Gegentakt eine Emittergrundsaltung mit dem Arbeitspunkt-Strom  $\frac{I_0}{2}$  darstellt. Die Spannungsverstärkung der Emittergrundsaltung ergibt sich wie bereits in Kap. 5 hergeleitet zu

$$V_u^- = \frac{\underline{U}_a^-}{\underline{U}_e^-} = V_{ud} = -g_m R_{C1} = -\frac{I_0}{2U_T} R_{C1} \quad (10.105)$$

und entspricht damit dem, durch Linearisierung der Großsignal-Übertragungsfunktion in Gl. (10.94) erhaltenen Ergebnis. Alle anderen Kleinsignalparameter der Emittergrundsaltung sind ebenso anwendbar.

Wir betrachten jetzt den Differenzverstärker für Gleichtakt-Signale. Hier liegen an allen einander entsprechenden Knoten der beiden Symmetriehälften die gleichen Potentiale. In einem Gedankenexperiment können diese Knoten

<sup>44</sup>Im Sprachgebrauch wird dieses Ersatzschaltbild auch als „Ein(zel)leiter“-Ersatzschaltbild für ein Teilsystem/eine Symmetriehälfte bezeichnet.

also miteinander verbunden werden, ohne dass sich die Eigenschaften der Schaltung ändern. Man sieht, dass dann alle entsprechenden Komponenten der beiden Symmetriehälften miteinander parallel geschaltet sind. Entsprechend unserer Definition muss sich das Gleichtakt-Ersatzschaltbild

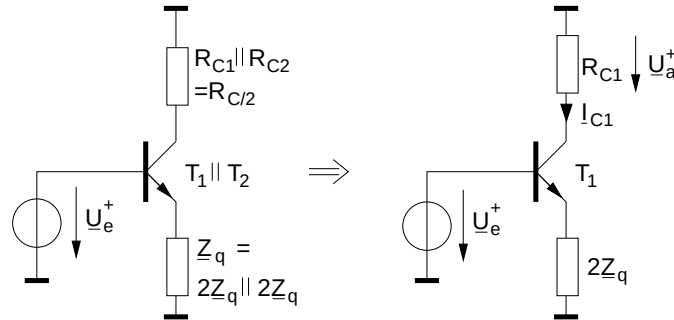


Abb. 10.28: Ermittlung des Gleichtakt-Ersatzschaltbildes. Links: Ersatzschaltung bei Parallelschaltung beider Symmetriehälften. Rechts: Ersatzschaltung für eine Symmetriehälfte (Einzelleitersystem).

auf eine Symmetriehälfte beziehen. Daher werden, wie in Abb. 10.27 gezeigt, den Bauelementen des Einzelelementersystem-Ersatzschaltbildes die Werte gegeben, mit denen sich bei bauelementeasier Parallelschaltung des identischen zweiten Einzelelementersystem-Ersatzschaltbildes wieder das Gleichtakt-Ersatzschaltbild für beide Leiter ergibt. Im Wesentlichen bedeutet dies, dass auf der Symmetriechse liegende Bauelemente (in Abb. 10.27  $Z_q$ ) mit dem doppelten Wert ihrer Impedanz berücksichtigt werden müssen.

Das Gleichtakt-Ersatzschaltbild des Differenzverstärkers zeigt die bekannte Emittergrundsaltung mit Serien-Serien-Gegenkopplung. Da für den Gegenkopplungs-Widerstand  $|Z_q| \gg \frac{1}{g_m}$  gilt, ist die Gleichtakt-Verstärkung

$$V_u^+ = \frac{U_a^+}{U_e^+} \approx \frac{U_e^+ R_{C1}}{2Z_q U_e^+} = \frac{R_{C1}}{2Z_q}. \quad (10.106)$$

Um eine möglichst geringe Gleichtaktverstärkung zu erhalten, ist daher eine Stromquelle mit möglichst hohem Innenwiderstand zu realisieren. Damit können dem Differenzsignal (Gegentakt) überlagerte Gleichtakt-Störungen wirkungsvoll unterdrückt werden. Ein Maß für die Gleichtaktunterdrückung

ist das sog. CMRR = „Common Mode Rejection Ratio“:

$$\text{CMRR} = \frac{|V_u^-|}{|V_u^+|} = \frac{R_{C1} I_0 2|\underline{Z}_q|}{2U_T R_{C1}} = |\underline{Z}_q| g_m \quad (10.107)$$

Es gibt den Faktor an, um den eine von einem Gegentakt-Eingangssignal stammende Spannung an  $R_{C1}$  größer ist, als die von einer Gleichtakt-Eingangsspannung gleicher Größe.

Wird das Differenz- Ausgangssignal  $U_{ad}$  verwendet (also das Gegentaktssignal), ist das CMRR von geringer Aussagekraft: Bei vollständiger Symmetrie des Differenzverstärkers ist unabhängig von dem Wert des CMRR der Anteil des Gleichtaktsignals im Differenz- (Gegentakt) Ausgangssignal identisch Null. Aufgrund der sehr guten Symmetrieeigenschaften („Matching“) monolithisch integrierter Bipolartechnologien werden Differenzverstärker und speziell auch Operationsverstärker bevorzugt in dieser Technologie realisiert.

## 10.7 Aktive Last (Phasenaddierschaltung)

Um eine große Spannungsverstärkung zu erzielen, benötigt der Differenz-Verstärker hohe Werte der Lastwiderstände  $R_C$ . Neben einem hohen Platzbedarf ergeben sich auch schlechte Matching-Werte, da hochohmige Widerstände in integrierter Technologie sehr schmal und damit sehr anfällig gegen Breitentoleranzen sind.

Wesentlich bessere Ergebnisse lassen sich bei Verwendung eines Stromspiegels als aktive Last des Differenz-Verstärkers erzielen. Dabei wird der Stromspiegel im Unterschied zu dem bisher betrachteten statischen Betrieb dynamisch betrieben:

In der verbreitetsten Variante (Abb. 10.29) wird der Stromspiegel so eingesetzt, daß im Idealfall für Stromspiegel-Transistoren ohne Early-Effekt und mit  $\beta_0 \rightarrow \infty$  mit dem Übersetzungsverhältnis  $k = 1$  für die Gleichströme im Arbeitspunkt gilt:

$$kI_{C01} = I_{C01} = I_{C02} \rightarrow I_{a0} = 0 \quad (10.108)$$

Dann gilt für die (Klein-) Signalströme bei Gegentakt mit

$$\underline{I}_{C1} = -\underline{I}_{C2} \quad (10.109)$$

$$\underline{I}_a = k\underline{I}_{C1} - \underline{I}_{C2} = 2\underline{I}_{C1} \quad (10.110)$$

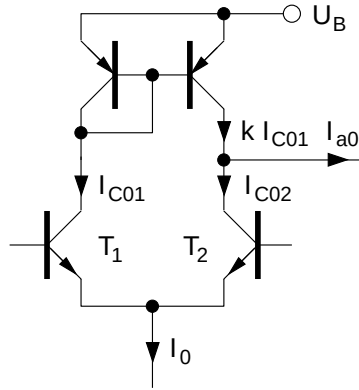


Abb. 10.29: Einfache Schaltung zur Addition der gegenphasigen Ausgangsströme des Differenz-Verstärkers aus  $T_1$ ,  $T_2$ .

Der Stromspiegel bildet also die Differenz der beiden Ausgangsströme  $I_{C1}$ ,  $I_{C2}$ . Der Ausgangsstrom  $I_a$  hat daher die doppelte Amplitude eines einphasigen Stromes.

Zusätzlich trägt der Stromspiegel durch die Differenzbildung zur erwünschten hohen Gleichtaktunterdrückung bei.

Bei Betrachtung des realen Stromspiegels ergibt sich das Problem, daß  $k$  von dem Idealwert 1 abweicht. Beträgt z.B.  $\beta_0$  der pnp-Stromspiegeltransistoren den Faktor 10, besitzt  $k$  nur noch einen Wert von 0,83. Es ergibt sich dann im Arbeitspunkt ein Ausgangsgleichstrom von

$$kI_{C01} - I_{C01} = -0,17 I_{C01}, \quad (10.111)$$

der über eine ausreichend niederohmige Last mit geeignetem Arbeitspunkt-Potential fließen muß. Ist dies nicht der Fall (z.B. Leerlauf am Ausgang d.h.  $I_{a0} = 0$ ), sinkt das Kollektorpotential von  $T_2$  soweit ab, daß durch Stromfluß in der Kollektor-Basis-Diode von  $T_2$   $I_{C02}$  soweit verringert werden kann, daß  $I_{a0} = 0$  wird. In diesem Fall stellt sich eine Offsetspannung  $\Delta U_{BE} = U_T \ln \frac{I_{C01}}{I_{C02}}$   $\Delta U_{be} = 27 \text{ mV} \cdot \ln 0,83 \approx 5 \text{ mV}$  ein.

Eine Schaltungsvariante, die diese Nachteile vermeidet, verwendet den Differenz-Verstärker mit Basiskopplung in Abb. 10.30. Der Arbeitspunkt wird hier über Stromeinspeisung in den gemeinsamen Basisanschluß eingestellt und ist daher den prozeß- und temperaturbedingten Schwankungen von  $\beta_0$  unterworfen. Der durch den, in die Basen eingespeiste Arbeitspunktstrom  $\frac{I_0}{\beta_0}$  im Kollektor fließende Strom  $\frac{I_0}{2}$  muss durch entsprechende Beschaltung in

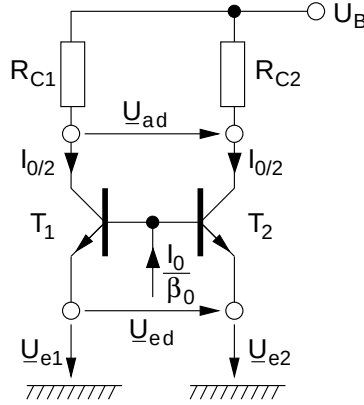


Abb. 10.30: Differenzverstärker mit Basiskopplung.

den Emitter fließen können. Die Transistoren in dieser Variante arbeiten in Basisschaltung. Die Gegentaktverstärkung beträgt wie in Kap. 4.2 hergeleitet

$$V_{ud} = \frac{U_{da}}{U_{de}} = g_{m1} R_{C1} = \frac{I_0}{2U_T} R_{C1} \quad (10.112)$$

Der Gegentakt-Eingangswiderstand ist sehr niederohmig und beträgt

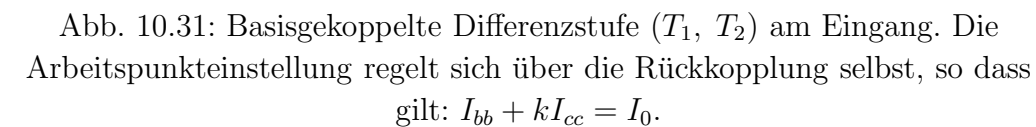
$$R_{ein}^- \approx \frac{1}{g_{m1}} = \frac{2U_T}{I_0} \quad (10.113)$$

Er ist damit um den Faktor  $\approx \beta_0$  kleiner als bei dem emittergekoppelten Differenz-Verstärker ( $R_{ein}^- \approx |\frac{1}{g_{be}}| = \frac{\beta_0}{g_m}$ ). Auch der Eingangs-Ruhestrom ist im Vergleich zum emittergekoppelten Differenz-Verstärker um den Faktor  $\approx \beta_0$  größer.

Wegen dieser Nachteile werden (außer bei Transimpedanz-Verstärkern) vor die Eingänge komplementäre Emitterfolger geschaltet. Die am häufigsten verwendete Schaltung zeigt Abb. 10.31.

Im Gegensatz zu dem zuvor besprochenen basisgekoppelten Differenz-Verstärker mit npn-Transistoren werden hier pnp-Typen verwendet. Dies hat den Vorteil, daß die Komplementärtransistoren vom npn-Typ mit hoher Stromverstärkung und daher hohem Eingangswiderstand und geringen Eingangsruhestromen sind.

Auch die, wegen der Empfindlichkeit gegenüber Schwankungen der Stromverstärkung nachteilige Arbeitspunkteinstellung über die Basisströme von  $T_1$  und  $T_2$  wird durch das Stromwaage-Prinzip vermieden. Für das auf die Re-


$$I_0 = \underbrace{\frac{I_{cc}}{\alpha_{f3}(1 + \beta_{01})}}_{I_{bb}} + k I_{cc} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_{f3} \approx 1}}{\approx} I_{cc} \left( k + \frac{1}{1 + \beta_{01}} \right) \quad (10.114)$$
$$I_0 = I_{cc} \left( \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2}{\beta_{01}}}}_k + \frac{1}{1 + \beta_{01}} \right) \quad (10.115)$$

und damit nach Umformen

$$\begin{aligned}\frac{I_{CC}}{I_0} &= \frac{2 + 3\beta_{01} + \beta_{01}^2}{2 + 2\beta_{01} + \beta_{01}^2} \\ &= 1, 2 \dots 1 \quad \text{für } \beta_{01} = 1 \dots \infty.\end{aligned}\quad (10.116)$$

D.h. bei konstant eingepprägtem Arbeitspunkt-Strom  $I_0$  ändert sich der Arbeitspunkt-Strom des Differenz-Verstärkers nur um 20 %, wenn  $\beta_{01}$  zwischen 1 und  $\infty$  schwankt.

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus und der Arbeitspunkt-Einstellung über Ströme hat auch dieser Darlington-Verstärker eine hohe Gleichtaktunterdrückung. Eine Berechnung würde analog zur bereits demonstrierten Vorgehensweise des letzten Kapitels erfolgen.

Wir berechnen die Kleinsignalverstärkung  $V_{ud} = \frac{U_{ad}}{U_{ed}}$  der Stufe und verwenden dafür geeignete Annahmen und Näherungen mit Hilfe der Wirkungsersatzschaltbilder der Transistoren. (Vgl. Kap. 4.2):

- $T_3$  und  $T_4$  können als Emitterfolger mit dem Gegentakt-Ausgangswiderstand  $R_{aus3}^- \approx \frac{1}{g_{m3}}$  (Basisbahn- und Emitterkontaktwiderstand vernachlässigt) betrachtet werden.
- Der Gegentakt-Eingangswiderstand der Basisstufe ist, da auch in den Emitter „geschaut“ wird, ähnlich und beträgt  $R_{ein1}^- \approx \frac{1}{g_{m1}}$ .
- Bei einer Spannungsverstärkung  $V_u^- \approx 1$  des Emitterfolgers beträgt der Strom in die Basisstufe

$$\underline{I}_{E1}^- \approx \frac{V_u^- \underline{U}_e^-}{R_{aus3}^- + R_{ein1}^-} \approx \underline{U}_e^- \frac{1}{\frac{1}{g_{m3}} + \frac{1}{g_{m1}}} \quad (10.117)$$

- Da die Arbeitspunkt-Ströme in  $T_1$  und  $T_3$  i. e. gleich sind, gilt  $g_{m3} = g_{m1}$  woraus folgt

$$\Rightarrow \underline{I}_{E1}^- \approx \underline{U}_e^- \frac{g_{m1}}{2}. \quad (10.118)$$

Mit der Stromverstärkung der Basisstufe  $\frac{I_{C1}^-}{I_{E1}^-} \approx 1$  beträgt die Steilheit des Differenz-Verstärkers

$$S_1 = \frac{I_{C1}^-}{\underline{U}_e^-} \approx \frac{I_{E1}^-}{\underline{U}_e^-} \approx \frac{g_{m1}}{2} \approx \frac{I_{cc}}{4U_T} \approx \frac{I_0}{4U_T} \quad (10.119)$$



und damit die Spannungsverstärkung

$$V_{ud} = \frac{U_{ad}}{U_{ed}} = \frac{S_1 \underline{U}_e^- R_{C1}}{\underline{U}_e^-} = S_1 R_{C1} = \frac{I_0 R_{C1}}{4U_T} \quad (10.120)$$

Wird anstelle der Lastwiderstände ein npn-Stromspiegel mit  $k = 1$  eingesetzt, ergibt sich ein Ausgangsstrom entsprechend  $S_1 U_{ed}$ . Diese Schaltungsvariante werden wir im nächsten Kapitel am Eingang des bekannten Stromverstärkers  $\mu A741$  wiederfinden.

Wichtig für den Einsatz als Operationsverstärker ist ein möglichst hochohmiger Eingang, der die ansteuernde Schaltung nicht belastet. Für den differentiellen Eingangswiderstand des Eingangs-Emitterfolgers kann aufgrund der Transformationseigenschaften aus dem Wirkungsersatzschaltbild des Transistors geschrieben werden

$$R_{ein3}^- \approx \beta_3(r_{e1} + r_{e3}) = \beta_3 \left( \frac{1}{g_{m1}} + \frac{1}{g_{m3}} \right) \underset{g_{m1}=g_{m3}}{\approx} \beta_3 \frac{2}{g_{m3}} = 2 \frac{1}{g_{be3}} = 2 r_{be3} \quad (10.121)$$

Zwischen den beiden Eingängen liegt daher ein für Gegentakt-Signale wirksamer Widerstand von  $2R_{ein,3}^- = 4r_{be3} = 4 \frac{\beta_3}{g_{m3}}$

## 11 Operationsverstärker

### 11.1 Eigenschaften idealer und realer Operationsverstärker

Der Name Operationsverstärker kommt von der ursprünglichen Verwendung dieser Verstärker in Analogrechnern zur Simulation mathematischer Operationen, zum Beispiel zur analogen Lösung von Differentialgleichungen. Diese Anwendung ist heute fast bedeutungslos geworden, die Hauptanwendungsgebiete für Operationsverstärker sind nun die Filtertechnik (aktive Filter) sowie Meß- und Regeltechnik. Daneben werden Operationsverstärker als Universal-Breitbandverstärker benutzt.

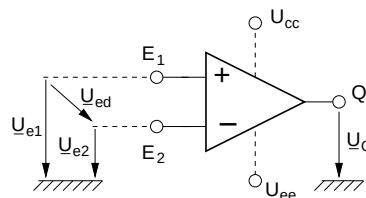


Abb. 11.1: Schaltsymbol eines Operationsverstärkers (OP) ohne Beschaltung. Die Anschlüsse für Betriebsspannung sowie für die Offsetkompensation werden i.d. Regel nur bei besonderer Beschaltung gezeichnet.

Ein idealer Operationsverstärker hat folgende Eigenschaften:

1. Er hat einen bezüglich des Ausgangs invertierenden und einen nichtinvertierenden Eingang;
2. Die Ausgangsspannung  $u_Q$  ist gleich null, falls die Differenzeingangsspannung  $u_{e1} - u_{e2}$  gleich null ist;
3. Der Betrag der Eingangsimpedanz zwischen beiden Eingängen und bei der Eingänge gegen den Bezugspunkt der Eingänge ist unendlich groß;
4. Die Ausgangsimpedanz ist gleich null;
5. Er hat eine unendliche große frequenzunabhängige Differenzspannungsverstärkung und eine unendliche große frequenzunabhängige Gleichtaktunterdrückung.

Für einen realen Operationsverstärker gilt stattdessen:

- zu 1. Dies gilt nur bei tiefen Frequenzen; bei höheren Frequenzen tritt eine Phasenverschiebung auf.
- zu 2. Für  $u_{e1} - u_{e2} = 0$  nimmt die Ausgangsspannung einen Wert an, der in der Nähe einer der Betriebsspannungen liegt. Beim nicht gegengekoppelten Operationsverstärker wird  $u_Q = 0$  nur erreicht, wenn eine Differenzeingangsspannung  $u_{e1} - u_{e2} \approx 1 \text{ mV}$  anliegt.
- zu 3. Der Betrag der Differenz-Eingangsimpedanz  $R_{\text{ein},d}$  ist  $\gtrsim 1 \text{ M}\Omega$ , der der Gleichakteingangsimpedanz  $R_{\text{ein},d}$  ist  $\gtrsim 10 \text{ M}\Omega$ , bei jeweils hinreichend tiefen Frequenzen.
- zu 4. Der Betrag der Ausgangsimpedanz  $R_{\text{aus}}$  ist  $\lesssim 100 \Omega$ .
- zu 5. Die Gleichtaktunterdrückung ist  $\gtrsim 90 \text{ dB}$ .

Auf die Differenz-Spannungsverstärkung wird bei der Besprechung der Schaltung des OP's  $\mu A 741$  eingegangen.

Wir betrachten im Folgenden die Schaltung eines Operationsverstärkers am Beispiel des Bauelementes  $\mu A 741$ . Dieser sich bereits seit 1968 auf dem Markt befindende OP besitzt im Vergleich zu modernen OP's zwar durchweg schlechtere Werte, eignet sich aber in jedem Fall aufgrund des sehr niedrigen Preises für Standardanwendungen ohne besondere Anforderungen. Seine Schaltung beinhaltet viele der auch heute noch angewandten Schaltungsprinzipien und eignet sich daher hervorragend zur Demonstration. Aus diesem Grund zählt der  $\mu A 741$  wohl zu den am häufigsten in der Literatur dargestellten und untersuchten integrierten Schaltungen. Abweichungen in der Berechnung oder in den Ergebnissen zu anderen Literaturstellen resultieren zum Einen in unterschiedlichen vereinfachenden Annahmen, zum Anderen aber auch in geringfügigen Schaltungsmodifikationen, die der 741 im Laufe der Zeit erfahren hat. Im Handel sind identische oder ähnliche Bausteine unter Bezeichnungen wie z.B.  $SN72741$ ,  $TBA222$ ,  $TL1741$ ,  $LM741$  von unterschiedlichen Herstellern erhältlich. Wir bezeichnen den Baustein im Folgenden mit  $OP 741$ .

Für alle nachfolgenden Berechnungen werden  $U_T = 26 \text{ mV}$ ,  $U_{BEf} = 700 \text{ mV}$  sowie Symmetrie im Differenz-Verstärker angenommen.

Die Schaltung des  $OP 741$  in Abb. 11.2 ist aus Grundsaltungen aufgebaut,

die alle bereits in den vergangenen Kapiteln behandelt wurden.

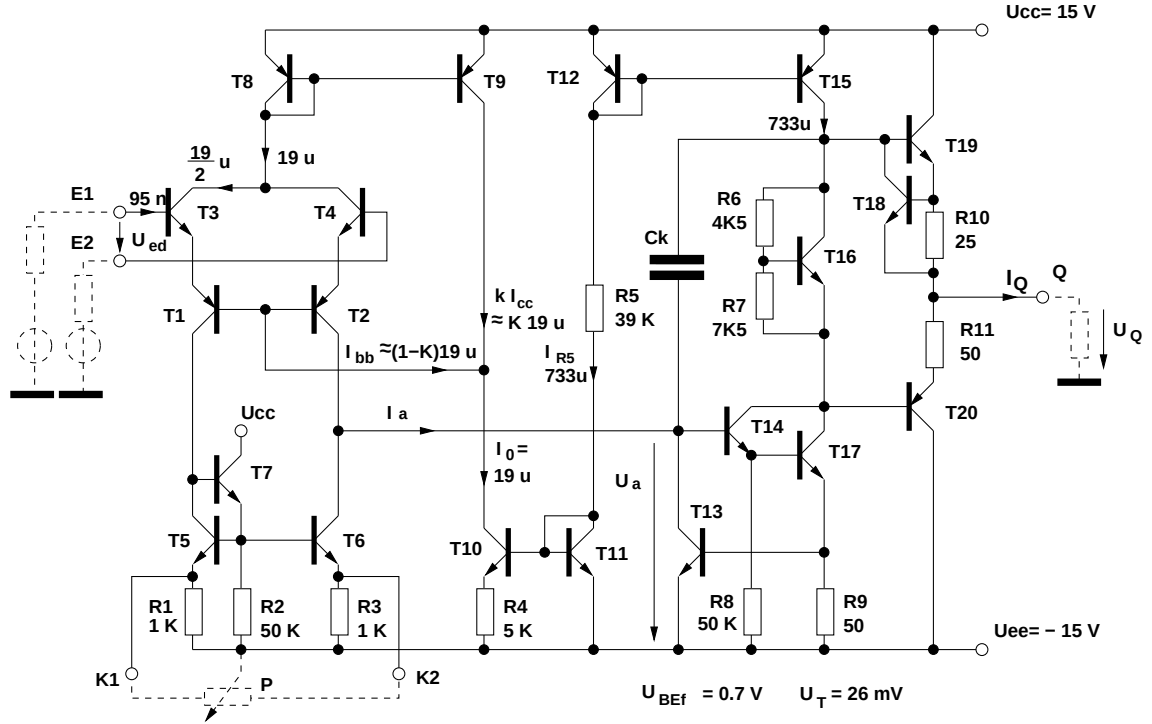


Abb. 11.2: Schaltung des Operationsverstärkers  $\mu A 741$ .

Die Betriebsspannung des OP beträgt i.d. Regel  $U_{cc} = 15V$  und  $U_{ee} = -15V$  so daß die Ausgangsspannung der Gegentaktendstufe  $T_{19}$   $T_{20}$  symmetrisch um ein Massepotential (0 V) schwingen kann.

Sämtliche Arbeitspunkt-Ströme leiten sich aus dem, im Referenzzweig  $T_{12}$ ,  $R_5$ ,  $T_{11}$  fließenden Strom  $I_{R5} = (U_{cc} - U_{ee} - 2U_{BEf})/R_5 \approx 0,73 \text{ mA}$  ab. Über den Widlar-Stromspiegel  $T_{11}$ ,  $T_{10}$  ergibt sich aus Gl. (10.28) der Strom<sup>45</sup>  $I_{C,10} \approx 19 \mu A$ . Dieser Strom speist den aus  $T_1 - T_4$  bestehenden basisgekoppelten Differenz-Verstärker (vgl. Abb. 10.31), dessen Arbeitspunkt über die Stromwaage-Reglung  $I_0 = I_{bb} + kI_{cc}$  konstant auf  $I_{cc} \approx I_0 = 19 \mu A$  gehalten wird (vgl. Gl. (10.114)). Die Steilheit der Eingangsemitterfolger, sowie des basisgekoppelten Transistorpaars  $T_1$ ,  $T_2$  betragen damit  $g_{m,3} = \frac{19 \mu A}{2U_T} \approx 0,36 \text{ mS}$ .

<sup>45</sup>Zur Abkürzung werden im folgenden Transistorströme mit dem jeweiligen Anschluß und der Nummer indiziert ( $I_{C,10}$  ist demnach der in den Kollektor von  $T_{10}$  fließende Strom)

Bei einer Stromverstärkung der Eingangsemitterfolger von  $\beta_{0,3} \approx 100$  beträgt damit der Gegentakt-Eingangswiderstand nach S. 269, Gl. (10.121)  $R_{ein,3}^- = \frac{2\beta_{0,3}}{g_{m,3}} = \frac{2 \cdot 100}{0,36} \text{ k}\Omega = 0,55 \text{ M}\Omega$  zwischen den Eingängen liegt demnach ein „differentieller“ Widerstand von  $R_{ein,d} = 1,1 \text{ M}\Omega$ . Der Eingangsruhestrom  $I_{B0,3}$  beträgt  $I_{C0,3}/\beta_{0,3} = 9,5 \mu\text{A}/100 = 95 \text{ nA}$ .

Der Differenzausgangsstrom von  $T_1, T_2$  wird mit Hilfe der in Kap. 10.7, S. 267 besprochenen aktiven Last in Form des Stromspiegels aus  $T_5, T_6$  subtrahiert. Dadurch besitzt der Ausgangsstrom der Eingangsstufe den Wert  $I_a = I_{C2} + I_{C1}$ .

Ein Offset durch Mismatch, endliches  $\beta$  oder unsymmetrische Eingangsbeschaltung kann an den Gegenkopplungswiderständen  $R_1, R_3$  des Stromspiegels mit Hilfe eines extern zugeschalteten Potentiometers  $P$  kompensiert werden. Der Begriff Gegenkopplungswiderstände trifft hier jedoch in Bezug auf die Wirkung von  $R_1, R_3$  nicht zu. An ihnen fallen im Arbeitspunkt nur  $\approx 9,5 \mu\text{A} \cdot 1 \text{ k}\Omega \approx 9,5 \text{ mV}$  ab, so daß ihre wesentlich Funktion in der Bereitstellung einer Einstellmöglichkeit zur Offsetkompensation besteht.

Der Ausgangsstrom des Eingangs-Differenz-Verstärkers steuert den Darlington-Transistor  $T_{14}, T_{17}$  an, dessen Eingangswiderstand die Last darstellt.

Der Eingangsstrom des Darlington Transistors  $I_{B0,14}$  zieht im Arbeitspunkt einen Ruhestrom aus dem Ausgang des Differenz-Verstärkers, so daß ohne zusätzliche Maßnahme ein Offsetfehler entstehen würde. (Ohne Offsetfehler muß für  $U_{ed} = 0 \Rightarrow I_{C0,2} = I_{C0,6} \Rightarrow I_{a0} = 0$  gelten).

Der Ruhestrom des Darlington-Transistors wird im Wesentlichen durch den durch  $R_8$  fließenden, um  $\beta_{0,13}$  verringerten Strom gebildet. Durch das Hinzufügen von  $R_2 = R_8$  in den Last-Stromspiegel des Differenz-Verstärkers gilt in guter Näherung  $I_{B0,7} \approx I_{B0,14}$ , so daß der Kollektorstrom von  $T_6$  den zusätzlichen Ruhestrom von  $T_{14}$  liefert. Der durch  $I_{B0,14}$  verursachte Offset-Fehler wird also durch  $I_{B0,7}$  kompensiert, so daß die Differenz der Kollektorströme  $I_{C0,1} - I_{C0,2}$  vernachlässigbar klein ist.

Der Ausgangsstrom  $I_a$  der Eingangsstufe steuert den aus  $T_{14}, T_{17}$  bestehenden Darlington-Transistor an. Als Besonderheit liegt  $R_8$  nicht über die Basis-Emitterstrecke von  $T_{14}$ , sondern wie bei einem Emitterfolger gegen die negative Betriebsspannung. Dies hat den Vorteil, daß  $T_{17}$  über  $R_8$  schnell ausgeschaltet wird, falls  $T_{14}$  bei Übersteuerung der Endstufe sperrt.

Der Kollektorstrom des Darlington-Transistors fließt durch die Vorspannungsstufe aus  $T_{16}$ ,  $R_6$ ,  $R_7$ , die die zur Vermeidung des „toten Bereichs“ notwendige Vorspannung zwischen den Basen der Gegentaktstufe aus von  $T_{19}$  und  $T_{20}$  liefert. Mit  $U_{R7} = U_{BEf} = 0,7 \text{ V}$  ergibt sich  $U_{CE,16} = U_{BEf} \frac{R_6 + R_7}{R_7} = 1,6 U_{BEf}$ . Über die Kennlinien von  $T_{19}$ ,  $T_{20}$  läßt sich daraus ein Ruhestrom von ca.  $60 \mu\text{A}$  durch  $T_{19}$ ,  $T_{20}$  ermitteln, was ausreicht, um die aus dem toten Bereich resultierenden Übernahmeverzerrungen zu verringern. Die statische Verlustleistung ( $30 \text{ V} \cdot 60 \mu\text{A} = 1,8 \text{ mW}$ ) ist bei dieser Einstellung noch gering.

Der Lastwiderstand des Darlington-Transistors besteht bei kleinen Ausgangsströmen der Gegentaktendstufe (=große Eingangswiderstände von  $T_{19}$  und  $T_{20}$ ) näherungsweise aus der Parallelschaltung der Ausgangswiderstände von  $T_{15}$  und  $T_{17}$ . Die an diesem Lastwiderstand erzeugte Spannung wird mit einer Verstärkung  $\approx 1$  über die Gegentakt-Emitterfolger  $T_{19}$ ,  $T_{20}$  an den Ausgang  $Q$  gegeben.

Bei großen Aussteuerungen und den damit verbundenen hohen Strömen müssen die Ausgangstransistoren  $T_{19}$ ,  $T_{20}$  vor Überlastung geschützt werden. Dies geschieht für positive bzw. negative Ausgangsströme in unterschiedlicher Weise.

Bei positiven Ausgangsströmen ( $T_{19}$  leitend) wird der Basisstrom von  $T_{19}$  durch  $T_{18}$  begrenzt, indem  $T_{18}$  umso mehr Basisstrom von  $T_{19}$  übernimmt, je größer der Spannungsabfall  $U_{R10} = R_{10}I_Q$  ist. Begrenzung setzt ein bei  $U_{R10} \approx U_{BEf} \Rightarrow I_Q \gtrsim 20 \dots 25 \text{ mA}$ .

Bei negativem Ausgangsstrom steigt mit zunehmendem Ausgangsstrom  $|I_Q|$  der Basisstrom von  $T_{20}$ , der im wesentlichen von  $T_{17}$  über  $R_9$  geliefert wird. Zusätzlich gelangt der bei zulässigen negativen Ausgangsströmen gesperrte Transistor  $T_{18}$  in den invers aktiven Bereich, (Kollektor-Basis-Diode leitet) sobald der Spannungsabfall an  $R_{11} = 50 \Omega$  den Wert der Vorspannung von  $1,6 U_{BEf} \approx 1,12 \text{ V}$  übersteigt. Dadurch fließt ein zusätzlicher, mit  $|I_Q|$  steigender Strom durch  $T_{16}$ , der zusammen mit dem steigenden Basisstrom von  $T_{20}$  den Spannungsabfall an  $R_9$  vergrößert, so daß  $T_{13}$  zunehmend mehr Basisstrom von  $T_{14}$  übernimmt, wodurch das Kollektorpotential von  $T_{14}$ ,  $T_{17}$  ansteigt. Begrenzung setzt ein, wenn  $U_{R9} \approx U_{BEf}$  erreicht, was bei einem Ausgangsstrom von  $20 \dots 25 \text{ mA}$  eintritt.

Die Strombegrenzung durch  $T_{18}$ ,  $T_{13}$  bewirkt, dass bei Überschreitung des Maximalstroms ( $\pm 20 \text{ mA}$ ) der im Normalbetrieb als niederohmige

Spannungsquelle arbeitende Gegentaktausgang in eine Stromquelle mit näherungsweise konstantem Kurzschlußstrom übergeht. Die für negative Ausgangsströme aufwändigere Schaltung wurde verwendet, da aufgrund der geringen Stromverstärkung von  $T_{20}$  (pnp-Transistor) eine ausreichende Begrenzung von  $I_{B,20}$  durch einen parallel geschalteten Transistor nicht möglich ist.

Wir berechnen im Folgenden einige Kleinsignal-Kenngrößen des Operationsverstärkers. Aufgrund der quasistatischen Betrachtungsweise wird auf die Phasorenschreibweise verzichtet.

Die Steilheit der Eingangsstufe kann direkt mit Hilfe der bereits in Kapitel 10.7, S. (269), Gl. (10.120) hergeleiteten Beziehung, unter Berücksichtigung des phasenaddierenden Stromspiegels angegeben werden. Es gilt mit Gl. (10.120)

$$S_1 = \frac{I_{C1}^-}{U_e^-} = \frac{2I_{C1}^-}{2U_e^-} = \frac{-I_a}{U_{ed}} = \frac{I_0}{4U_T} = \frac{19 \text{ A}}{4 \cdot 26 \text{ mV}} \approx 183 \text{ S} . \quad (11.1)$$

Wir berechnen den Eingangswiderstand des Darlington-Transistors als Lastwiderstand  $R_{L1}$  der Eingangsstufe.  $T_{12}$  und  $T_{15}$  bilden näherungsweise einen 1:1 Stromspiegel, so dass  $I_{C0,15} \approx I_{R5} \approx 733 \text{ A}$  beträgt. Bei geringer Belastung des Ausgangs Q sind die Basisströme von  $T_{19}$ ,  $T_{20}$  vernachlässigbar und es muss sich ein Kollektorstrom des Darlington Transistors in der Größe von  $I_{C0,15}$  einstellen. Da  $T_{17}$  in erster Näherung den gesamten Strom führt, gilt  $I_{C0,17} \approx I_{C0,15} \approx 733 \text{ A}$ . Die Steilheit von  $T_{17}$  beträgt damit  $g_{m,17} = \frac{733 \text{ A}}{26 \text{ mV}} = 27 \text{ mS} \approx \frac{1}{37\Omega}$ . Der Kehrwert der Steilheit repräsentiert den Ausgangswiderstand von  $T_{17}$ . Da dieser Wert nicht vernachlässigbar klein gegenüber dem in Reihe liegenden Lastwiderstand  $R_9 = 50 \Omega$  ist, müssen beide Widerstände im Emitter von  $T_{17}$  berücksichtigt werden. Der Eingangswiderstand von  $T_{17}$  ist damit mit  $\beta_{0,17} = 200$

$$R_{ein,17} = \beta_{0,17} \left( \frac{1}{g_{m,17}} + R_9 \right) = 200(37 + 50) = 17,4 \text{ k}\Omega , \quad (11.2)$$

Dieser Wert liegt parallel zu  $R_8$  und wird mit der Stromverstärkung  $\beta_{0,14} = 100$  von  $T_{14}$  an dessen Eingang transformiert. Es ergibt sich ein Wert von

$$R_{L1} = R_{ein,14} = \beta_{0,14}(R_{ein,17} || R_8) = 100 \frac{17,4 \cdot 50}{67,4} \text{ k}\Omega \approx 1,3 \text{ M}\Omega . \quad (11.3)$$

Die Spannungsverstärkung der Eingangsstufe beträgt demnach mit der Steilheit aus Gl. (11.1) und dem Lastwiderstand aus Gl. (11.3)

$$V_{U1} = \frac{U_a}{U_{de}} = \frac{I_a}{U_{de}} R_{L1} = -S_1 R_{L1} = -238 . \quad (11.4)$$

Um die Steilheit des Darlington Transistors zu berechnen, kann  $T_{14}$  als Emitterfolger mit der Spannungsverstärkung  $\approx 1$  betrachtet werden. Damit liegt die Eingangsspannung  $U_a$  des Darlington-Transistors auch zwischen Basis von  $T_{17}$  und  $U_{ee}$ . Der Ausgangsstrom  $I_{C,17}$  von  $T_{17}$  ist dann  $I_{C,17} = U_a \frac{1}{\frac{1}{g_{m,17}} + R_9}$ . Die Steilheit des Darlington Transistors ergibt sich damit unter Vernachlässigung des Kollektorstroms von  $T_{14}$  zu

$$S_2 \approx \frac{I_{C,17}}{U_a} = \frac{1}{\frac{1}{g_{m,17}} + R_9} = \frac{1}{37 \, \Omega + 50 \, \Omega} \approx 12 \, mS . \quad (11.5)$$

Der Lastwiderstand des Darlington-Transistors  $R_{L2}$  wird bei kleinen Ausgangsströmen ( $r_{BE0,19}, r_{BE0,20} \rightarrow \infty$ ) durch den Ausgangswiderstand von  $T_{15}$  und den Ausgangswiderstand des Darlington Transistors gebildet. Durch die Vorspannung  $U_{CE,16} = 1,6 \, U_{BEf}$  beträgt für beide Transistoren bei einer symmetrischen Betriebsspannung von  $\pm 15 \, V$

$$|U_{CE,15}| = U_{cc} - \frac{1}{2} 1,6 \, U_{BEf} = 15V - 0,8 \cdot 0,7V = 14,4 \, V .$$

$$U_{CE,17} = |U_{ee}| - \frac{1}{2} 1,6 \, U_{BEf} = 14,4 \, V .$$

Aufgrund des Early-Effektes ergibt sich mit Gl. (10.75) aus Kap. 10 der Ausgangsleitwert für  $T_{15}, T_{17}$

$$\frac{\partial I_{C0}}{\partial U_{CE0}} = \frac{I_{C0}}{U_A + U_{CE}} \quad (11.6)$$

und damit bei Annahme gleicher Early Spannungen  $|U_A| = 70 \, V$  die parallel liegenden Lastwiderstände

$$r_{0,15} = \frac{U_A + U_{CE,15}}{I_{C0,15}} = \frac{70 \, V + 14,4 \, V}{733 \, A} \approx 115 \, k\Omega , \quad (11.7)$$

$$r_{0,17} = \frac{U_A + U_{CE,17}}{I_{C0,17}} \approx 115 \, k\Omega . \quad (11.8)$$



Der Lastwiderstand des Darlington-Transistors beträgt damit

$R_{L2} = r_{0,15} || r_{0,17} \approx 58 \text{ k}\Omega$ . Zusammen mit der Steilheit des Darlington Transistors aus Gl. (11.5) ergibt sich die Spannungsverstärkung der Darlington-Stufe zu

$$V_{U2} = -S_2 R_{L2} = -12 \text{ mS} \cdot 58 \text{ k}\Omega = -696 . \quad (11.9)$$

Da die Spannungsverstärkung der Gegentakt-Emitterfolger am Ausgang  $\approx 1$  ist, ergibt sich die Leerlauf-Spannungsverstärkung des Operationsverstärkers im quasistatischen Betrieb mit Gl. (11.4) und Gl. (11.9) zu

$$V_U = \frac{U_Q}{U_{ed}} = V_{U1} V_{U2} = 238 \cdot 696 \approx 166 \cdot 10^3 \hat{=} 104 \text{ dB} . \quad (11.10)$$

Der differentielle Eingangswiderstand des OP wurde bereits auf Seite 273 berechnet und beträgt  $R_{ein,d} \approx 1,1 \text{ M}\Omega$ . Der Ausgangswiderstand ist maximal im Fall ohne oder mit sehr geringer Aussteuerung. In diesem Fall bestimmt der Ruhestrom die Steilheit der Gegentakt-Ausgangsemitterfolger. Mit einem Ruhestrom von  $60 \mu\text{A}$  ergibt sich der maximale Wert des Ausgangswiderstandes zu

$$R_{aus,max} \approx \left( \frac{1}{g_{m,19}} + R_{10} \right) || \left( \frac{1}{g_{m,20}} + R_{11} \right) \approx (433 \Omega + 25 \Omega) || (433 \Omega + 50 \Omega) \approx 235 \Omega \quad (11.11)$$

Anhand der berechneten Werte läßt sich das Kleinsignalmodell des OP 741 in Abb. 11.3 angeben.

## 11.2 Dynamisches Verhalten des Operationsverstärkers

Bisher haben wir den Operationsverstärker im quasistatischen Betrieb betrachtet, in dem frequenzabhängige Elemente vernachlässigbar sind. Aufgrund der sehr hochohmigen Knoten innerhalb der Verstärkerkette (vgl. Abb. 11.3) besitzen die parasitären Kapazitäten der integrierten Transistoren, sowie der Metallisierung der Verbindungen zwischen den Bauelementen einen großen Einfluß. Die größte Zeitkonstante  $\tau_1$  ergibt sich aufgrund der parallel zu  $R_{L1}$  liegenden effektiven Kapazität, die sich aus der Ausgangskapazität  $C_{a2} + C_{a6}$  von  $T_2$  und  $T_6$ , der Metallisierungskapazität  $C_{met}$  an diesem Knoten und der Eingangskapazität der Darlington-Stufe.

Deren Wert ist selbst ohne die zusätzliche interne Kompensationskapazität

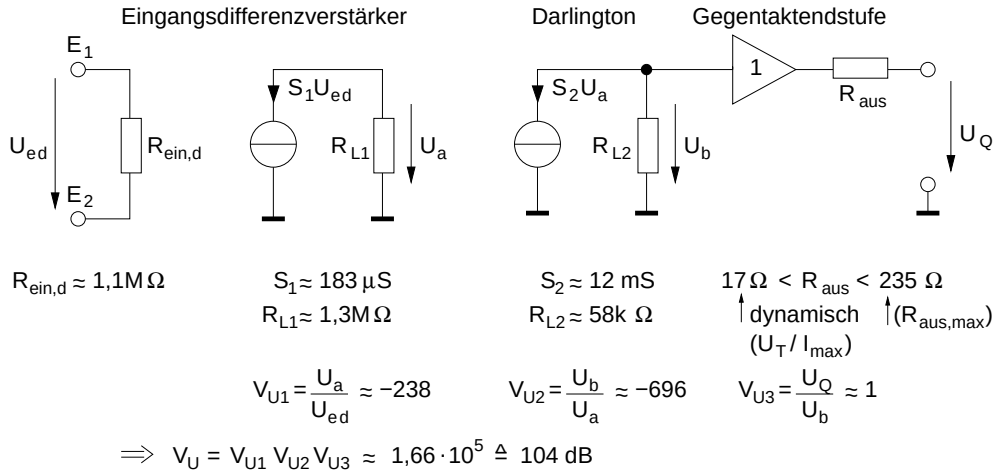


Abb. 11.3: Kleinsignalmodell des OP 741. Zu den einzelnen Berechnungen siehe Text.

$C_K$  sehr groß. Mit der Näherung  $R_{L2} \ll R_{L1}$  ergibt sich

$$C_{\text{ein},14} \approx (1 - V_{U2}) C_{CB,14} \quad (11.12)$$

Dabei ist  $C_{CB,14}$  die effektiv zwischen Kollektor und Basis des Darlington-Transistors liegende Kapazität. Damit beträgt die gesamte Lastkapazität  $C_{L1}$  parallel zu  $R_{L1}$ :

$$C_{L1} \approx C_{a2} + C_{a6} + C_{\text{met}} + C_{\text{ein},14} . \quad (11.13)$$

Ihre Werte schwanken in Abhängigkeit der betrachteten *OP 741*-Version. In [TiSche02] beträgt  $C_{L1}$  z.B. 16 pF und ergibt mit  $R_{L1}$  zusammen die unterste Tiefpaß-Eckfrequenz von  $f_{g1} \approx 10 \text{ kHz}$ . Entsprechende Überlegungen führen für den Ausgang des Darlington-Transistors auf die zweite Tiefpaß-Eckfrequenz  $f_{g2} \approx 100 \text{ kHz}$ . Die nächste, darüberliegende Eckfrequenz ist die Grenzfrequenz der pnp-Transistoren von ca. 1 MHz, die zu Vereinfachung als entkoppelter Tiefpaß erster Ordnung beschrieben werden soll.

Das quasistatische Ersatzschaltbild Abb. 11.3 läßt sich mit diesen Angaben zu dem Wechselstrom-Kleinsignal-Ersatzschaltbild in Abb. 11.4 erweitern. Mit dem quasistatischen Wert der Verstärkung  $F_{a0} = V_U$  läßt sich für dieses Ersatzschaltbild der Frequenzgang der Verstärkung des nicht rückgekoppelten Operationsverstärkers angeben. ( $C_K$  bleibt zunächst unberücksichtigt):

$$\underline{F}_a(j\omega) = \frac{F_{a0}}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g1}})(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g2}})(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g3}})} \quad (11.14)$$

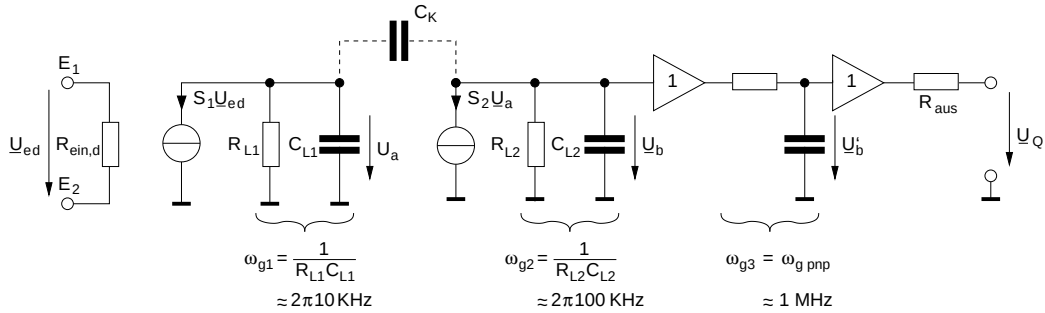


Abb. 11.4: Wechselstrom-Kleinsignal-Ersatzschaltbild des OP 741.

Der Nenner dieser Wirkungsfunktion mit  $s = j\omega$  konnte aufgrund der vereinfachten Annahme entkoppelter Tiefpässe direkt in der für die nachfolgenden Überlegungen praktischen Produktform angegeben werden. Weiterhin enthält  $\underline{F}_a(j\omega)$  die Aussage, daß nur Pole in der linken Halbebene vorhanden sind, der Operationsverstärker also stabil ist.

### 11.3 Das Bode-Diagramm

Anhand von Gl. (11.14) sehen wir, daß der aus der Übertragungsfunktion der Differenz-Spannungsverstärkung für  $s = j\omega$  hervorgehende Frequenzgang  $\underline{F}_a(j\omega)$  eine frequenzabhängige Phasendrehung hervorruft. Eine Rückkopplung des Verstärkers, die bei tiefen Frequenzen als Gegenkopplung wirkt, kann dadurch mit steigender Frequenz zur Mitkopplung werden, wodurch der Verstärker instabil wird.

Zur Untersuchung der Stabilität des rückgekoppelten Operationsverstärkers eignet sich hervorragend das Nyquist-Kriterium in der Frequenzkennliniendarstellung (vgl. Kap. 7.9). Für die Frequenzkennliniendarstellung wird in der Regel das Bode-Diagramm verwendet. Es erlaubt die Konstruktion des Amplituden- und Phasengangs aus der Produktdarstellung der Übertragungsfunktion unter vereinfachenden, aber für praktische Überlegungen hinreichend genauen Annahmen.

Wir leiten die Konstruktion des Bode-Diagrammes anhand einer allgemeinen Wirkungsfunktion her:

$$\underline{F}_a(s) = F_{a0} \frac{(1 + \frac{s}{s_{Z1}})(1 + \frac{s}{s_{Z2}}) \dots (1 + \frac{s}{s_{ZI}})}{(1 + \frac{s}{s_{N1}})(1 + \frac{s}{s_{N2}}) \dots (1 + \frac{s}{s_{NJ}})} \quad (11.15)$$

Wir nehmen dabei an, daß wie im zuvor behandelten Fall, nur (Hoch- und) Tiefpaßterme erster Ordnung die Wirkungskfunktion bestimmen. Daher sind alle  $s_{Zn}$  und  $s_{Nn}$  positiv und reell und wir schreiben im folgenden für  $s_{Zn}$ ,  $s_{Nn} \rightarrow \omega_{Zn}$ ,  $\omega_{Nn}$ <sup>46</sup>. Daher besitzt  $\underline{F}_a(s)$  keine Pole in der rechten Halbebene und ist daher stabil.

Der Frequenzgang ergibt sich aus der Wirkungskfunktion für  $s = j\omega$

$$\underline{F}_a(j\omega) = F_{a0} \frac{(1 + \frac{j\omega}{\omega_{Z1}})(1 + \frac{j\omega}{\omega_{Z2}}) \dots (1 + \frac{j\omega}{\omega_{ZI}})}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_{N1}})(1 + \frac{j\omega}{\omega_{N2}}) \dots (1 + \frac{j\omega}{\omega_{NJ}})} . \quad (11.16)$$

Mit der Identität

$$\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_n}\right) = \left|1 + \frac{j\omega}{\omega_n}\right| e^{j \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} = \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{j\varphi_n} \quad (11.17)$$

läßt sich Gl. (11.16) umformen

$$\begin{aligned} \underline{F}_a(j\omega) = F_{a0} & \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Z1}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \dots \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{ZI}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \\ & \dots \cdot \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{N1}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{N2}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \dots \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{NJ}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dots \\ & \dots \cdot e^{j(\varphi_{Z1} + \varphi_{Z2} + \dots + \varphi_{ZI} - \varphi_{N1} - \varphi_{N2} - \dots - \varphi_{NJ})} . \end{aligned} \quad (11.18)$$

Im Bode-Diagramm wird der Betrag von  $\underline{F}_a(j\omega)$  in Dezibel (dB) dargestellt. Ein Dezibel ist als Logarithmus des Verhältnisses zweier Leistungen definiert:

$$a_{dB} \left( \frac{P_1}{P_2} \right) = 10 \log \left| \frac{P_1}{P_2} \right| . \quad (11.19)$$

Für die Umrechnung in Spannungsverhältnisse gilt mit einem Bezugswiderstand  $R_0$  (in der HF-Technik meist der Wellenwiderstand):

$$a_{dB} \left( \frac{P_1}{P_2} \right) = 10 \log \left| \frac{P_1}{P_2} \right| = 10 \log \left| \frac{U_1^2 R_0}{R_0 U_2^2} \right| = 20 \log \left| \frac{U_1}{U_2} \right| . \quad (11.20)$$

Der Betrag des Frequenzgangs der Spannungsübertragungsfunktion in Dezibel ist daher

$$a_{dB}(\underline{F}_a(j\omega)) = 20 \log |F_{a0}| + 20 \sum_{i=1}^I \log \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{Zi}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 20 \sum_{j=1}^J \log \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{Nj}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11.21)$$

<sup>46</sup>Für den in der Regel vorliegenden RC-Tiefpaß ergibt sich z. B. der Produktterm  $(1 + \frac{s}{s_n}) = (1 + \frac{j\omega}{\omega_n}) = (1 + j\omega RC)$  mit  $RC = \tau_n = \frac{1}{\omega_n}$ .

Für den Betrags-Frequenzgang im Bodediagramm wird, wie in Abb. 11.5 gezeigt, jeder log-Term durch eine Geradenapproximation  $A_{\omega_n}(\omega)$  angenähert:

$$20 \log \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx A_{\omega_n}(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{für } \omega < \omega_n \\ 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) & \text{für } \omega \geq \omega_n \end{cases} \quad (11.22)$$

Der maximale Fehler entsteht dabei an der Stelle  $\omega = \omega_n$  und beträgt

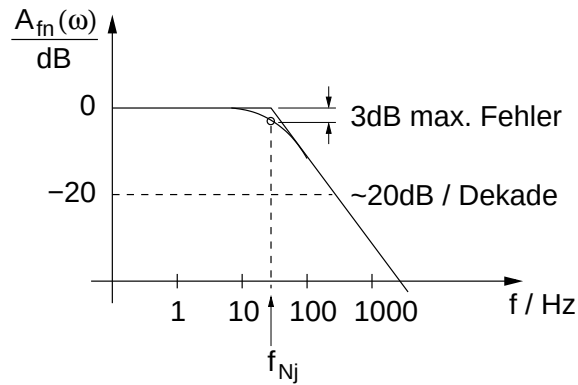


Abb. 11.5: Beispiel für eine Geradenapproximation im Bodediagramm für den Betragsverlauf eines einpoligen Tiefpasses mit der Grenzfrequenz  $f_n$ .

$$20(\log 1 - \log \sqrt{2}) = -20 \log \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB}. \quad (11.23)$$

Wenn nötig, kann dieser Fehler zur Erhöhung der Genauigkeit in der Geradenapproximation mit berücksichtigt werden.

**Beispiel:** Für einen Tiefpaßterm  $\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Nj}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$  ergibt sich die Geraden-Approximation für  $\omega \geq \omega_{Nj}$ :

$$A_{\omega_{Nj}}(\omega) = -20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_{Nj}} \right)$$

$$A_{\omega_{Nj}}(\omega) = 20 \left( \log \frac{\omega_{Nj}}{1 \text{ Hz}} - \log \frac{\omega}{1 \text{ Hz}} \right) := 20 \underbrace{(\log \omega_{Nj} - \log \omega)}_{\substack{\text{Kurzschreibweise} \\ \text{ohne Normierung}}} \quad (11.24)$$

Wegen

$$A_{\omega_{Nj}}(\omega) - A_{\omega_{Nj}}(10\omega) = 20 \log 10 = 20 \text{ dB} \quad (11.25)$$

fällt die Approximationsgerade für  $\omega \geq \omega_{Nj}$  mit 20 dB pro Dekade. Entsprechend steigt sie mit 20 dB pro Dekade für einen einpoligen Hochpaß-Term.

Mit der nach Gl. (11.22) definierten Geradenapproximation schreiben wir allgemein für die Darstellung des Betrags des Frequenzgangs

$$a_{dB}(\underline{F}_a(j\omega)) = 20 \log |F_{a0}| + \sum_{i=1}^I A_{\omega_{Z_i}}(\omega) - \sum_{j=1}^J A_{\omega_{N_j}}(\omega) . \quad (11.26)$$

Anstelle von  $\omega$  wird häufig auch direkt die Frequenz verwendet, so dass Gl. (11.26) lautet

$$a_{dB}(\underline{F}_a(f)) = 20 \log |F_{a0}| + \sum_{i=1}^I A_{f_{Z_i}}(f) - \sum_{j=1}^J A_{f_{N_j}}(f) . \quad (11.27)$$

Für die Phase von  $\underline{F}_a(j\omega)$  gilt nach Gl. (11.18) mit Gl. (11.17) die Approximation:

$$\arctan \frac{\omega}{\omega_n} = \phi_{\omega_n} = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \omega < \omega_n/10, \\ \left(1 + \log \frac{\omega}{\omega_n}\right) 45^\circ & \text{für } \omega_n/10 \leq \omega \leq 10 \omega_n, \\ 90^\circ & \text{für } \omega > 10 \omega_n . \end{cases} \quad (11.28)$$

Bei höheren Anforderungen an die Genauigkeit können die Bereiche um  $\frac{\omega_n}{10}$  und  $10\omega_n$  durch zusätzliche Geradenabschnitte angenähert werden. Auch eine Interpolation mit markanten Zwischenwerten ist einfach möglich. Tab. 11.1

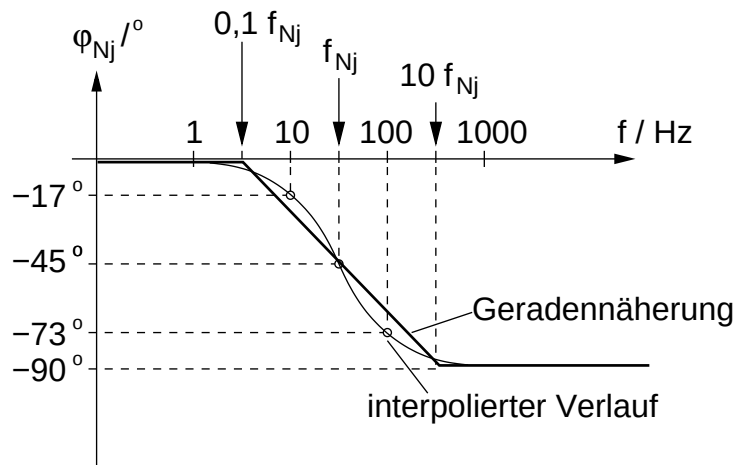


Abb. 11.6: Geradenannäherung für den Phasengang eines einpoligen Tiefpassterms. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann der reale Verlauf durch bekannte Werte z. B. nach Tab. 11.1 interpoliert werden.

zeigt einige hierfür geeignete Werte. Der Punkt  $\frac{\omega}{\omega_n} = 3,2$  markiert gerade die Hälfte einer Dekade im log. Maßstab.

| $\frac{\omega}{\omega_n}$ | $-\arctan \frac{\omega}{\omega_n}$ |
|---------------------------|------------------------------------|
| 0,1                       | $-6^\circ$                         |
| 1/3,2                     | $-17^\circ$                        |
| 1                         | $-45^\circ$                        |
| 3,2                       | $-73^\circ$                        |
| 10                        | $-84^\circ$                        |

Tabelle 11.1: Wertepaare für die Interpolation des Phasengangs. Die Werte des Arguments  $\frac{\omega}{\omega_n}$  sind so gewählt, dass sich äquidistante Punkte auf der Frequenzachse ergeben.

## 11.4 Stabilität des rückgekoppelten Operationsverstärkers

Aus den vorangegangenen Kapiteln wissen wir, daß der Frequenzgang des rückgekoppelten OP's immer in der Form

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{F}_a(j\omega)}{1 + \underline{F}_a(j\omega)\underline{F}_2(j\omega)} = \frac{\underline{F}_a(j\omega)}{1 + \underline{F}_0(j\omega)} \quad (11.29)$$

geschrieben werden kann. Das Nyquist-Kriterium (Kap. 7.4) wird dabei im Bode-Diagramm auf die Schleifenverstärkung  $\underline{F}_0(j\omega) = \underline{F}_a(j\omega)\underline{F}_2(j\omega)$  angewendet.

Wir betrachten im Folgenden den Fall eines frequenzunabhängigen Rückkopplungsnetzwerkes  $\underline{F}_2(j\omega) = k = \text{const.} \in \mathbb{R}$ .

Die Schleifenverstärkung in der log. Form für das Bode-Diagramm läßt sich schreiben

$$a_{dB}(\underline{F}_0(j\omega)) = a_{dB}(\underline{F}_a(j\omega)) + a_{dB}(k) = a_{dB}(\underline{F}_a(j\omega)) - a_{dB}\frac{1}{k} \quad (11.30)$$

Beachten: Bei hoher Verstärkung des OP gilt für Gl. (11.29)

$$\underline{F}(j\omega) \approx \frac{1}{\underline{F}_2(j\omega)} = \frac{1}{k}. \quad (11.31)$$

Daher repräsentiert der zweite Term in Gl. (11.30) den Idealwert der angestrebten Übertragungsfunktion für  $|\underline{F}_a(j\omega)| \rightarrow \infty$ . Zum Beispiel für einen rückgekoppelten OP mit der Verstärkung 10 ist  $k = \frac{1}{10}$ .

Wir können jetzt das Bode-Diagramm des mit  $\underline{F}_2(j\omega) = k$  rückgekoppelten OP's zeichnen. Für die frequenzabhängige Verstärkung  $\underline{F}_a(j\omega)$  verwenden wir den Verlauf des OP 741 nach Gl. (11.14). Wir sehen anhand der Phasendrehung der einzelnen Tiefpasssterme z.B. nach Gl. (11.28) oder Tabelle 11.1, daß eine Phasendrehung von  $180^\circ$  bei  $f_s$ , i.e. in der Mitte zwischen  $f_{g2}$  und  $f_{g3}$  erreicht wird. Bei dieser Frequenz wird aus der Gegenkopplung eine Mitkopplung und die Schaltung wird instabil (Oszillation mit der Frequenz  $f_s$ ), wenn die Schleifenverstärkung  $k|\underline{F}_a(j2\pi f_s)|$  noch größer als 0 dB ist (Nyquist Kriterium).

Die Schleifenverstärkung ergibt sich gemäß Gl. (11.30) als der Abstand des Betrags-Frequenzgangs des OPs  $a_{dB}(\underline{F}_a(j\omega))$  zur Gerade der Rückkopplung  $a_{dB}(\frac{1}{k})$ . Für  $k=1$  ( $a_{dB}(1) = 0$  dB) ist bei  $f_s$  die Schleifenverstärkung noch ca. 64 dB. Durch Verringerung des rückgekoppelten Signals ( $a_{dB}\frac{1}{k} > 0$  dB) verbessert sich der Amplitudenrand. Im eingezeichneten Beispiel mit  $a_{dB}(\frac{1}{k}) = 30$  dB



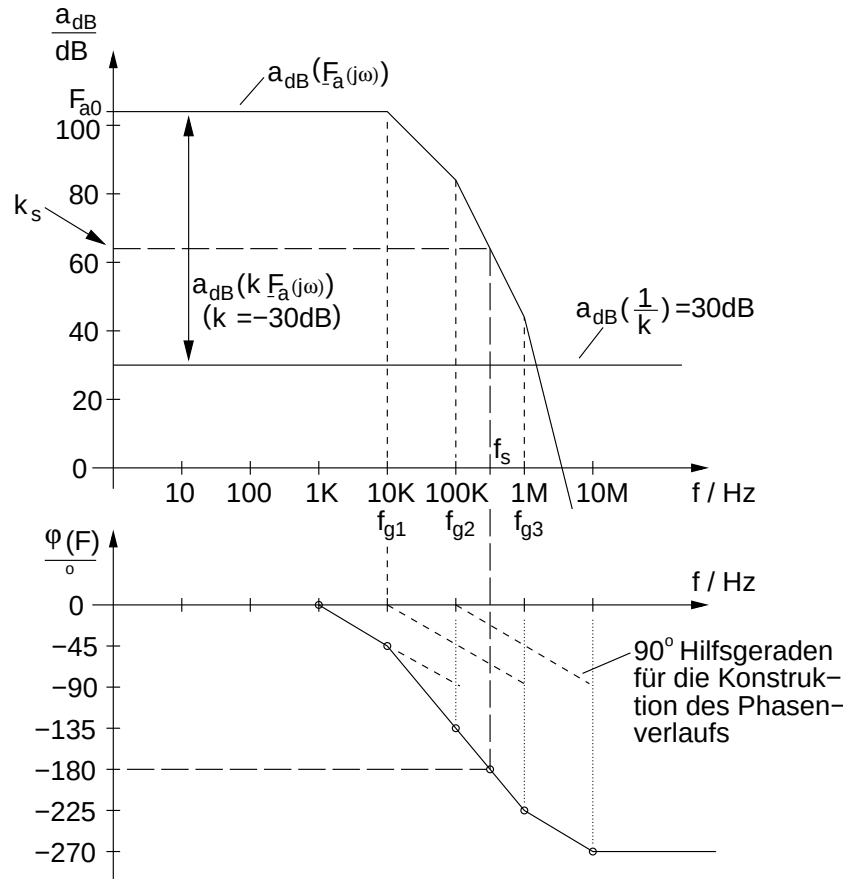


Abb. 11.7: Bodediagramm des Frequenzgangs und der Schleifenverstärkung bei reellwertiger Rückkopplung am Beispiel des *OP 741* nach Gl. (11.14).

verbessert sich der Amplitudenrand entsprechend um 30 dB. Stabil wird die Schaltung erst ab  $a_{dB}\left(\frac{1}{k}\right) \approx 64 \text{ dB}$  ( $\approx 10^3 \sqrt{2} \cdot 1, 1$ ).

Eine solch geringe Gegenkopplung ist mit den meisten OP-Schaltungen nicht realisierbar. Auch ist sie bei tiefen Frequenzen gar nicht notwendig, da die, die Instabilität hervorruufende Phasendrehung erst bei hohen Frequenzen (über der 6 dB Grenzfrequenz) auftritt.

Aus diesem Grund werden ausschließlich dynamische (frequenzabhängige) Methoden zur Stabilisierung des rückgekoppelten OP's eingesetzt. Alle Methoden beeinflussen dabei den Verlauf des Frequenzgangs. Solange wie in dem hier untersuchten Fall von entkoppelten einpoligen (RC-) Tiefpässen ausgegangen wird, sind Phasen- und Betragsverlauf eindeutig aufeinander abbildbar. D.h. aus dem Betragsverlauf kann der Phasenverlauf berechnet

werden und umgekehrt<sup>47</sup>. Eine Entkopplung von Phasen und Betragsverlauf läßt sich mit Allpaß-Gliedern erreichen, wodurch für die Optimierung ein zusätzlicher Freiheitsgrad geschaffen wird.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Kompensation des gekoppelten Frequenzgangs von Betrag und Phase.

Da der zu kompensierende Frequenzgang der Schleifenverstärkung aus dem Produkt der Frequenzgänge von Verstärkungsfrequenzgang  $\underline{F}_a(j\omega)$  und Frequenzgang des Rückkopplungsnetzwerks  $\underline{F}_2(j\omega)$  ist eine Kompensation beider Frequenzgänge möglich.

Eine Kompensation des Verstärkungsfrequenzgangs bezeichnet man als „Innere Frequenzgangskompensation“. Dabei wird ein Kompensationsnetzwerk (meist nur eine Kapazität) in die Schaltung des Verstärkers eingebaut. Je nach OP-Typ sind die Anschlüsse dieses Netzwerkes dem Anwender zugänglich, so daß er dort die für seine spezielle Anwendung optimalen Kompensationselemente anschließen kann.

Wir betrachten zunächst die sogenannte „universelle Frequenzgangskorrektur“, die ohne externe Komponenten auskommt.

## 11.5 Universelle Frequenzgangskorrektur

Die universelle Frequenzgangskorrektur zeichnet sich dadurch aus, daß der OP bei jeder ohmschen Gegenkopplung ( $\underline{F}_2(j\omega) = k = 0 \dots 1$ ) stabil ist. Der bisher betrachtete OP 741 besitzt eine solche Korrektur in Form des fest eingebauten Kondensators  $C_k$  vgl. Abb. 11.2 zwischen Kollektor und Basis des Darlington-Transistors aus  $T_{14}$ ,  $T_{17}$  (Die Vorspannungsstufe aus  $T_{16}$ ,  $R_6$ ,  $R_7$  ist vergleichsweise niederohmig und kann vernachlässigt werden). Es ergibt sich das, bereits auf Seite 279 hergeleitete Kleinsignal-Ersatzschaltbild in dem  $C_K$  als „Miller“-Kapazität wirkt.

Die Spannungsverstärkung  $V_{U2}(j\omega)$  für die Miller-Transformation ist frequenzabhängig und läßt sich mit Hilfe des Ersatzschaltbildes in Abb. 11.8 direkt berechnen. Es ergibt sich

$$\underline{V}_{U2}(j\omega) = \frac{\underline{U}_b}{\underline{U}_a} = -g_{m2} R_{L2} \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_{gm}}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_L}}. \quad (11.32)$$

---

<sup>47</sup>Es läßt sich zeigen, daß diese Eigenschaft für alle minimalphasigen Systeme gilt.

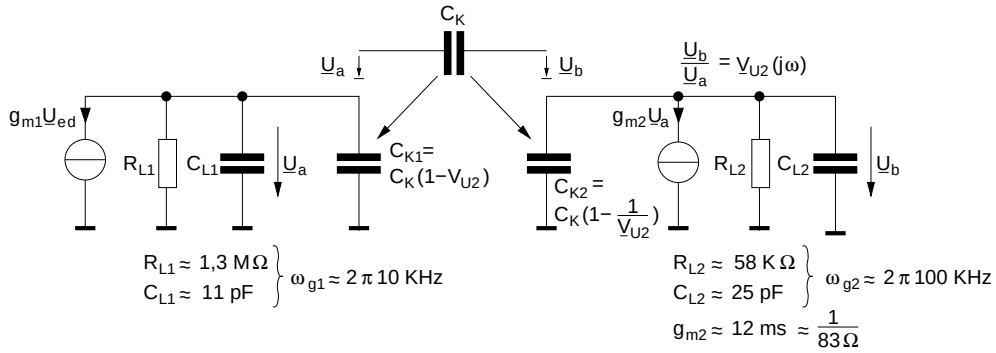


Abb. 11.8: Kleinsignal-Ersatzschaltung des *OP 741* mit Kompensationskapazität  $C_K$ . Gezeigt ist die Aufspaltung von  $C_K$  in  $C_{K1}$  und  $C_{K2}$  gemäß Miller-Theorem.

Im *OP 741* wird  $C_K$  mit ca. 30 pF dimensioniert. Dadurch ergibt sich

$$\omega_{gm} = \frac{g_m}{C_K} \approx \frac{1}{83 \Omega \cdot 30 \text{ pF}} \approx 64 \text{ MHz} \quad (11.33)$$

$$\omega_L = \frac{1}{(C_K + C_{L2})R_{L2}} \approx \frac{1}{(30 + 25) \text{ pF} \cdot 58 \text{ K}\Omega} \approx 50 \text{ KHz} . \quad (11.34)$$

Es ergibt sich der Betragsverlauf von  $V_{U2}$  im Bode-Diagramm in Abb. 11.9 mit  $g_{m2}R_{L2} = V_{U2} \approx -696$  und  $a_{dB}(V_{U2}) \approx 57 \text{ dB}$ . Für die Miller-

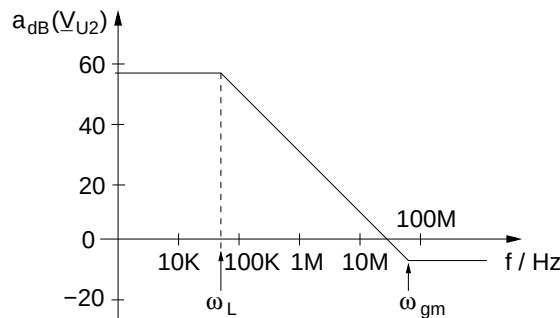


Abb. 11.9: Betragsfrequenzgang der Spannungsübertragungsfunktion

$$\underline{V}_{U2} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{U}_a} \text{ nach Gl. (11.32).}$$

transformierte Teilkapazität  $C_{K1}$  gilt bis  $\omega \leq \omega_L$

$$C_{K1} = C_K(1 - \underline{V}_{U2}) \approx C_K \cdot 697 \approx 21 \text{ nF} . \quad (11.35)$$

Durch diese große kapazitive Last reduziert sich die Grenzfrequenz des Eingangsdifferenzverstärkers auf

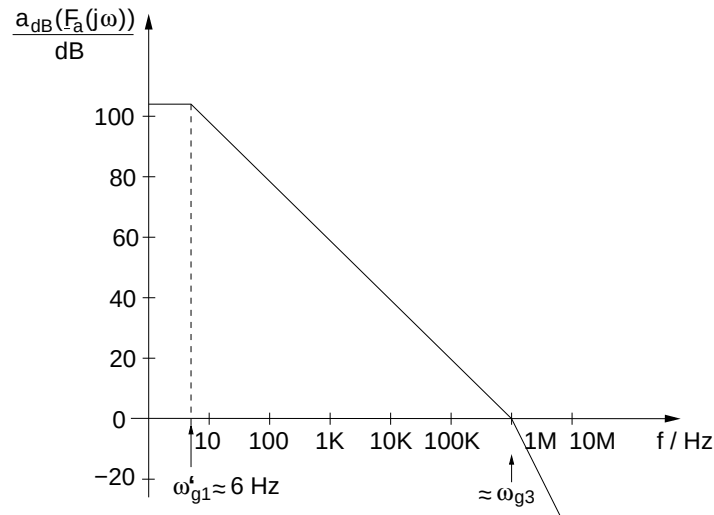
$$\omega'_{g1} \approx \frac{1}{1,3 \text{ M}\Omega \cdot 21 \text{ nF}} \approx 6 \text{ Hz} \quad ! \quad (11.36)$$

Der Frequenzgang des *OP 741* besitzt also aufgrund der universellen Frequenzgangskorrektur eine einpolige Tiefpasscharakteristik mit einer Grenzfrequenz von ca. 6 Hz. Für Frequenzen  $\omega > \omega_L$  sinkt aufgrund der Lastkapazität  $C_K + C_{L2}$  (vgl. Gl. (11.34)) die Verstärkung  $\underline{V}_{U2}(j\omega)$  und damit auch der Wert der Miller-transformierten Kapazität  $C_{K1}$  mit 20 dB/Dekade. Dadurch bleibt ab  $\omega = \omega_L$  die Spannung  $\underline{U}_a$  am Ausgang des Differenzverstärkers konstant. Die Ausgangsspannung  $\underline{U}_b$  fällt jedoch weiterhin mit 20 dB/Dekade ab. Der Abfall kommt für  $\omega > \omega_L$  von dem Tiefpass am Ausgang des Darlington-Transistors mit den Elementen  $C_K$ ,  $C_{L2}$ ,  $R_{L2}$ , durch den auch die Miller-transformierte Kapazität reduziert wurde. Diese Überlegung sollte zur Übung z.B. mit Hilfe des Bode-Diagramms nachvollzogen werden.

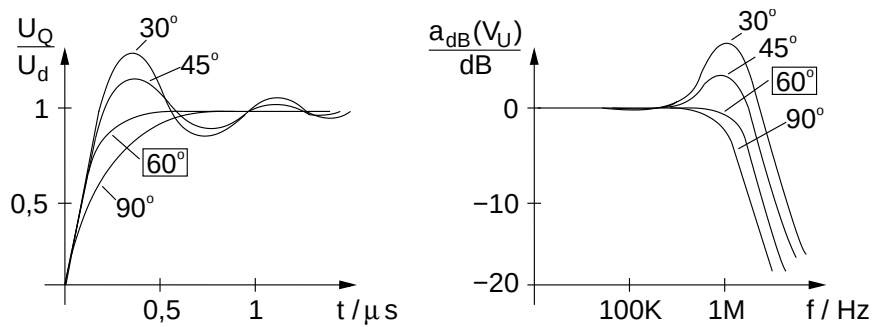
Für höhere Frequenzen, für die  $|V_{U2}| \gg 1$  nicht mehr gilt, muss der Frequenzgang anhand Abb. 11.8 durch eine geschlossene Rechnung ermittelt werden. Bitte überprüfen sie dies zur Übung in dem Sie den Frequenzgang  $\frac{\underline{U}_b}{g_{m1}\underline{U}_{ed}}$  aus Abb. 11.8 berechnen. Die Rechnung zeigt einen zusätzlichen Hochpass-Tiefpass-Term im Frequenzbereich um  $\omega_{gm} \approx 60 \text{ MHz}$ . Dieser Bereich ist jedoch von untergeordneter Bedeutung, da die Schleifenverstärkung dort schon deutlich unter 0 dB liegt. Wir können daher den in Abb. 11.10 dargestellten Verlauf des Frequenzgangs der Verstärkung des universal-kompensierten *OP 741* zeichnen. Berücksichtigt ist auch die bei  $\approx 1 \text{ MHz}$  liegende Eckfrequenz  $\omega_{g3}$  des pnp-Transistors nach Gl. (11.14).

Nach der Theorie zum Bode-Diagramm beträgt bei  $\omega = \omega_{g3}$  die Phasendrehung der Schleifenverstärkung gerade  $-90 - 45 = -135$ . Da in etwa auch bei  $\omega_{g3}$  die Schleifenverstärkung für  $k=1$  den Wert  $a_{dB}(k \underline{F}_a(j\omega_{g3})) \approx 0 \text{ dB}$  annimmt, besitzt der Frequenzgang der Schleifenverstärkung des *OP 741* mit resistiver Gegenkopplung  $0 \leq k \leq 1$  einen Phasenrand größer als 45 (Wir erinnern uns an S. 285: dort wurde gezeigt, dass die geringste Stabilität bei maximaler resistiver Gegenkopplung ( $k=1$ ) vorliegt).

In der Praxis strebt man eher eine Phasenreserve von ca. 60 an, da hier der Frequenzgang einen relativ konstanten Verlauf bei sehr hoher Grenzfrequenz besitzt. Auch der Phasenverlauf besitzt hier einen relativ konstanten Verlauf, wodurch sich diese Dimensionierung sehr gut für die


 Abb. 11.10: Frequenzgang des universal-kompensierten *OP 741*.

Übertragung von Rechtecksignalen eignet. Abbildung 11.11 zeigt dies am Beispiel von Sprungantwort und Frequenzgang bei verschiedenen Werten der Phasenreserve. Die Optimierung des Frequenzgangs von Betrag und Phase


 Abb. 11.11: Sprungantwort (links) und Frequenzgang eines mit  $k=1$  gegengekoppelten OP bei verschiedenen Werten der Phasenreserve.

unter Maßgabe der Kriterien Grenzfrequenz, Konstanz/Welligkeit bis zur Grenzfrequenz sowie Stabilität ist die zentrale Aufgabe bei der Entwicklung schneller Schaltungen. Das Wissen um die hierfür zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade und die Fähigkeit diese vorteilhaft einzusetzen, ist die Kunst der Entwicklung schneller analoger Schaltungen. Die hierfür notwendigen Grundkenntnisse vermittelt die Vorlesung Elektronik III.

Das Verstärkungs-Bandbreite-Produkt („gain bandwidth product“) GDP drückt eine wichtige Eigenschaft bandbreitebegrenzter Systeme erster Ordnung aus. Wir betrachten als Beispiel den Frequenzgang des *OP 741* in Abb. 11.10, der im Bereich  $\omega'_{g1} < \omega < \omega_{g3}$ , mit 20 dB/Dekade abfällt. In diesem Bereich gilt

$$\underline{F}_a(j\omega) \approx \frac{F_{a0}}{1 + \frac{j\omega}{\omega'_{g1}}} \approx \frac{F_{a0} \omega'_{g1}}{j\omega} \approx V_{U1} \frac{V_{U2} \omega'_{g1}}{j\omega} \quad (11.37)$$

$$\text{mit } V_{U2} = -g_{m2} R_{L2}, \omega'_{g1} = \frac{1}{R_{L2}C_{K1}} \Rightarrow V_{U2} \cdot \omega'_{g1} = \frac{-g_{m2}}{C_{K1}} \neq f(R_L) \quad (11.38)$$

Das Produkt aus Verstärkung  $V_{U2}$  und Bandbreite  $\omega'_{g1}$  ist also unabhängig vom Lastwiderstand  $R_{L2}$ , da die Verstärkung proportional und die Bandbreite umgekehrt proportional zum Lastwiderstand wachsen.

Dies gilt für alle R-C- oder R-L-Tiefpässe erster Ordnung!

Im Bode-Diagramm ist dieser Zusammenhang leicht zu erkennen: Abb. 11.12 zeigt einen Beispielverlauf für einen einpoligen Tiefpass wie er z.B. durch Gl. (11.37) beschrieben wird. Geht man von einem Punkt  $P_1$  bei einer Frequenz  $f_{P1}$  auf der 20 dB/Dekade-Flanke zu einem Punkt  $P_2$  (Frequenz  $f_{P2}$ ), so gilt mit Gl. (11.37):

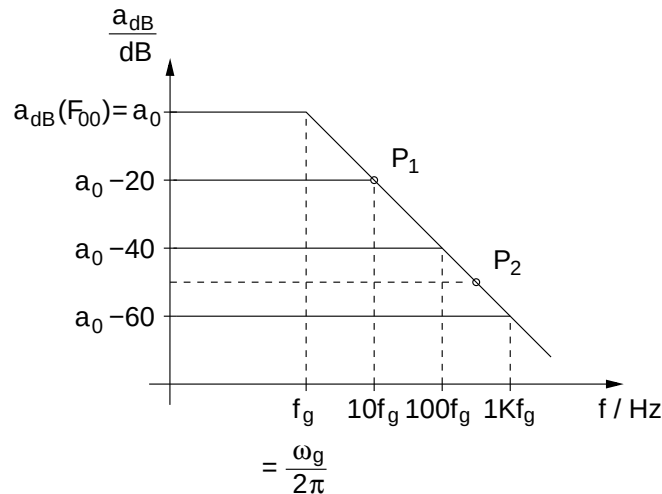


Abb. 11.12: Beispielverlauf eines 20 dB-Abfalls im Bode-Diagramm.

$$a_{dB}(F_a(j\omega)) = a_{dB}(V_{U1} V_{U2} \omega'_{g1}) - a_{dB}(\omega) \quad (11.39)$$

oder allgemein in kürzerer Schreibweise

$$a_{dB}(F(f)) = a_{dB}(a_0 f_g) - a_{dB}(f) \quad (11.40)$$

$$\Rightarrow a_{dB}(F_{fP1}) - a_{dB}(F_{fP2}) = a_{dB}(f_{P2}) - a_{dB}(f_{P1}) \quad (11.41)$$

oder

$$\left| \frac{F(f_{P1})}{F(f_{P2})} \right| = \frac{f_{P2}}{f_{P1}} \quad (11.42)$$

Wir können mit Gl. (11.42) eine einfache Dimensionierungsvorschrift für die erste Tiefpass-Eckfrequenz der universal zu kompensierenden Schleifenverstärkung  $\underline{F}_0(j\omega)$  formulieren, wobei wir annehmen, dass  $\underline{F}_0(j\omega)$  in dem die Stabilität beeinflussenden Frequenzbereich, ausschließlich durch Tiefpass-terme bestimmt wird:

Legen wir die tiefste Eckfrequenz z.B. durch Dimensionierung einer Kompensationskapazität auf die Frequenz  $f_1$  fest, und  $f_2$  ist die nächsthöchste Eckfrequenz, dann beträgt der Phasenrand gerade  $180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , wenn bei  $f_2$  die Durchtrittsfrequenz der Schleifenverstärkung  $|\underline{F}_0(j2\pi f_1)| = 1$  ist. Für diese Dimensionierung gilt mit den Näherungen des Bodediagramms:

$$\left| \frac{\underline{F}_0(j2\pi f_1)}{\underline{F}_0(j2\pi f_2)} \right| \approx \left| \frac{F_{00}}{1} \right| = \frac{f_2}{f_1} \Leftrightarrow f_1 = \frac{f_2}{|F_{00}|} = \frac{f_2}{k|F_{a0}|} = \frac{f_2}{F_{a0}} \quad (11.43)$$

Im letzten Schritt in Gl. (11.43) wurde der, für die Stabilität kritische Fall  $k=1$  eingesetzt. Die erste Eckfrequenz ist also um den Betrag der quasistatischen Ringverstärkung  $F_{00}$  kleiner zu wählen, als die zweite Tiefpass-Eckfrequenz. Der Phasenrand beträgt dann  $45^\circ$ .

## 11.6 Angepasste Frequenzkompensation (Lag-Kompensation)

Das letzte Beispiel verdeutlicht den wesentlichsten Nachteil der universellen Frequenzgangskorrektur, bei der  $f_1$  immer für die maximal mögliche Schleifenverstärkung mit  $k = 1$  gewährleistet ist. Für Schaltungen mit  $k < 1$  kann nämlich nach Gl. (11.43)  $f_1$  größer dimensioniert werden entsprechend

$$f_1 = \frac{f_2}{|F_{00}|} = \frac{f_2}{k|F_{a0}|} \quad (11.44)$$

Dadurch sind Operationsverstärker-Schaltungen mit größerer Bandbreite möglich. Einen direkten Vergleich beider Kompensationsmaßnahmen zeigt Abbildung 11.13.

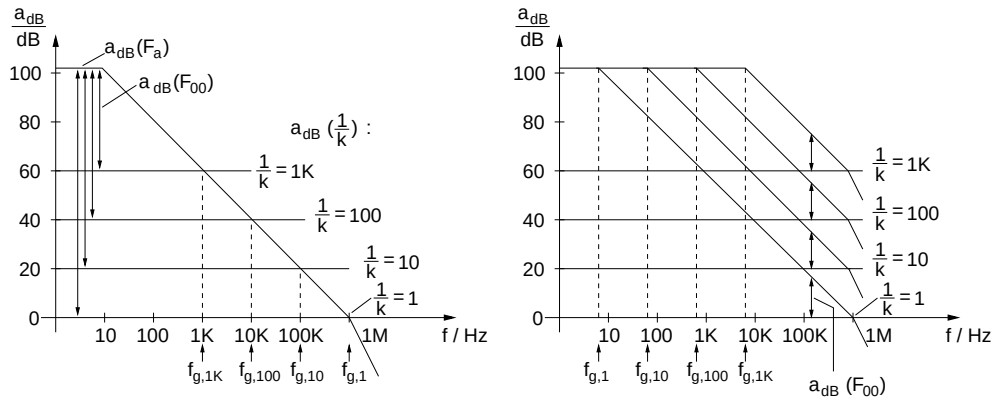


Abb. 11.13: Bode Diagramme für universelle (links) und angepasste (rechts) Frequenzgangskorrektur.

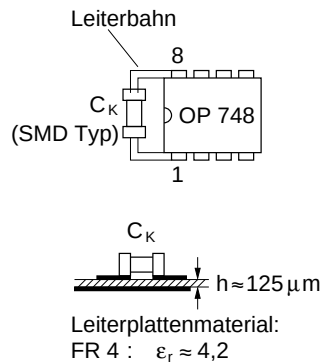
Beachten: Die Einstellung bei der untersten Eckfrequenz bei der angepassten Frequenzkompensation erfolgt z.B. durch die Beschaltung mit einer externen Kapazität oder durch Einfügen eines entkoppelten Tiefpasses erster Ordnung. Der OP 748 ist identisch mit dem 741 Typ, verfügt jedoch über zwei Anschlüsse (Pin 1, 8) zum Anschluss einer externen Kapazität. Je nach Größe und Ausführung ist bei der Dimensionierung speziell die am Ausgang des Darlington-Transistor liegende, durch die Aufbautechnik bedingte parasitäre Kapazität  $C_P$  zu berücksichtigen. Der auf der anderen Seite von  $C_K$  liegende Anteil der parasitären Kapazität liegt parallel zu dem Miller-transformierten Wert von  $C_K$  (vgl. Gl. (11.35)) und kann dagegen meist vernachlässigt werden.



**Beispiel:** Leiterplatten-Layout Entwurf

$A$  = Fläche unter  $C_K$  und Anschlussleitungen Annahme  $A \approx 20 \text{ mm}^2$

$h$  = Höhe der Fläche über Masse Annahme  $h \approx 125 \mu\text{m}$



Abschätzung der, durch den Kondensator  $C_K$  mit Zuleitungen gebildeten parasitären Kapazität über Plattenkondensator-Formel:

$$C_P = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{h} \Rightarrow \frac{C_P}{\text{pF}} = \frac{8,86 \epsilon_r \frac{A}{\text{mm}^2}}{1000 \frac{h}{\text{mm}}} \approx \frac{\epsilon_r \frac{A}{\text{mm}^2}}{100 \frac{h}{\text{mm}}} \quad (11.45)$$

Unter der Annahme, dass Zuleitung und SMD-Kondensator eine effektive Fläche von ca.  $20 \text{ mm}^2$  über der  $125 \mu\text{m}$  entfernten Masse besitzen, gilt

$$\Rightarrow C_P \approx \frac{4,2 \cdot 20}{100 \cdot 0,125} \approx 7 \text{ pF}$$

### Allgemeine Formulierung der Wirkungsweise der Lag-Kompensation:

Bei der Lag-Kompensation sorgt ein dominanter Tiefpass-Pol (d.h. mit der tiefsten Frequenz) in dem Frequenzgang der Schleifenverstärkung dafür, dass bei Erreichen der kritischen Phasenreserve der Betrags-Frequenzgang unter 1 abgesunken ist. Bei einer Phasenreserve von 45 ist dies bei der nächst-höheren Tiefpass-Eckfrequenz der Fall.

## 11.7 Pol-Nullstellen-Kompensation (Lag-Lead-Kompensation)

Die zuvor behandelte Lag-Kompensation beruht allgemein darauf, dass ein dominanter Pol bei tiefer Frequenz  $f_P$  in den Frequenzgang der

Schleifenverstärkung eingefügt wird. Die Frequenz des Pols muss so tief liegen, dass bei der nächst höheren Tiefpass-Eckfrequenz (das ist die erste Tiefpass-Eckfrequenz  $f_1$  der unkompensierten Schleifenverstärkung) ein hinreichend kleiner Betrag und ausreichende Phasenreserve (Betrag = 1 für Phasenreserve 45) erreicht sind.

Die Lag-Lead-Kompensation vermeidet diese Abhängigkeit von der ersten Tiefpass-Eckfrequenz der unkompensierten Schleifenverstärkung, in dem sie den Pol bei dieser Frequenz durch eine Nullstelle kompensiert (Pol-Nullstellen-Kompensation). Daher muss bei der Lag-Lead-Kompensation die Frequenz des dominanten Pols nur so tief liegen, dass bei der übernächsten höheren Tiefpass-Eckfrequenz (also der 2. Tiefpass-Eckfrequenz der unkompensierten Schleifenverstärkung) ein hinreichend kleiner Betrag und eine ausreichende Phasenreserve vorhanden sind.

Wir wollen im Folgenden die Wirkung der Lead-Lag-Kompensation im Bode-Diagramm darstellen. Dazu nehmen wir als Beispiel einen allgemeinen Tiefpass-Verlauf dritter Ordnung für den Frequenzgang der Schleifenverstärkung an:

$$\underline{F}_0(j\omega) = \frac{F_{00}}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g1}}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g2}}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g3}}\right)} \quad (11.46)$$

mit  $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \omega_3$ .

Der Frequenzgang des Lag-Lead-Korrekturgliedes lautet allgemein

$$\underline{F}_K(j\omega) = \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_N}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_P}\right)}. \quad (11.47)$$

Dabei dient der Zählerterm mit  $\omega_N$  zur Kompensation der Eckfrequenz bei  $\omega_{g1}$  und  $\omega_P$  im Nenner zum Einfügen einer geeigneten Tiefpass-Eckfrequenz unterhalb  $\omega_{g1}$ . Zur Realisierung dieses Frequenzgangs kann wieder die bereits vorhandene Verstärker- oder Rückkopplungsschaltung verwendet werden, indem sie modifiziert oder mit zusätzlichen Elementen beschaltet wird. Alternativ kann eine zusätzliche Kompensationsschaltung mit diesem Frequenzgang entkoppelt von der umgebenden OP-Schaltung eingefügt werden.

Dies ist z.B. dann der Fall, wenn die Kompensationsschaltung durch den niederohmigen OP-Ausgang oder von einer niederohmigen Teil-Schaltung in der Schleife (Verstärker mit Rückkopplung) mit einem Ausgangswiderstand  $R_1$  angesteuert wird und von einer hochohmigen Teilschaltung (z.B. der Rückkopplungsschleife) belastet wird.

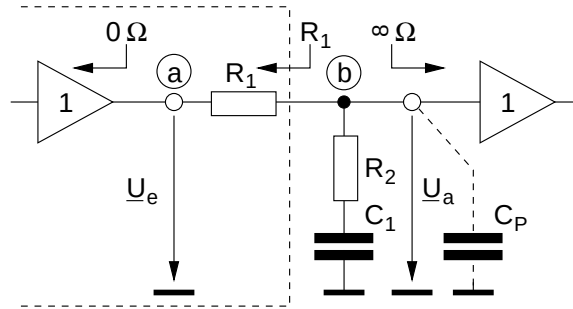


Abb. 11.14: Prinzipschaltbild für einen entkoppelten Einbau des Lag-Lead-Korrekturglieds mit dem Frequenzgang  $\frac{U_e}{U_a} = F_K(j\omega)$ .  $R_1$  kann der Ausgangswiderstand des Verstärkers oder ein zusätzlicher Widerstand sein:  $C_P$  ist eine störende parasitäre Kapazität.

In der Praxis ergibt sich meist aufgrund der unzureichend guten Entkopplung eine Mischung aus beiden Varianten. Für das in Abb. 11.14 gezeigte Korrekturglied ergibt sich

$$\omega_N = (R_2 C_1)^{-1}, \quad \omega_P = ((R_1 + R_2) C_1)^{-1} \quad (11.48)$$

Wie schon zuvor am Beispiel des Lag-Korrekturgliedes beschrieben, muss speziell bei der externen Realisierung des Korrekturgliedes der Einfluss parasitärer Kapazitäten  $C_P$  berücksichtigt werden. Dies gilt insbesondere für den hochohmigen Knoten b in Abb. 11.14. Für die Annahme  $C_P \ll C_1$  und  $R_1 \gg R_2$  wird durch  $C_P$  eine zusätzliche Tiefpass-Eckfrequenz von  $\omega_{CP} \approx (R_2 C_P)^{-1}$  eingeführt [Seif99]. Bei der Dimensionierung von  $R_2$  bzw. bei der Realisierung des Aufbaus (Layout) ist darauf zu achten, dass  $\omega_{CP}$  so hoch liegt, dass die durch sie hervorgerufene zusätzliche Phasendrehung die durch die Lag-Lead-Kompensation verbesserte Phasenreserve bei  $\omega_{g2}$  vgl. Gl. (11.46) nicht verschlechtert. Daher muss  $\omega_{CP}$  mindestens bei  $\omega_{g3}$  oder höher liegen. Wir nehmen im Folgenden zur Vereinfachung  $\omega_{CP} \gg \omega_{g3}$  an und zeichnen das Bode-Diagramm der Lag-Lead-Kompensation in Abb. 11.15. Dazu

gehen wir von einer Schleifenverstärkung nach Gl. (11.46) und einem Kor-

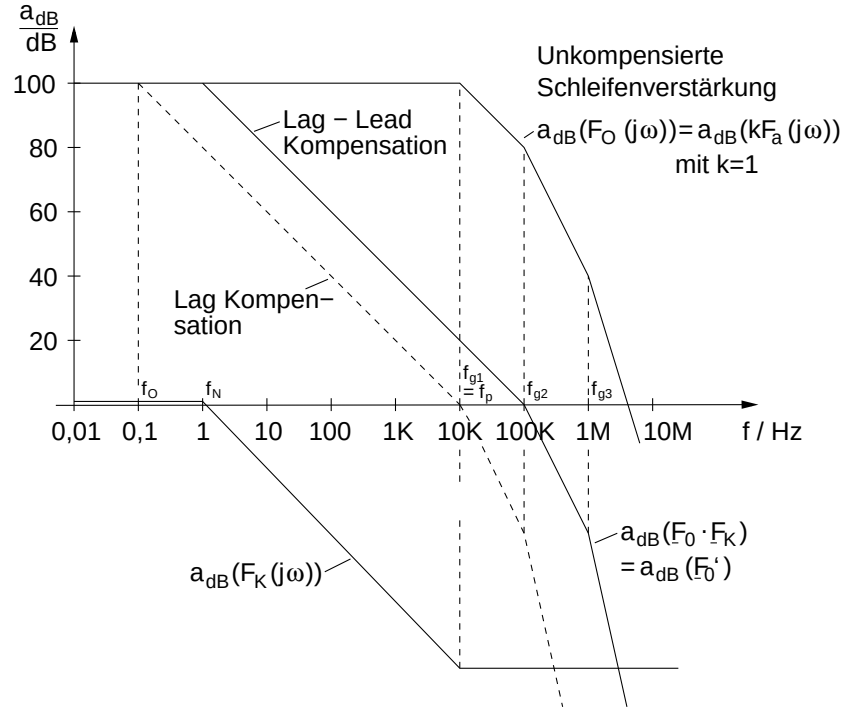


Abb. 11.15: Verlauf der Schleifenverstärkung bei Lag-Lead Kompensation im Vergleich zur unkompenzierten Schleifenverstärkung und zur Lag-Kompensation für den Fall  $k=1$ .

rekturglied mit dem Frequenzgang nach Gl. (11.47) aus. Für die Lead-Lag Kompensation gilt  $\omega_{g1} = \omega_N$  und es ergibt sich die kompenzierte Schleifenverstärkung

$$\underline{F}'_0(j\omega) = \underline{F}_0 \underline{F}_K = \frac{F_{00}}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_P})(1 + \frac{j\omega}{\omega_2})(1 + \frac{j\omega}{\omega_3})} . \quad (11.49)$$

Für Beispielwerte verwenden wir wieder den Betrags-Frequenzgang des unkompenzierten *OP 741* (also z.B. des *OP 748*), wobei zur Vereinfachung die statische Verstärkung mit  $\approx 100$  dB angenommen wurde.

In Abb. 11.15 ist zu erkennen, dass durch die Pol-Nullstellen-Kompensation die erste Tiefpass-Eckfrequenz  $f_P$  der kompenzierten Schleifenverstärkung  $\underline{F}'_0 = \underline{F}_0 \underline{F}_K$  um die Differenz zwischen erster und zweiter Eckfrequenz der unkompenzierten Schleifenverstärkung höher gewählt werden kann, als

bei der Lag-Kompensation (mit  $f_0$  als erste Tiefpass-Eckfrequenz der Lag-kompensierten Schleifenverstärkung). Im vorliegenden Beispiel wird dadurch im Vergleich zur Lag-Lead-Kompensation eine Dekade mehr Bandbreite gewonnen.

Anmerkung: Beim Vergleich des Lag-Lead-Frequenzgangs mit dem der universellen Frequenzgangkompensation des *OP 741* fällt auf, dass diese näherungsweise gleich sind. Im Unterschied dazu besitzt der Frequenzgang für Lag-Kompensation eine deutlich niedrigere erste Eckfrequenz. Daran ist zu erkennen, dass die universelle Frequenzgang-Kompensation des 741 in geschickter Weise den Vorteil der Lag-Lead-Kompensation zur Vergrößerung der Bandbreite nutzt. Das geschieht dort durch den Lag-Lead-Frequenzgang, der für die Miller-Transformation verantwortlichen Verstärkung  $V_{U2}(j\omega)$  vgl. Seite 286.

Zur Übung des Umgangs mit dem Bode-Diagramm sollte der Phasengang des Lag-Lead-Korrekturgliedes und des Lag-Lead-kompensierten Frequenzgangs ermittelt werden.

## 11.8 Reine Pol-Kompensation (Lead-Kompensation)

Der Vorteil der zuvor besprochenen Lag-Lead-Kompensation lag darin, dass der von ihr eingefügte dominante Tiefpass-Pol um den Abstand zwischen erster und zweiter Eckfrequenz der unkompensierten Schleifenverstärkung höher gewählt werden kann. Ist noch mehr Bandbreite der Schleifenverstärkung notwendig und kann die Anwendung eine Verringerung der statischen Verstärkung tolerieren, bietet sich die Lead-Kompensation an.

Bei der Lead-Kompensation wird ein Hochpass-Term (Nullstelle) in den Frequenzgang der Schleifenverstärkung eingefügt, der den Tiefpass-Term bei der zweiten Eckfrequenz der unkompensierten Schleifenverstärkung kompensiert. Die Phasendrehung auf kritische Werte der Phasenreserve erfolgt dann erst bei der darauf folgenden Tiefpass-Eckfrequenz.

Bezüglich Realisierung und Einbau eines Lead-Korrekturgliedes in die Verstärkerschleife gelten analog die Aussagen zum Lag-Lead-Glied. Ein mögliches Lead-Kompensationsglied ist in Abb. 11.16 dargestellt.

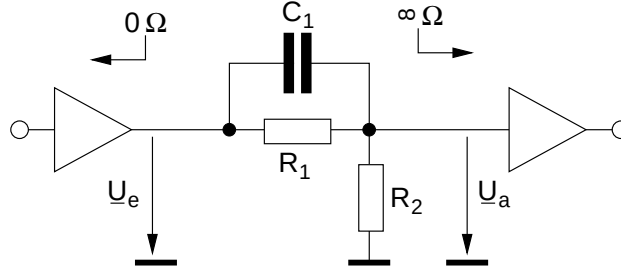


Abb. 11.16: Lead Kompensationsglied

Für den Frequenzgang des Lead-Korrekturgliedes gilt

$$\begin{aligned}
 \underline{F}_K(j\omega) &= \frac{U_a}{U_e} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_N}}}, \quad \omega_N = \frac{1}{R_1 C_1} \\
 &= R_2 \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_N}}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_N})R_2 + R_1} \\
 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_N}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_N} \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad (11.50)
 \end{aligned}$$

Der, in die Schleifenverstärkung multiplikativ eingefügte Kompensationsfrequenzgang lautet für das gewählte Kompensationsglied

$$F_K(j\omega) = F_{K0} \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_N}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_P}} \quad \text{mit} \quad \omega_N = (R_1 C_1)^{-1} \quad (11.51)$$

$$\omega_P = (R_1 || R_2 C_1)^{-1} \gg \omega_N$$

$$F_{K0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\omega_N}{\omega_P} \ll 1 \quad (11.52)$$

Die statische Verstärkung  $F_{K0}$  ist immer kleiner als der Wert Eins eines idealen Hochpasses. Dies kann jedoch in einer Anwendung von Vorteil sein, um den geforderten Wert des Amplitudenrandes zu erreichen. Der Frequenzgang der Lead-kompensierten Schleifenverstärkung lautet entsprechend den vor-

angegangenen Überlegungen:

$$F_0(j\omega) = \frac{F_{00}}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g1}})(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g2}})(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g3}})} F_{K0} \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_N}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_P}}$$

$$\omega_{g1} \ll \omega_{g2} \ll \omega_{g3} . \quad (11.53)$$

Mit der Dimensionierung  $\omega_N \approx \omega_{g2}$  und  $\omega_P \gg \omega_{g3}$  kompensieren sich die Pol- und Nullstelle bei  $\omega_N \approx \omega_{g2}$  und wegen  $\omega_P \gg \omega_{g3}$  liegt der kritische Wert der Phasenreserve von  $45^\circ$  erst bei  $\omega = \omega_{g3}$ .

Die Zusammenhänge sind in Abb. 11.17 für die Schleifenverstärkung des unkompenzierten *OP 741* mit  $F_{00} = 1$  dargestellt. Es ist zu erkennen, dass

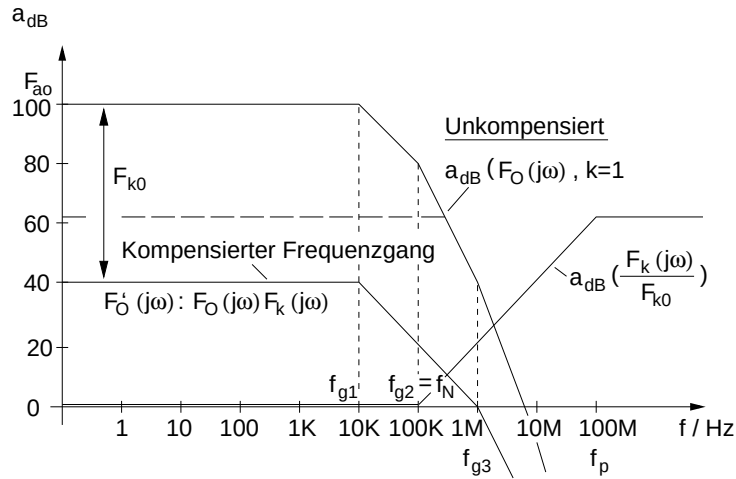


Abb. 11.17: Schleifenverstärkung

in diesem Fall die statische Verstärkung (Dämpfung) des Korrekturgliedes mindestens -60 dB betragen muss, um bei dem Durchtritt der Schleifenverstärkung durch 1 einen Phasenrand von  $45^\circ$  aufzuweisen. Wegen Gl. (11.52) gilt dann  $\omega_N/\omega_P = 1/1000$ , wodurch die Forderung  $\omega_P \gg \omega_{g3}$  gut erfüllt ist ( $\omega_N = \omega_{g2} = \omega_{g3}/10 = \omega_P/1000 \Rightarrow \omega_P = 100 \omega_{g3}$ ). Wegen Gl. (11.30) gilt bei reellwertiger Gegenkopplung mit  $\underline{F}_2(j\omega) = k$

$$a_{dB}(\underline{F}_0(j\omega)) = a_{dB}(\underline{F}_a(j\omega)) - a_{dB}\frac{1}{k} + a_{dB}(\underline{F}_K(j\omega)) \quad (11.54)$$

Wir schreiben

$$\underline{F}_K(j\omega) = \underbrace{\underline{F}_{K0}}_{\text{reellwertige Dämpfung}} \underbrace{\frac{\underline{F}_K(j\omega)}{\underline{F}_{K0}}}_{\text{idealer Hochpaß}} \quad (11.55)$$

und formen Gl. (11.54) um zu:

$$a_{dB}(\underline{F}_0(j\omega)) = a_{dB}(\underline{F}_a(j\omega)) - \underbrace{a_{dB} \frac{1}{k} - a_{dB} \frac{1}{F_{K0}}}_{a_{dB} \frac{1}{k'}} + a_{dB} \frac{\underline{F}_K(j\omega)}{F_{K0}} \quad (11.56)$$

Wir sehen, dass die beiden reellwertigen Terme durch  $k$  und  $F_{k0}$  gemeinsam die statische Verstärkung bestimmen. Besteht die Rückkopplung z. B. nur aus dem gezeigten Lead-Glied, kann  $k = 1$  gewählt werden und die statische Verstärkung des gegengekoppelten OP beträgt  $\left. \frac{\underline{F}_a}{1 + \underline{F}_a \underline{F}_k} \right|_{\omega \rightarrow 0} \approx \frac{1}{\underline{F}_K} \hat{=} a_{dB} \frac{1}{\underline{F}_K} \approx 60 \text{ dB}$ . Kleinere Verstärkungswerte sind nicht möglich ohne die Phasenreserve zu verschlechtern. Daher ist das gewählte Beispiel zur Demonstration der Lead-Kompensation aber für die meisten praktischen Anwendung wenig geeignet.

## 11.9 Allgemeine Anmerkung zur Kompensation der Schleifenverstärkung

Auf den letzten Seiten wurden einige grundlegende Verfahren zur Beeinflussung des Frequenzgangs der Schleifenverstärkung vorgestellt. In allen Fällen werden die Pole der unkompensierten Schleifenverstärkung verschoben oder um zusätzliche Pole (dominanter Pol) erweitert oder durch Nullstellen kompensiert. Das (Optimierungs-)Kriterium war bisher ein vorgegebener Wert des Phasen- oder Amplitudenrandes als Maß für die Stabilität. Betrachtet man die Stabilität als einziges Kriterium, so ist die Platzierung der Kompensationsschaltung innerhalb der Schleife egal.

Es kommt nur darauf an, der kompensierten Schleifenverstärkung die notwendigen Pole und/oder Nullstellen hinzufügen.

In der Praxis entscheiden meist noch weitere Kriterien über die Platzierung der Kompensationsschaltung. Die zwei hierfür wichtigsten Kriterien sind das Rauschen und die maximale Anstiegsgeschwindigkeit des Ausgangssignals („Slew-Rate“). Im Sinne der Rauschoptimierung sollte eine Tiefpassfilterung (dominanter Pol) möglichst am OP-Ausgang erfolgen. Die gegenteilige Forderung ergibt sich für eine große Slew-Rate, die durch die Umladung



---

von Kapazitäten mit hohen Spannungshüben verringert wurde. In diesem Fall sollte die Kompensation möglichst nahe am Eingang liegen.

### 11.10 Berechnung von Operationsverstärker-Schaltungen

Die zu berechnende Schaltung wird so partitioniert und umgezeichnet, dass sie durch das Blockschaltbild in Abb. 11.18 beschrieben wird.

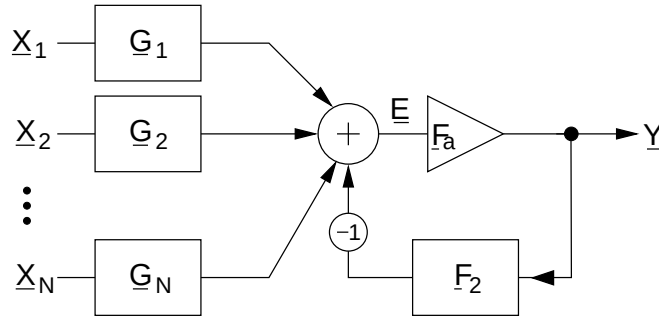


Abb. 11.18: Allgemein gültiges Blockschaltbild zur Beschreibung von Operationsverstärker-Schaltungen.  $X_n$  können Spannungen oder Ströme sein.  $\underline{Y}$  und  $\underline{E}$  sind in der Regel Spannungen (Spannungsgesteuertes Hauptzweitor mit Spannungsausgang).

Es gilt allgemein für die Schaltung in Abb. 11.18

$$\underline{Y} = \underline{E} \underline{F}_a = \underline{F}_a \sum_{n=1}^N \underline{X}_n \underline{G}_n - \underline{Y} \underline{F}_2 \underline{F}_a \quad (11.57)$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{F}_a \underline{F}_2}{1 + \underline{F}_a \underline{F}_2} \frac{1}{\underline{F}_2} \sum_{n=1}^N \underline{X}_n \underline{G}_n \quad (11.58)$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\underline{F}_O}} \frac{1}{\underline{F}_2} \sum_{n=1}^N \underline{X}_n \underline{G}_n; \quad \underline{F}_O = \underline{F}_a \cdot \underline{F}_2, \text{ Ringverstärkung.} \quad (11.59)$$

Darin lassen sich die  $\underline{G}_n$  und  $\underline{F}_2$  wie folgt bestimmen:

$$\underline{G}_n = \left. \frac{\underline{E}}{\underline{X}_n} \right|_{\substack{\underline{Y}=0 \\ X_i=0, i \neq n}} \quad \underline{F}_2 = \left. \frac{-\underline{E}}{\underline{Y}} \right|_{X_n=0}. \quad (11.60)$$

Die Betriebsverstärkung für den Eingang  $n$  ist

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{X}_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\underline{F}_O}} \frac{\underline{G}_n}{\underline{F}_2} \approx \frac{\underline{G}_n}{\underline{F}_2} \quad (\text{für } |\underline{F}_O| \rightarrow \infty). \quad (11.61)$$

Der Einfluss von nichtidealen Eigenschaften des OP's kann mit Hilfe eines geeigneten Ersatzschaltbildes ermittelt werden. Abb. 11.19 zeigt ein quasistatisches Ersatzschaltbild eines realen OP's ohne Rauschquellen. Es berücksichtigt einen endlichen „differentiellen“ Eingangswiderstand  $R_{\text{ein,d}}$ , Offset, ein  $I_B$ , eine endliche (reelle) Spannungsverstärkung  $V_U$  und einen endlichen Ausgangswiderstand  $R_{\text{aus}}$ .

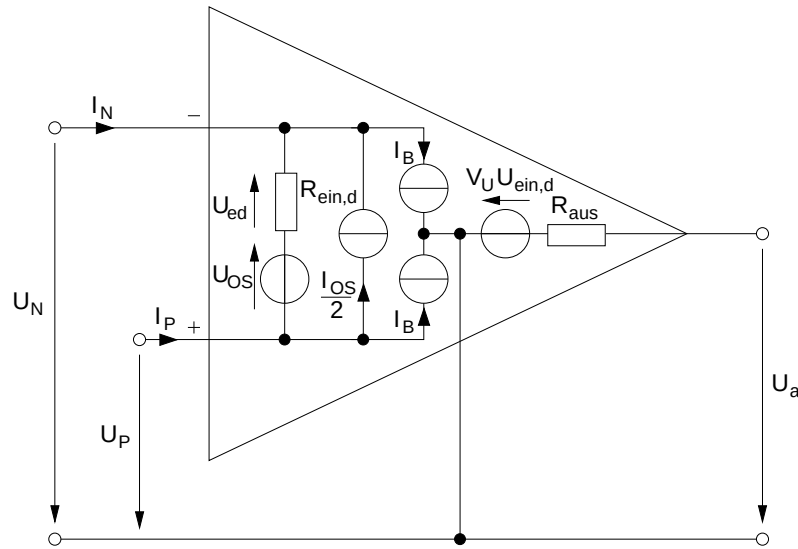


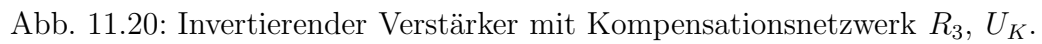
Abb. 11.19: Ersatzschaltbild eines realen Operationsverstärkers mit Ruheströmen und Offsetgrößen.

**Beispiel:** invertierender Verstärker

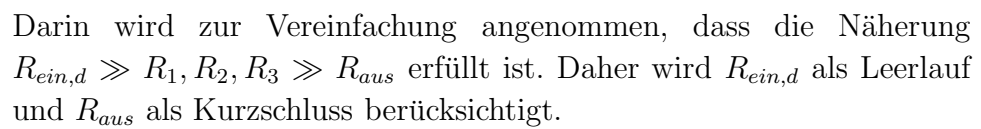
Es wird ein invertierender Verstärker nach Abb. 11.20 aufgebaut. Für den OP gilt das Ersatzschaltbild in Abb. 11.19, wobei  $V_U \rightarrow \infty$  angenommen werden kann.

Für die Ausgangsspannung des invertierenden Verstärkers gilt:

$$U_a = U_a(U_1, U_K, U_{OS}, I_B, I_{OS}) \quad (11.62)$$



1. Bestimme die Gesamtschaltung aus Abb. 11.19 und 11.20 in Abb. 11.2



2. Bestimme die Einkoppelfaktoren  $G_n$  ( $Q_{n \neq i}$  bedeutet: alle Quellen aus  $X_i$  gleich Null)

a)  $X_1 = U_1$

$$G_1 = \left. \frac{E}{X_1} \right|_{X_n=0, n \neq i}^{Y=0} = \left. \frac{U_{ein,d}}{U_1} \right|_{Q_{n \neq 1}=0} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

b)  $X_2 = U_K$

$$G_2 = \left. \frac{U_{ein,d}}{U_1} \right|_{Q_{n \neq 2}=0} = 1$$

c)  $X_3 = I_B$

$$G_3 = \left. \frac{U_{ein,d}}{I_B} \right|_{Q_{n \neq 3}=0} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - R_3$$

d)  $X_4 = \frac{I_{OS}}{2}$

$$G_4 = \left. \frac{U_{ein,d}}{\frac{I_{OS}}{2}} \right|_{Q_{n \neq 4}=0} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - R_3$$

e)  $X_5 = U_{OS}$

$$G_5 = \left. \frac{U_{ein,d}}{U_{OS}} \right|_{Q_{n \neq 5}=0} = -1$$

f) Rückkoppelfaktor  $F_2 = k$

$$F_2 = \left. \frac{-E}{Y} \right|_{X_n=0} = \left. \frac{U_{ein,d}}{U_a} \right|_{Q=0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (11.63)$$

## 3. Zusammenfassen nach Gl. (11.59)

Mit der Ringverstärkung  $F_O = F_a F_2 = V_U = k = V_U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$  folgt

$$U_a = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{F_O}}}_{\rightarrow 1 \text{ für } V_U \rightarrow \infty} \frac{1}{F_2} \sum_{n=1}^S X_n G_n \quad (11.64)$$

$$U_a = -\frac{R_2}{R_1} U_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_K + \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - R_3 \right) \frac{R_1 + R_2}{R_1} I_B \quad (11.65)$$

$$- \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{I_{OS}}{2} - \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_{OS} \quad (11.66)$$

Der OP habe folgende Daten:  $2 \mu\text{A} \leq I_B \leq 3 \mu\text{A}$ ,  $|I_{OS}| \leq 0,5 \mu\text{A}$ ,  $|U_{OS}| \leq 3 \text{mV}$ .

Aufgabe: Dimensionierungsbeispiel

Die Quelle  $U_1$  soll durch einen Eingangswiderstand der Verstärkerschaltung von  $10 \text{k}\Omega$  belastet werden. Es soll gelten

$$U_a = -8U_1 + U_{a,f}(U_K, U_{OS}, I_B, I_{OS}) \quad (11.67)$$

Welche Bauteile sind wie zu dimensionieren? Aufgabe: Kompensation der Fehlerspannung

$R_3$  soll so dimensioniert werden, daß die Fehlerspannung  $U_{a,f}(U_K = 0, U_{OS}, I_B, I_{OS})$  minimal wird. Wie groß ist  $U_{a,f}$  in diesem Fall?

Aufgabe: Temperaturkompensation

Bei 25 °C soll durch die Spannungsquelle  $U_K$  ein Offsetspannungsabgleich durchgeführt werden. Welchen Einstellbereich muß  $U_K$  besitzen, damit ein Abgleich möglich ist?

Wie groß kann im Temperaturbereich -55°C ... 125 °C die Fehlerspannung  $U_{a,f}$  nach dem Abgleich maximal werden, wenn für die Temperaturabhängigkeit der Offsetgrößen gilt

$$\left| \frac{dI_{OS}}{dT} \right| \leq 2 \frac{nA}{C}, \quad \left| \frac{dU_{OS}}{dT} \right| \leq 25 \frac{\mu V}{C}.$$