1 Kirchhoffsche Regeln

1.1 Herleitung der Kirchhoffschen Regeln aus den Maxwellschen Gleichungen

Zur Herleitung der Kirchhoffschen Knotenregel, nehmen wir an, dass für die Verschiebungsstromdichte $\vec{D}$ gilt: $\boxed{\left|\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right| \ll \text{Leitungsstromdichte } \vec{J}}$. Dann wird aus der ersten Maxwellschen Gleichung:

Betrachten langsam veränderliche Felder (keine Abstrahlung)

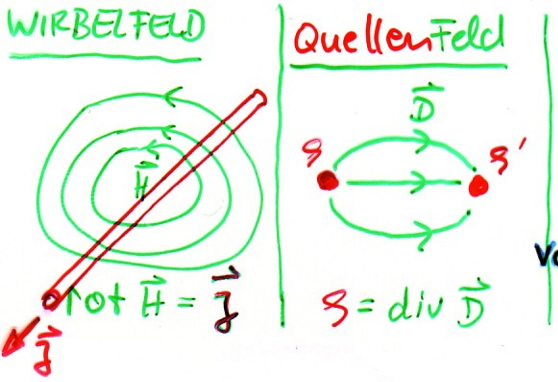
1. Maxwell:

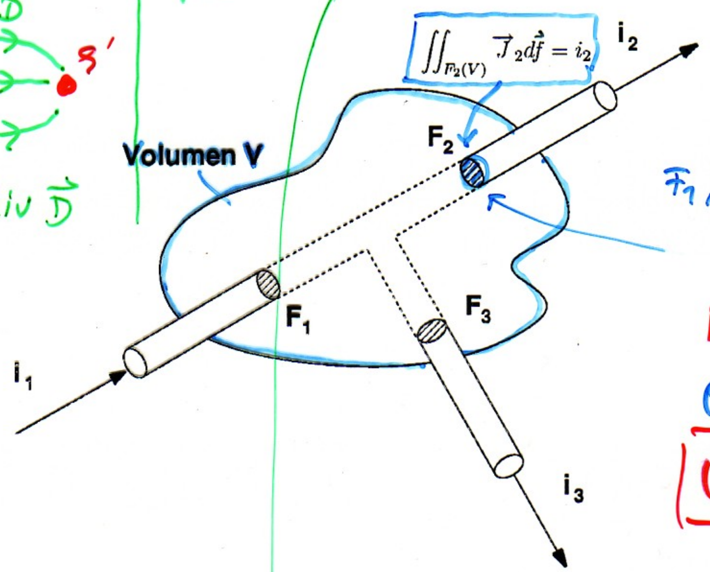
$$\boxed{rot\vec{H} = \vec{J} + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}} = \vec{J}} \tag{1}$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei:

$$\boxed{div(rot\vec{H}) = \mathbf{0} = \boldsymbol{div\vec{J}}} \tag{2}$$

Wirbelfelder sind Quellenfrei





$F_1, F_2 \dots F_3 \dots$: Ein/Austritts-flächen in/aus Volumen

Allgemeine Interpretation:
OBERFLÄCHE von V:
ÜBERKNOTEN (3-D)

Abb. 1: Beispiel eines Überknotens mit dem Volumen V, in den drei Leiter hineinführen.

Integriere über beliebiges Volumen V; Umwandlung mit Gaußschem Satz:

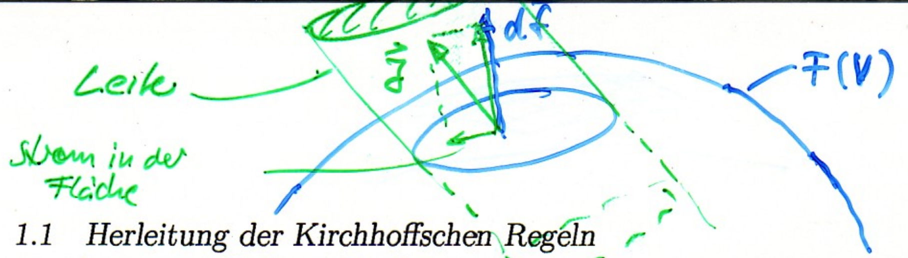
Gaußscher Satz verknüpft Quellen in einem Volumen mit dem aus dem Volumen austretenden Quellgrößen

$$\boxed{\iiint_V div\vec{J}\,dv = \iint_{F(V)} \vec{J}\,d\vec{f} = 0} \tag{3}$$

Sonderfall: Stromfluss nur in einzelnen Leitern (Anzahl Z) mit Flächen F_n (n=1...Z). Damit wird Gl. (3) zu:

Interpretation:

Summe (Integral) aller in Richtung der Flächennormalen fließenden Ströme (herein/herausfließend) = 0



Allgemeine KNOTENREGEL (Kirchhoff)

el. Leiter = diskrete, stromdurchflossene Flächen F_n

$$\iint_{F(V)} \vec{J}\,d\vec{f} = \sum_{n=1}^{Z} \iint_{F_n} \vec{J}\,d\vec{f} = \sum_{n=1}^{Z} i_n = 0 \qquad (4)$$

Strom aus/in Überknoten

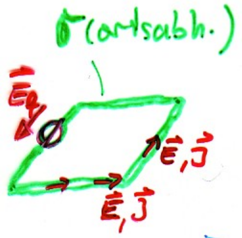
Man bezeichnet Gl. (4) auch als Knotenregel. Wird das Volumen V als Knoten interpretiert und Z als die, in den Knoten führenden Zweige, erhält man die allgemeine Form der Kirchhoffschen Knotenregel. Sie gilt demnach für beliebige Anordnungen (Strukuren) im Inneren des Volumens. z.B. auch für Überknoten oder Volumina (z.B. Halbleitersubstrat).

Zur Herleitung der Kirchhoffschen Umlaufregel wird die zweite Maxwellsche Gleichung betrachtet:

2. Maxwell

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}} \qquad (5)$$

„Elektrisches Wirbelfeld ergibt sich dann + nur dann, wenn sich d. magn. Kraftflußdichte zeitlich ändert"



$\vec{E}$ genügt der Materialgleichung (κ Leitfähigkeit in $\frac{1}{\Omega m}$)

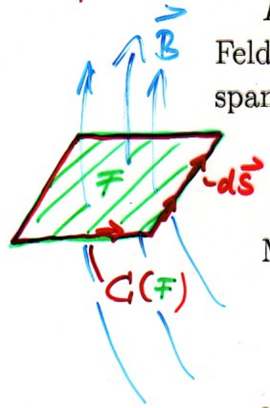
Materialgleichung (vgl. Elektr. I)

$$\boxed{\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}_q)} \qquad (6)$$

elektromotorische Kraft (Quelle)

κ, σ, γ alles Leitfähigkeit

E_q ist eine durch fremde elektromotorische Kraft erzeugte eingeprägte Feldstärke. Bilde Flächenintegral über die Fläche, die der Stromkreis aufspannt mit Gl. (5):



ruhende Medien: vertauschen erlaubt

$$\iint_F \mathrm{rot}\,\vec{E}\,d\vec{f} = -\iint_F \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\,d\vec{f} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iint_F \vec{B}\,d\vec{f}}_{\phi} = -\frac{\partial}{\partial t}\phi \qquad (7)$$

ϕ magnetischer Fluß (Def.)

Mit Stokeschem Satz:

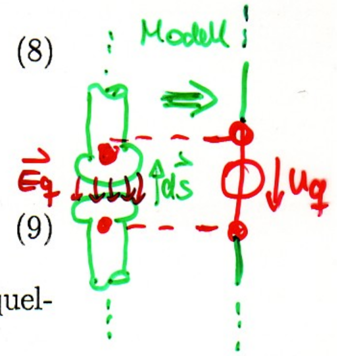
$$\iint_F \mathrm{rot}\,\vec{E}\,d\vec{f} = \oint_{C(F)} \vec{E}\,d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\phi \qquad (8)$$

Mit $\vec{E}$ aus Gl. (6):

$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} - \vec{E}_q$

$$\oint_{C(F)} \frac{\vec{J}}{\kappa}\,d\vec{s} - \oint_{C(F)} \vec{E}_q\,d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\phi \qquad (9)$$

Modell

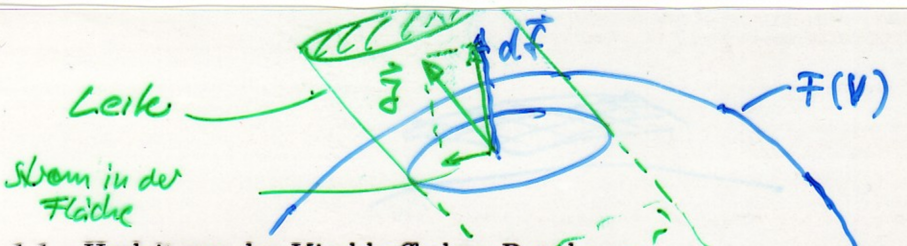


Liegt die elektromotorische Kraft in Form konzentrierter Spannungsquellen U_q vor, so gilt:

$$\oint_{C(F)} \underbrace{\frac{i}{\kappa A}}_{=\vec{J}}ds - \sum_{Umlauf} u_q = -\frac{\partial}{\partial t}\phi \qquad (10)$$

Mit dem Ohmschen Gesetz folgt dann:

i = Strom in Umlaufrichtung



el. Leiter = diskrete, stromdurchflossene Flächen F_n

Allgemeine KNOTENREGEL (Kirchhoff)

$$\boxed{\iint_{F(V)} \vec J\, d\vec f = \sum_{n=1}^{Z} \iint_{F_n} \vec J\, d\vec f = \sum_{n=1}^{Z} i_n = 0} \qquad (4)$$

Strom aus/in Überknoten

Man bezeichnet Gl. (4) auch als Knotenregel. Wird das Volumen V als Knoten interpretiert und Z als die, in den Knoten führenden Zweige, erhält man die allgemeine Form der Kirchhoffschen Knotenregel. Sie gilt demnach für beliebige Anordnungen (Strukuren) im Inneren des Volumens. z.B. auch für Überknoten oder Volumina (z.B. Halbleitersubstrat).

Zur Herleitung der Kirchhoffschen Umlaufregel wird die zweite Maxwellsche Gleichung betrachtet:

2. Maxwell

$$\boxed{rot \vec E = -\frac{\partial}{\partial t} \vec B} \iff \qquad (5)$$

" Elektrisches Wirbelfeld ergibt sich dann + nur dann, wenn sich d. magn. Kraftflußdichte zeitlich ändert

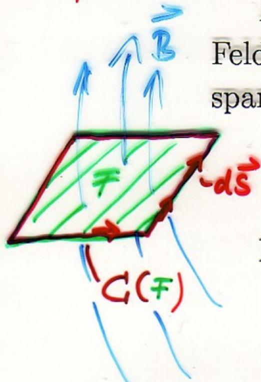
$\vec E$ genügt der Materialgleichung (κ Leitfähigkeit in $\frac{1}{\Omega m}$)

Materialgleichung (vgl. Elektr. I)

$$\boxed{\vec J = \kappa(\vec E + \vec E_q)} \leftarrow \text{elektromotorische Kraft (Quelle)} \qquad (6)$$

κ, σ, γ alles Leitfähigkeit

E_q ist eine durch fremde elektromotorische Kraft erzeugte eingeprägte Feldstärke. Bilde Flächenintegral über die Fläche, die der Stromkreis aufspannt mit Gl. (5):



ruhende Medien: vertauschen erlaubt

$$\boxed{\iint_F rot \vec E\, d\vec f = -\iint_F \frac{\partial}{\partial t} \vec B\, d\vec f = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\iint_F \vec B\, d\vec f}_{\phi} = -\frac{\partial}{\partial t}\phi} \qquad (7)$$

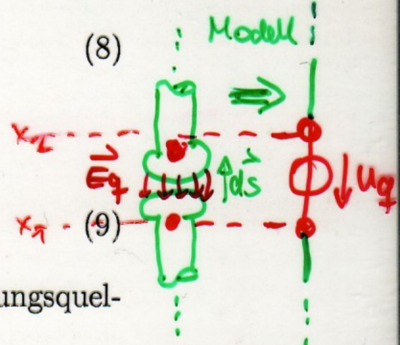
magnetischer Fluß (Def.)

Mit Stokeschem Satz:

$$\boxed{\iint_F rot \vec E\, d\vec f = \oint_{C(F)} \vec E\, d\vec s = -\frac{\partial}{\partial t}\phi} \qquad (8)$$

Mit $\vec E$ aus Gl. (6):

$\vec E = \frac{\vec J}{\kappa} - \vec E_q$



$$\boxed{\oint_{C(F)} \frac{\vec J}{\kappa} d\vec s - \oint_{C(F)} \vec E_q d\vec s = -\frac{\partial}{\partial t}\phi} \qquad (9)$$

Liegt die elektromotorische Kraft in Form konzentrierter Spannungsquellen U_q vor, so gilt:

$$\boxed{\oint_{C(F)} \underbrace{\frac{i}{\kappa A} ds}_{= \vec J d\vec s} - \sum_{Umlauf} u_q = -\frac{\partial}{\partial t}\phi} \qquad (10)$$

$\int_{x_1}^{x_2} E_q\, ds = U_q$

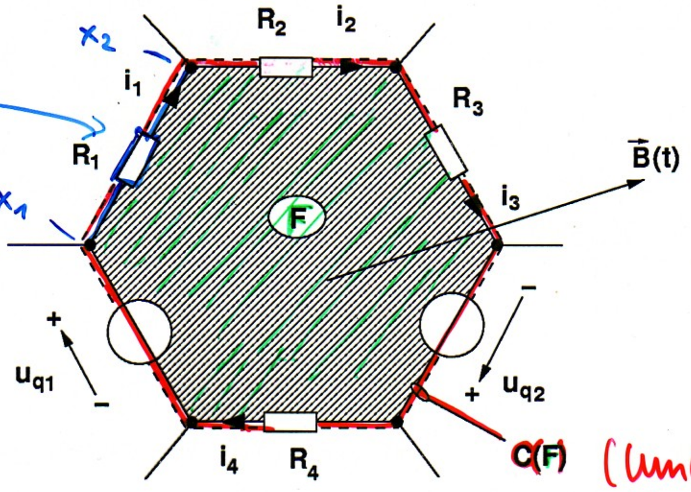
Mit dem Ohmschen Gesetz folgt dann:

i = Strom in Umlaufrichtung

konst. zwischen zwei Knoten

$$i \cdot \oint_{C(F)} \frac{\cancel{i}}{\sigma A}\, ds - \overbrace{\sum_{Umlauf,m} u_{qm}}^{\text{Quellen}} = -\frac{\partial}{\partial t}\phi$$

$$i_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{\sigma A} = i_1 R_1$$



(Umlauf)
(Masche)

Abb. 2: Beispiel eines Maschenumlaufes.

"ALLGEMEINE" UMLAUF(MASCHEN)-REGEL

$$\boxed{\sum_{Umlauf} i_n R_n - \sum_{Umlauf} u_{qm} = -\frac{\partial}{\partial t}\phi} \qquad (11)$$

magnetischer Fluß

(Kapazitäten nicht berücksichtigt.)

Der Term: $-\frac{\partial}{\partial t}\phi$ stellt den Induktionsfluss dar. Wird der Umlauf um die Fläche als Masche interpretiert erhält man die allgemeine Form der Kirchhoffschen Maschenregel. Wird der Induktionsfluss durch den Strom i_{jj} im eigenen Leiter oder durch den Srom i_{jk} von anderen Leitern hervorgerufen, gilt:

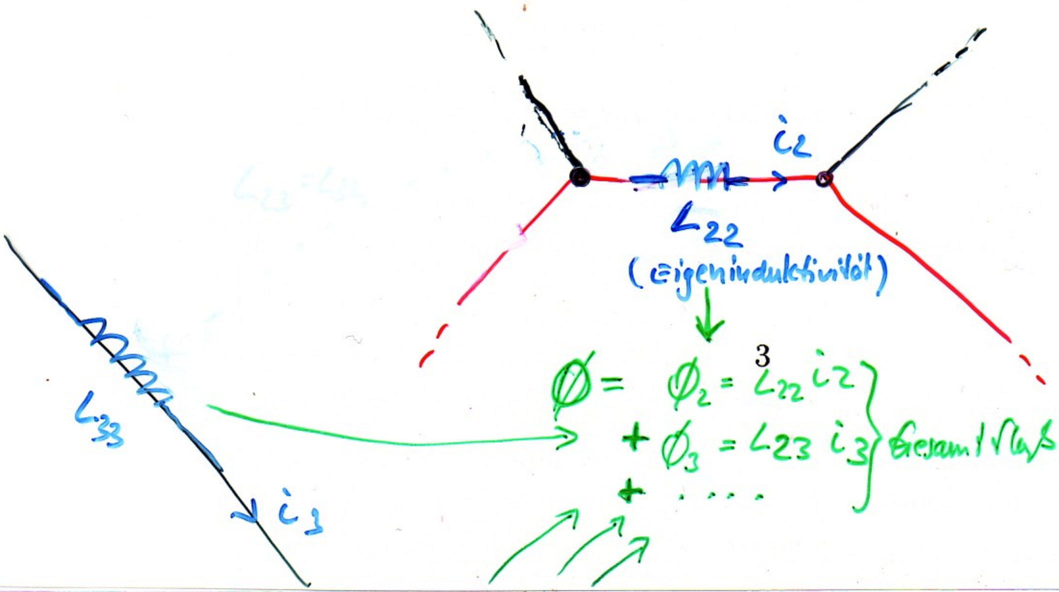
Eigen/Gegen-Induktivität

Def.

$$\boxed{\phi = \phi_j = \sum_{k=1}^{N} L_{jk} i_k} \qquad (12)$$

"jeder Strom trägt mit L_{jk} zum Fluß bei"

L_{jj} ist die Eigeninduktivität, L_{jk} die Gegeninduktivität zwischen dem betrachteten Umlauf (Schleife, Masche j) und dem, zum Fluss durch den Umlauf beitragenden weiteren N-1 Leitern.



$$\phi = \phi_2 = L_{22} i_2$$
$$+ \phi_3 = L_{23} i_3$$
$$+ \dots$$

Gesamtfluß

$$L_{22} i_2 = \phi_2$$
$$L_{23} i_3 = \phi_{23}$$
$$\Sigma \phi_2$$

Gesamtfluss durch "Masche"

Phasoren

Zeitbereich: $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ (allgemein)

betrachte Lineare Systeme $\Rightarrow$ nur eine Frequenz ω im gesamten Netzwerk

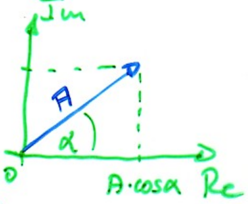
$\Downarrow$

„Information" $\cos \omega t$ überflüssig

$\Rightarrow$ Angabe der Phase φ genügt

Trick: Euler Schreibweise f. komplexe Zahlen

allgemein: $A(\cos\alpha + j\sin\alpha) = A \cdot e^{j\alpha}$



hier: $U\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{U e^{j\omega t} e^{j\varphi}\}$

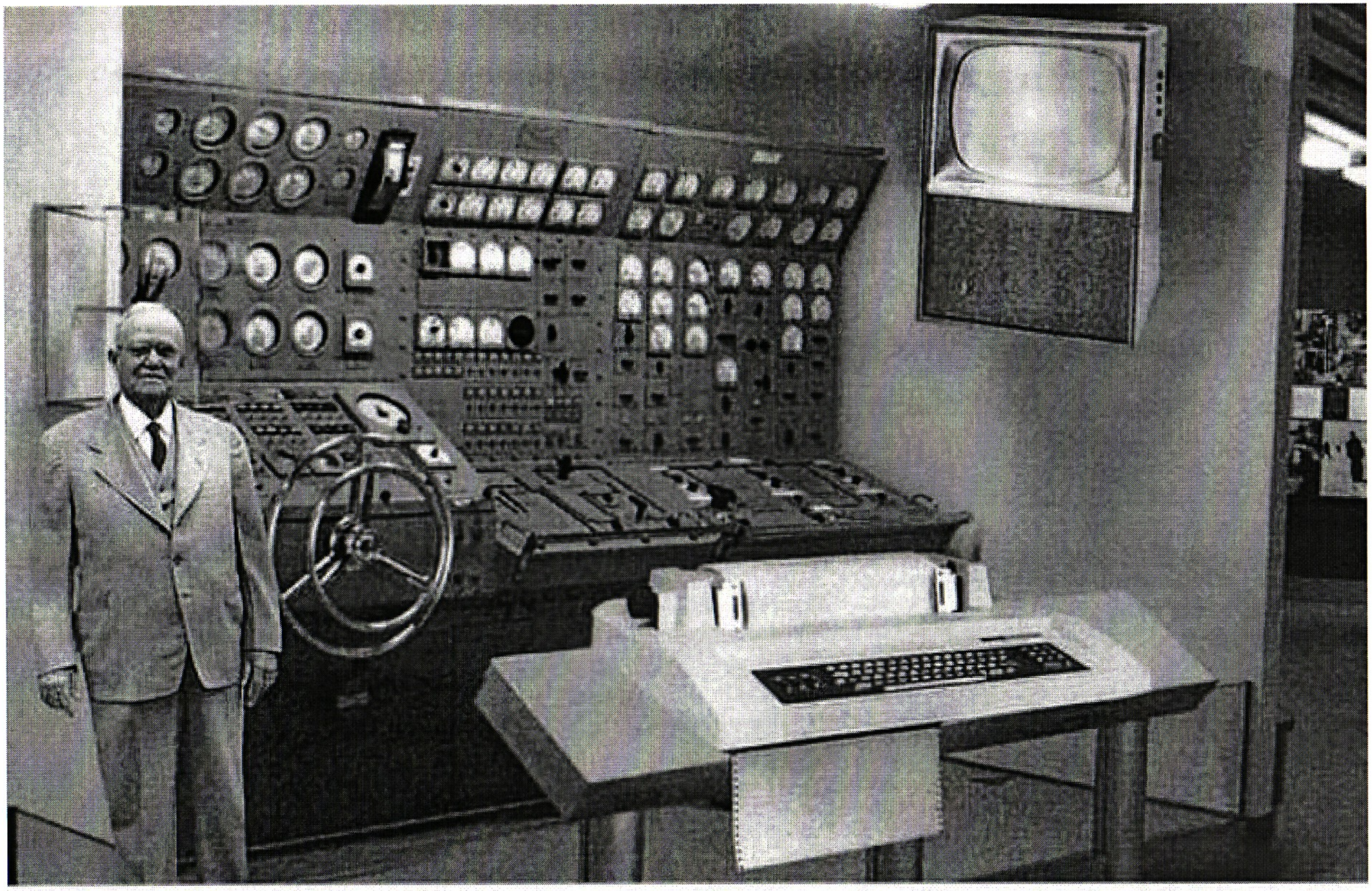
PHASOR: $\underline{U} = U e^{j\varphi}$

$$\boxed{\text{D.h. die Zeitfunktion erhält man durch Multiplikation des Phasors mit } e^{j\omega t} \text{ und anschließende Realteilbildung}}$$

Bspl:

Ableitung: $\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = \underline{j\omega}$

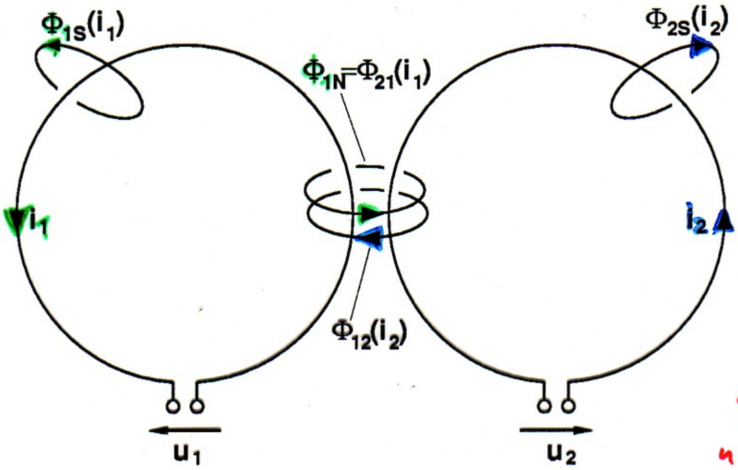


1956:

Scientists from the RAND Corporation have created this model to illustrate how a "home computer" could look like in the year 2004. However the needed technology will not be economically feasible for the average home. Also the scientists readily admit that the computer will require not yet invented technology to actually work, but 50 years from now scientific progress is expected to solve these problems. With teletype interface and the Fortran language, the computer will be easy to use.

2 Gekoppelte Induktivitäten (Übertrager)

Lenzsche Regel: Wird durch den magnetischen Fluß eines Primärstromes (z. B. $i_1 \rightarrow \Phi_1$) ein Sekundärstrom (i_2) hervorgerufen, so erzeugt dieser Sekundärstrom seinerseits ein magnetisches Feld, dessen Fluß($\Phi_{12}(i_2)$) dem des Primärfeldes entgegengerichtet ist.



Richtung v. Strom u. Fluß: „Korkenzieherregel" „Rechtsschraubenregel"....

Abb. 3: Beispiel gekoppelter Induktivitäten.

Der von der Primärschleife erzeugte Fluß Φ_1 durchsetzt nur mit dem Teil des Nutzflusses Φ_{1N} die Sekundärschleife. Der restliche Fluß Φ_{1S} ist ein Streufluß.

Primärer Fluß = Nutzfluß (durchdringt Sekundärschleife) + Streufluß (das, was „vorbei" geht)

$$\boxed{\Phi_1 = \Phi_{1N} + \Phi_{1S}} \tag{13}$$

Der Kopplungsgrad (oder kurz die Kopplung) k ist definiert als

DEF $$\boxed{k = \frac{\Phi_{1N}}{\Phi_1}} \tag{14}$$ Kopplung(sgrad)

Wird eine Schleife mehrfach gewunden, so multipliziert sich der Fluß mit der Anzahl N der Windungen. Es gilt dann im verlustlosen Fall ($R_n = 0$) für die in einer Schleife induzierte Spannung mit Gl. (11) für $i_2 = 0$:

$\boxed{\Phi = L \cdot i}$ (Def.)

aus allgem. Maschenregel:

$$\boxed{u_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}\Big|_{i_2=0}} \tag{15}$$

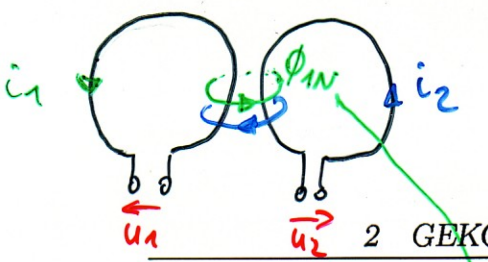
Überlagerungssatz

bzw. im Frequenzbereich:

$$\boxed{\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 \,|_{\underline{I}_2=0}} \tag{16}$$

Allgemeine Maschenregel: $\underbrace{\sum_n i_n R_n}_{\text{Fall } R_n=0 \text{ (verlustfrei)}} - \underbrace{\sum_m u_{qm}}_{\text{Fall } m=1 \text{ (eine Quelle } u_1)} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial t} = N \frac{\partial \phi}{\partial t}$

N Windungen (N-facher Fluß)



von letzter Seite ↓

$k = \frac{\Phi_{1N}}{\Phi_1}$ $\qquad u_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}\Big|_{i_2=0}$

Als Leerlaufspannung in der sekundären Schleife (N_2 Windungen) ergibt sich gemäß Lenzscher Regel (vgl. Abb. (3))

Leerlaufspannung ($i_2=0$)

$$\boxed{u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_{1N}}{dt} \overset{(14)}{=} N_2 k \frac{d\Phi_1}{dt} \overset{(15)}{=} N_2 k \frac{L_1}{N_1} \frac{di_1}{dt} \,|_{i_2=0}} \tag{17}$$

Aus der Feldberechnung von Spulen ergibt sich der allgemeine Zusammenhang $N^2 = LA_L^{-1}$ (A_L = Induktivitätsfaktor). Bei gleichem Induktivitätsfaktor für beide Schleifen gilt

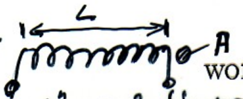
$$\boxed{L = A_L \cdot N^2}$$

A_L-Wert: Eigenschaft der Anordnung

$$\boxed{\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} \Rightarrow N_2 = N_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \tag{18}$$

$$(17) \Rightarrow \boxed{u_2(t) = k\underbrace{\sqrt{L_1 L_2}} \frac{di_1}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} \,|_{i_2} = 0,} \tag{19}$$

z.B.



lange, dünne Zylinderspule

worin die Definition

$$\boxed{L_{21} = L_{12} = M := k\sqrt{L_1 L_2}} \tag{20}$$

Gegen-Induktivität

$A_L = \mu_0 \mu_r \frac{A}{l}$ verwendet wurde.

Gl. (19) lautet im Frequenzbereich

$$\boxed{\underline{U}_2 = j\omega L_{21} \underline{I}_1 \,|_{\underline{I}_2=0}} \tag{21}$$

Analog ergibt sich im Fall $\underline{I}_1 = 0$ (Beachte zuvor gewählte Richtungen für Spannungen und Ströme)

analog für Einspeisen von $\underline{I}_2$:

$$\underline{U}_1 = -j\omega L_{12} \underline{I}_2 \,|_{\underline{I}_1=0} \tag{22}$$

$$\text{und } \underline{U}_2 = -j\omega L_2 \underline{I}_2 \,|_{\underline{I}_1=0} \tag{23}$$

Gemäß Überlagerungssatz gilt im Frequenzbereich

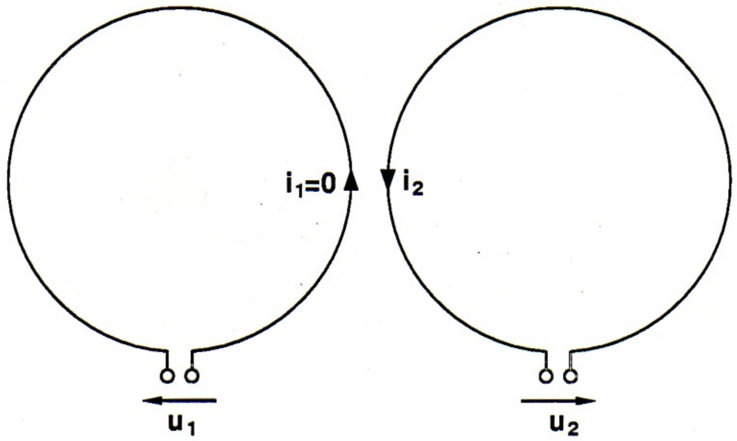
$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega L_{12} \underline{I}_2 \tag{24}$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_{21} \underline{I}_1 - j\omega L_2 \underline{I}_2 \tag{25}$$

Übertrager-Gleichungen
(≙ Z-Parameter)

Überlagerungssatz:

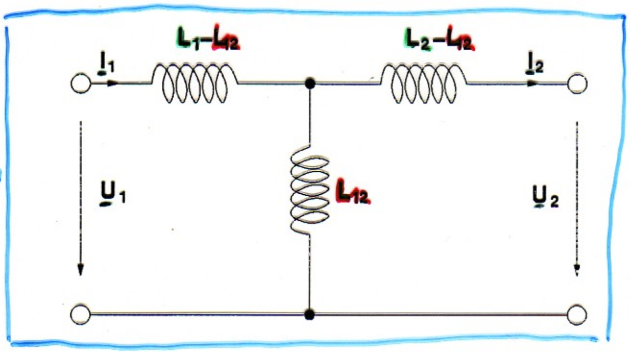
$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1\Big|_{\substack{I_1 \neq 0 \\ \text{sonst. } I=0}} + \underline{U}_1\Big|_{\substack{I_2 \neq 0 \\ \text{sonst. } I=0}} \left(+ \ldots \underline{U}_n\Big|_{\substack{I_n \neq 0 \\ \text{sonst. } I=0}} \ldots\right)$$



Anordnung

Abb. 4: Spannungen und Ströme an den gekoppelten Induktivitäten nach Abb. 3.

Schaltungstechnische Darstellung der Übertrager-Gleichungen (Übertrager-Modell)



ESB ← Gl.

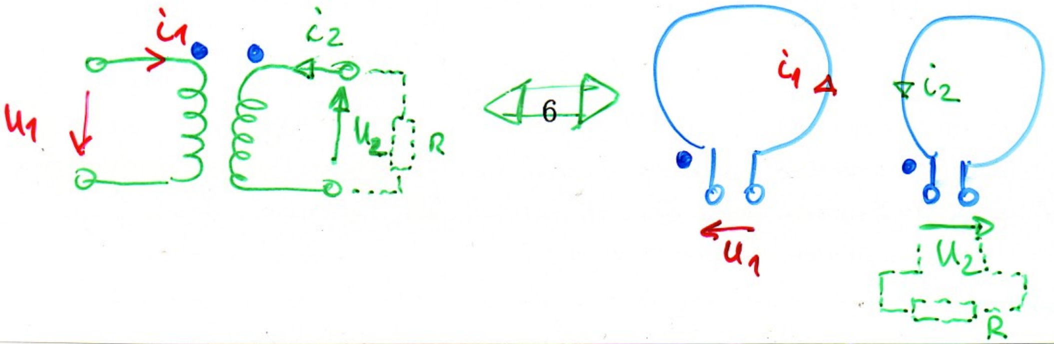
$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega L_{12} \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = j\omega L_{21} \underline{I}_1 - j\omega L_2 \underline{I}_2$$

Abb. 5: Ströme und Spannungen für die Anordnung in Abb. 4.

Beachten: Die Vorzeichen von $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ hängen von der jeweiligen Orientierung der Schleifen zueinander und den gewählten Pfeilrichtungen ab. Sie sind daher für jede Anordnung individuell herzuleiten (Lenzsche Regel, Verbraucherzählpfeilsystem. Tipp: Verbraucher anschließen, um festzustellen, ob $I \cdot R$ die gleiche Richtung wie die gewählte Spannung hat)

Ein einfaches Ersatzschaltbild in Abb. (??) kann direkt aus den Kopplungsgleichungen (25) angegeben werden. Es hat immer die gleiche Struktur, jedoch hängen die Vorzeichen von der jeweiligen Anordnung ab.

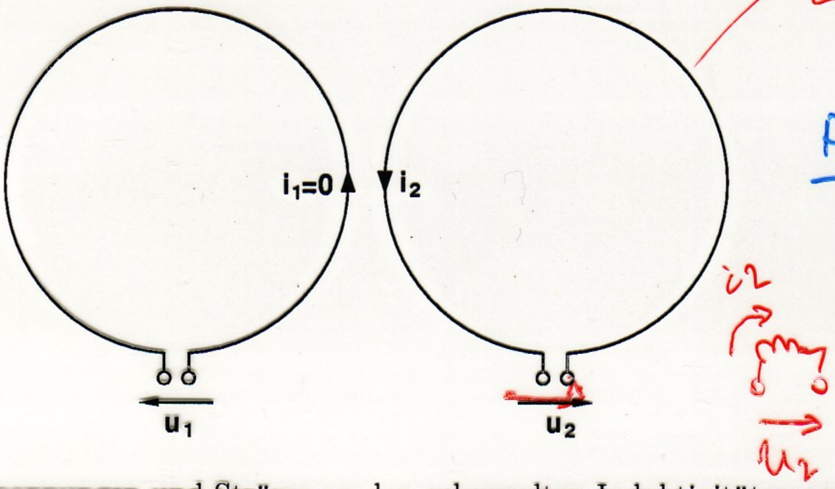
Um für die Bestimmung der Vorzeichen nicht immer die Korkenzieherregel an geometrischen Anordnungen durchführen zu müssen, wird häufig die „Punkt"-Konvention verwendet:



"PUNKT"-Konvention

$I_2 = \frac{u_2}{j\omega L_{22}}$

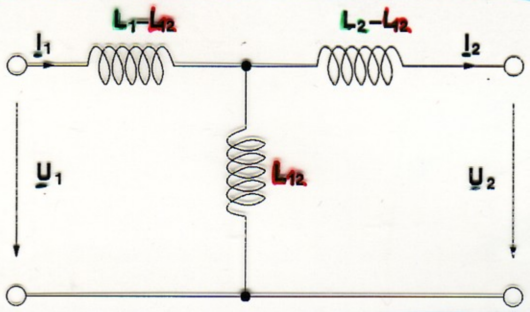
L_{22}



Anordnung

Abb. 4: Spannungen und Ströme an den gekoppelten Induktivitäten nach Abb. 3.

Schaltungstechnische Darstellung der Übertrager-Gleichungen (Übertrager-Modell)



← ESB ← Gl.

$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega L_{12} \underline{I}_2$

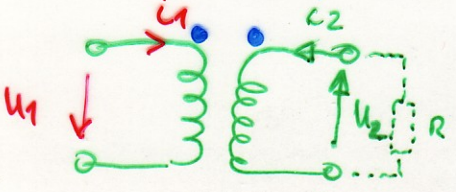
$\underline{U}_2 = j\omega L_{21} \underline{I}_1 - j\omega L_2 \underline{I}_2$

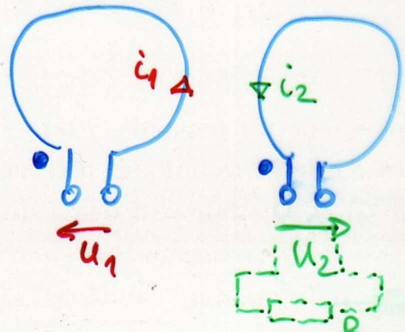
Abb. 5: Ströme und Spannungen für die Anordnung in Abb. 4.

Beachten: Die Vorzeichen von $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ hängen von der jeweiligen Orientierung der Schleifen zueinander und den gewählten Pfeilrichtungen ab. Sie sind daher für jede Anordnung individuell herzuleiten (Lenzsche Regel, Verbraucherzählpfeilsystem. Tipp: Verbraucher anschließen, um festzustellen, ob $I \cdot R$ die gleiche Richtung wie die gewählte Spannung hat)

Ein einfaches Ersatzschaltbild in Abb. (??) kann direkt aus den Kopplungsgleichungen (25) angegeben werden. Es hat immer die gleiche Struktur, jedoch hängen die Vorzeichen von der jeweiligen Anordnung ab.

Um für die Bestimmung der Vorzeichen nicht immer die Korkenzieherregel an geometrischen Anordnungen durchführen zu müssen, wird häufig die „Punkt"-Konvention verwendet:





"PUNKT"-Konvention

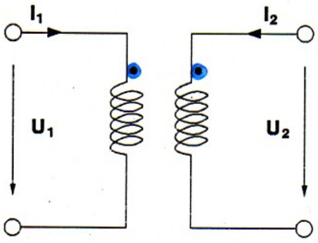


Abb. 6: Zur Definition der Punktkonvention.

Regel für Punkt-Konvention

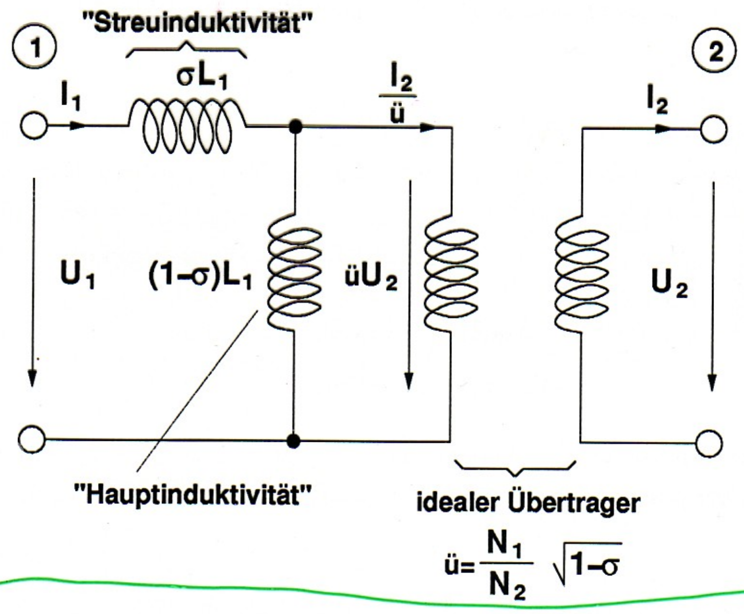
Es gilt: Besitzen beide Ströme die gleiche Richtung bezogen auf ihren jeweiligen Punkt, dann entspricht der, von beiden Strömen erzeugte Fluß, der Lenzschen Regel.

Für den Übertrager in Bild 6 gilt dann:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega L_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= -j\omega L_{21} \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} (26) \\ (27) \end{aligned}$$

Beispiel (überprüfen durch Anwenden des Überlagerungssatz d.h. wahlweise $I_1, I_2 = 0$)

Ein weiteres häufig benutztes Ersatzschaltbild verwendet einen idealen Übertrager und transformiert sämtliche nichtidealen Elemente auf die Primärseite:



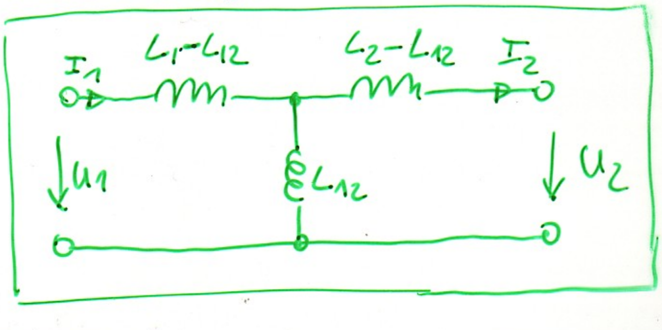
Alternatives ESB

$\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}$

$L_{12} = L_{21} = M$

Abb. 7: Ersatzschaltbild mit idealem Übertrager

identisch (gehen durch Umformen ineinander über)



Es läßt sich identisch aus den Übertragergleichungen herleiten mit den Definitionen:

$$\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \tag{28}$$

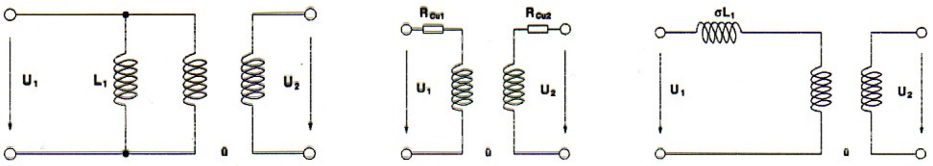
$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}\sqrt{1-\sigma} \text{ mit} \tag{29}$$

$$(\frac{N_1}{N_2})^2 = \frac{L_1}{L_2} \tag{30}$$

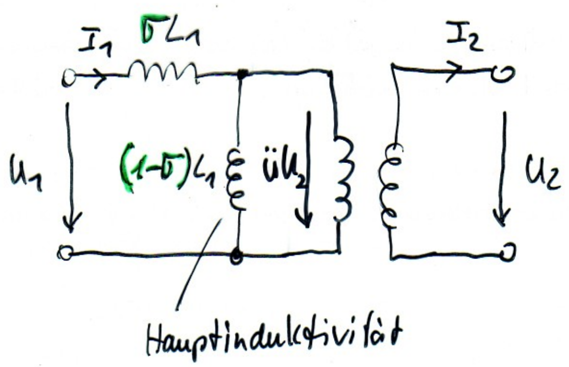
$$\tag{31}$$

Falls nicht zu vernachlässigen (meist im mittleren Frequenzbereich), sind noch Wicklungswiderstände $R_{Cu1,2}$ in Reihe zu den Toren (1) und (2) einzuführen.

Für starke Kopplung gilt $k \to 1 \Rightarrow \sigma \to 0$ und das Ersatzschaltbild läßt sich für tiefe, mittlere und hohe Frequenzen vereinfachen:



Tiefe Frequenzen Mittlere Frequenzen Hohe Frequenzen



Starke Kopplung: $k \to 1 \Rightarrow \sigma = 1-k^2 \to 0 \Rightarrow \sigma L_1 \ll (1-\sigma)L_1$

$\Downarrow$

Tiefe Frequ.: $j\omega\sigma L_1$ niederohmig $\Rightarrow$ vernachlässigbar
$j\omega(1-\sigma)L_1$ liegt $\parallel$ zu Übertrager, endliche Werte

Hohe Frequ.: $j\omega\sigma L_1$ durch $\omega\uparrow$ nicht mehr vernachlässig.
$j\omega(1-\sigma)L_1$ " " hochohmig $\Rightarrow$ wg. $\parallel$-Schaltung vernachlässigbar