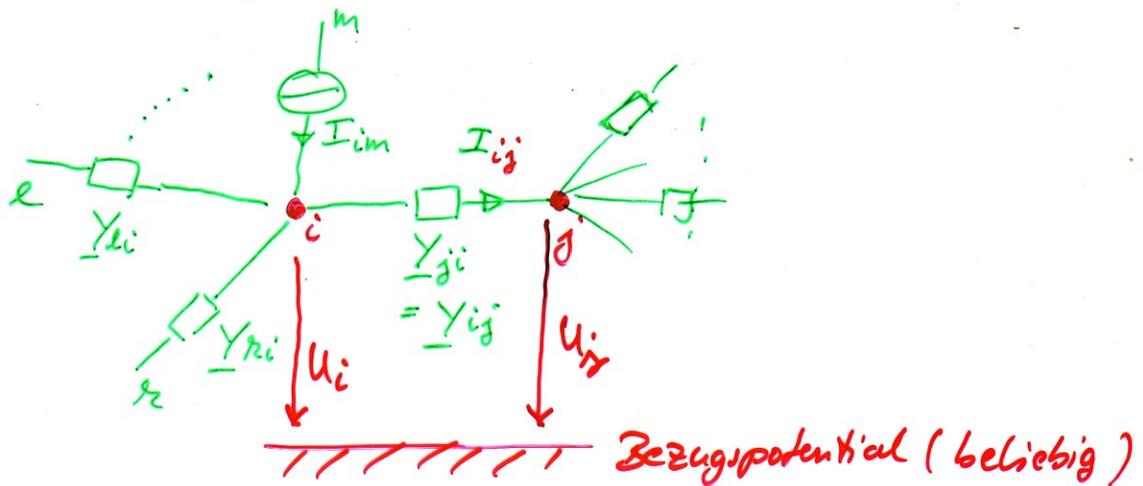


# Vorüberlegungen zur Knotenspannungsanalyse

Betrachte allgemeinen Knoten  $i$



$$\begin{array}{l}
 \text{Strom von } i \rightarrow j : I_{ij} = (u_i - u_j) Y_{ij} \\
 \text{Strom von } i \rightarrow l : I_{il} = (u_i - u_l) Y_{il} \\
 \vdots \\
 \text{Strom von } i \rightarrow q : I_{iq} = (u_i - u_q) Y_{iq} \\
 \text{Stromquelle mit Strom in Knoten } i : -I_{im}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{alle Zweige an} \\ \text{Knoten } i \\ \text{ohne Stromquellen} \end{array}$$
  

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{alle Stromquellen} \\ \text{mit Strom in} \\ \text{Knoten } i \end{array}$$

---

Summe aller Ströme  
in Knoten  $i$  = 0 (Kirchhoff)

$$\Rightarrow u_i \underbrace{(Y_{ij} + Y_{il} + \dots + Y_{iq})}_{\Sigma \text{ Admittanzen an Knoten } i} - \underbrace{u_j Y_{ij} - u_l Y_{il} - \dots - u_q Y_{iq}}_{\text{Koppeladmittanz} \cdot \text{Hauptspannung des jeweiligen Knotens}} = \underbrace{I_{im}}_{\Sigma \text{ Eingangsstrom in } i}$$

Betrachte gesamtes Netzwerk :  $N = k - 1$  Gleichungen  
 $\uparrow$   
 Anzahl der Knoten

$\Rightarrow$  Gleichungssystem,  $N \times N$  Matrix

$\Rightarrow$  Maschenstromverfahren:  $2 - k + 1$  Gleichungen

### 3 Einige Eigenschaften linearer Netzwerke

**Voraussetzungen:** Lineare oder linearisierte Netzwerke (Kleinsignal), komplexe (Phasoren) Schreibweise oder Augenblickswerte, stationärer Zustand, *(Phasoren nicht zeitabhängig)* sin-förmige Quellen gleicher Frequenz.

**Knotenspannungsanalyse:** Anzahl K Knoten, keine idealen Übertrager und Spannungsquellen,  $N=K-1$  unabhängige Knotengleichungen des zusammenhängenden Graphen.

Es gilt dann für alle Netzwerke:

$$[\mathbf{Y}] [\mathbf{U}] = [\mathbf{I}] \quad (32)$$

oder

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \dots \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \dots \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Knoten 1} \\ \text{Knoten 2} \\ \text{Knoten 3} \\ \vdots \end{matrix} \quad (33)$$

**Aufbau des Gleichungssystems:**

- **[Y] Hauptdiagonale:** Summe aller Admittanzen, die den jeweiligen Knoten mit allen anderen verbinden. Positives Vorzeichen. Ausnahme: Gekoppelte Induktivitäten.
- **[Y] Koppeladmittanzen:**  $Y_{ik}$  verbindet Knoten i mit Knoten k. Immer negatives Vorzeichen.
- **[U] Knotenpotentiale:**  $U_i$  ist die Spannung zwischen Knoten i und dem Bezugsknoten. Richtung von  $U_i$  weist immer auf Bezugsknoten.
- **[I] Urstromquelle:** Unabhängige Stromquellen, die in den jeweiligen Knoten einspeisen. Positives Vorzeichen, wenn Quellenstrom in den Knoten hineinfließt.

**Sonderfall:** Netzwerk enthält nur RLCM Elemente:  $[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}]^T$  d.h. Knotenadmittanzmatrix  $[\mathbf{Y}]$  ist symmetrisch ( $Y_{ij} = Y_{ji}$ ).

*RLCM: passive Ein-Port-Elemente: Admittanz hat gleiches Verhalten in beiden Stromrichtungen*



$$I_{ij} = (U_i - U_j) Y \Rightarrow \text{Koppeladmittanz} = -Y$$



$$I_{ji} = (U_j - U_i) Y \Rightarrow \text{Koppeladmittanz} = -Y$$

Für Experten: Satz v. Tellegen:  $\sum_{\text{Quellzweige}} (U_2' I_2'' - U_2'' I_2') = 0$

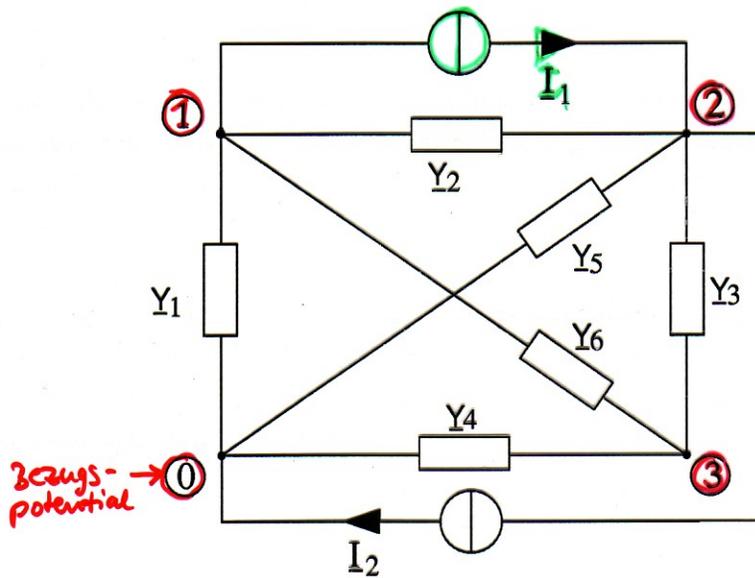
Zustände 'und': a) unterschiedliche Ströme und Spannungen v. Quellen  
 b) um unterschiedliche Werte v. Elementen  
 c) verschiedene Zeitpunkte

### 3 EINIGE EIGENSCHAFTEN LINEARER NETZWERKE

**Anschauliche Begründung:** Zwischen dem Knoten i und j ist die gleiche Admittanz wie zwischen dem Knoten j und i. (Admittanz hat die gleiche Eigenschaft in beiden 'Richtungen', da sie nicht die Richtung unterscheiden kann).

**Folgerung:** Netzwerke aus RLCM Elementen (auch ideale Übertrager) sind reziprok. D.h. der Ort von Wirkung und Ursache kann ausgetauscht werden, ohne dass sich das Verhältnis von Ursache und Wirkung ändert, (Beweis durch Satz von Tellegen).

Beispiel:

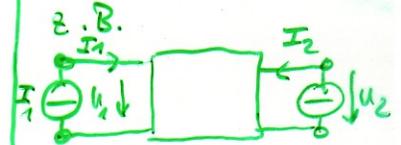


RLCM-Netzwerke

↓  
symmetr. [Y]

↓  
**Reziprozität**

(Übertragungssymmetrie)



$$\frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

Abb. 8: Beispiel eines linearen Netzwerkes.

Aus den Knotengleichungen für die unabhängigen Knoten (hier 1-3 gewählt) folgt unmittelbar nach Umstellen  $[Y][U] = [I]$ :

$$\begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_6 & -Y_2 & -Y_6 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + Y_5 & -Y_3 \\ -Y_6 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1 \\ I_1 - I_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

⇒ [Y] ist symmetrisch, reziprok.

↓

10

nicht mehr erfüllt bei gesteuerten Quellen

Cz.B.  $I_1 = S(U_3 - U_1)$

Gesteuerte Quellen (z.B. Transistor - ESB): Beispiel  $I_1 = S(u_3 - u_1)$

$$[Y][u] = \begin{pmatrix} -I_1 \\ I_1 - I_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S(u_3 - u_1) \\ S(u_3 - u_1) - I_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 3 EINIGE EIGENSCHAFTEN LINEARER NETZWERKE

Wird  $I_1$  durch eine gesteuerte Quelle ersetzt; z.B.:  $I_1 = S(u_3 - u_1)$  so verschwindet  $I_1$  auf der rechten Seite des Gleichungssystems und die Beiträge der Steuer-Verstärkung (hier Steilheit  $S$  oder  $g_m$ ) werden mit dem entsprechenden Vorzeichen in die Knotenadmittanzmatrix eingetragen:

$$[Y'] = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_6 + S & -Y_2 & -Y_6 - S \\ -Y_2 - S & Y_2 + Y_3 + Y_5 & -Y_3 + S \\ -Y_6 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_6 \end{pmatrix} \quad (35)$$

↓ von  $u_1$       ↓ von  $u_3$

$$[Y'] = [Y] + \begin{pmatrix} +S & 0 & -S \\ -S & 0 & +S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Symmetrisch + unsymm.  $\downarrow$

D.h. zu der symmetrischen Matrix  $[Y]$  wird eine unsymmetrische Matrix  $[Y']$  addiert. Daraus folgt, dass die Gesamtschaltung unsymmetrisch ist und nicht mehr reziprok!

↓  
nicht mehr reziprok

Die Lösung des Gleichungssystems<sup>1</sup>  $[Y][u] = [I]$  kann bei kleineren Gleichungssystemen mit Hilfe der Cramerschen Regel erfolgen:

$$u_i = \frac{\text{Det}([Y_1] [Y_2] \dots [Y_{(i-1)}] [I] [Y_{(i+1)}] \dots [Y_N])}{\text{Det}([Y])}$$

↓ Spalte  $i$

Lösen z.B. mit CRAMERSCHER Regel

Darin sind  $[Y_n]$  ( $n=1\dots N$ ) die Vektoren der Spalten  $n$  der Knotenadmittanzmatrix,  $[I]$  ist der Vektor der eingepprägten Urströme,  $\text{Det}()$  bezeichnet die Determinante der Matrix in Klammern. Die Determinante der Zählers kann nach der  $i$ -ten Spalte entwickelt werden (Laplacescher Entwicklungssatz):

$$u_i = \frac{\sum_{n=1}^N D_{ni} I_n}{\text{Det}([Y])} \quad (38)$$

↓  
Berechne Zählerdeterminante mit Laplace'schem Entwicklungssatz

mit  $D_{ni}$ : Adjunkte 1. Ordnung.  $D_{ni} = (-1)^{n+i}$ , Determinante der Untermatrix von  $[Y]$  durch Streichen der  $i$ -ten Spalte und der  $n$ -ten Zeile.

↓  
Entwickle nach Strömen der Spalte  $i$

<sup>1</sup>Das inhomogene Gleichungssystem  $[Y][u] = [I]$  ist genau dann für jede rechte Seite  $[I]$  eindeutig lösbar, wenn die Knotenadmittanzmatrix  $[Y]$  regulär ist. (Zeilenzahl  $[Y] =$  Spaltenzahl  $[Y] \Leftrightarrow [Y]$  ist quadratisch). Anschaulich lässt sich dies dadurch erklären, dass für jeden  $N$ -dimensionalen Vektor  $u$  eine Lineartransformation durch  $Y$  existiert, die  $u$  auf  $I$  abbildet.

$$u_i = \frac{D_{1i}}{\Delta} I_1 + \frac{D_{2i}}{\Delta} I_2 + \dots$$

Ist d. Beweis für Überlagerungssatz  
( $I_n$ : Quellströme (Ursachen),  $u_i$ : Wirkung)

Allgemein bei  $N$  Quellen  $I_1, \dots, I_N$ : 
$$U_i = \frac{D_{i1}}{\Delta} I_1 + \frac{D_{i2}}{\Delta} I_2 + \dots + \frac{D_{in}}{\Delta} I_n + \dots + \frac{D_{iN}}{\Delta} I_N$$

### 3.1 Wirkungsfunktion EINIGE EIGENSCHAFTEN LINEARER NETZWERKE

nur eine Quelle  $I_n$

Anschaulich: Die Spannung am Knoten  $i$  ergibt sich aus der Überlagerung (Summe) der Wirkung der einzelnen Quellenströme  $I_n$  in die  $N$  unabhängigen Knoten.

#### 3.1 Wirkungsfunktion



Betrachte jeweils nur die Wirkung einer Quelle (Ursache)  
↳ z.B. Knotenspannung

Betrachtet man die Wirkung von nur einer Quelle ( $I_n = I$ ) auf nur einen Knoten ( $U_i = U$ ), dann sind nach Gl. (38) alle Spannungen und Ströme, die in der Schaltung auftreten, dem Strom dieser Quelle proportional:

Wirkung  $\rightarrow U_i = \frac{D_{ni}}{\text{Det}([Y])} I_n = Z_{ni} \cdot I = H I$  (39)

Ursache (Quelle)

allgemeine Proportionalitätskonstante:

$n$  und  $i$  sind entsprechend der Wahl zu belegen. Die Spannung  $U$  beschreibt hier die Wirkung, die eine Ursache (Quellenstrom  $I$ ) hervorruft. Die dabei auftretende allgemeine Proportionalitätskonstante  $H$  (hier speziell  $Z$ ) wird Wirkungs- oder Systemfunktion genannt. Analog der hier gezeigten Herleitung für eine Impedanz-Wirkungsfunktion lassen sich ebenso Wirkungsfunktionen:

WIRKUNGS-FUNKTION

$$H = \frac{I}{U}; H = \frac{I_2}{I_1}; H = \frac{U_2}{U_1}$$

Beispiele von Wirkungsfunktionen  
(40)  
z.B. alle Zweipol- oder Vierpolparameter

mit den gleichen Eigenschaften herleiten:

**WIRKUNGSFUNKTION =  $\frac{\text{WIRKUNG}}{\text{URSACHE}}$**  (41)

Die Wirkungsfunktionen gehen immer durch Determinanten-Bildung aus der Koeffizientenmatrix (hier: Knotenadmittanzmatrix) hervor. Jedes Element der Determinanten hat die Form:  $G + (sC) + (\frac{1}{sL})$  mit  $s = \sigma + j\omega$ . Die Determinante besteht also aus Produkten solcher Terme. Negative Potenzen von  $H$  in  $s$  können immer durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit  $s$  in einer geeignet hohen Potenz eliminiert werden. Damit läßt sich für die Wirkungsfunktion allgemein schreiben:

Struktur von Wirkungs-fkt.

allgemeine Struktur

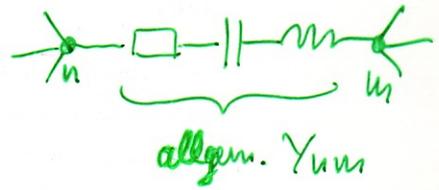
$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}$$
 (42)

Jedes Elem.

$$Y_{nn} = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

Da ein Polynom  $n$ -ter Ordnung genau  $n$ -Wurzeln hat, können die Zähler- und Nennerpolynome der Wirkungsfunktion in Faktoren zerlegt werden:

$$s = \sigma + j\omega$$
  
(kommt später)  
komplexe Frequenz



allgem.  $Y_{nn}$   
Det.-Bildung: +, -,  $\dots$ ,  $\div$  Operationen  
⇒ Rationale Fkt., reell in  $s$

### 3.2 Verlustleistung von n-Polen

$$H(s) = H_0 \frac{(s - s_{n1})(s - s_{n2}) \dots (s - s_{nm})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pn})} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_{ni})}{\prod_{j=1}^n (s - s_{pj})} \quad (43)$$

Produkt Darstellung der Wirkungsfkt.  
 $s_{ni}, s_{pj}$   
 Nullstellen, Pole

Gl. (43) nennt man Produktdarstellung der Wirkungsfunktion.

Für physikalische Systeme gilt:  $m \leq n$ ;  $H(s)$  reell und rational in  $s$ . Darin sind:

der Wirkungsfkt.

- $s_{ni}$  ( $i = 1 \dots m$ ) die Nullstellen des Zählerpolynoms
- $s_{pi}$  ( $i = 1 \dots n$ ) die Nullstellen des Nennerpolynoms, bzw. die Pole der Wirkungsfunktion

↓  
 Physikalische Systeme:

Grad (Zählerpol.)  
 $\leq$  Grad (Nennerpol.)

unter der Voraussetzung, dass  $H(s)$  irreduzibel ist, d.h. dass keines der  $s_{ni}$  gleich einem der  $s_{pi}$  ist. In diesem Fall bezeichnet man die größere der beiden Zahlen  $m, n$  als den Grad von  $H(s)$ .

Wichtig: Die Wirkungsfunktion einer linearen Schaltung ist von hoher Bedeutung. Sie beschreibt das System bezüglich der Wirkung auf eine gewählte Anregung (Ursache) vollständig. Bekanntestes Beispiels von Wirkungsfunktionen sind die Vierpolparameter (genauer: Zweitor) der verschiedenen Matrizen ( $[Y]$ ,  $[Z]$ ,  $[H]$ ,  $[G]$ ). Anhand der Herleitung lässt sich einfach erkennen, dass alle Wirkungsfunktionen einer Schaltung die Determinante ihrer Koeffizientenmatrix als Nennerpolynom haben. Die Pole aller Wirkungsfunktionen einer Schaltung sind damit identisch. Hierauf wird bei der Analyse der Stabilität zurückgegriffen.

Alle Wirkungsfunktionen einer Schaltung haben d. gleichen Nenner (Det.)

"Stabilität hängt nicht v.d. unabhängigen Quellen ab"

Die Pole aller Wirkungsfkt. eines Netzwerks (gleiche Topologie) sind identisch

### 3.2 Verlustleistung von n-Polen

später, jetzt erst Bode Diagramm

Wegen des Satzes über die Erhaltung der Energie ist die gesamte Energie in einem abgeschlossenen System gleich Null. In einem beliebigen Netzwerk mit  $Z$  Zweigen gilt daher (im Zeit- und Frequenzbereich):

↑ ↑  
 Wichtig für Stabilitätsanalyse

$$0 = \sum_{z=1}^Z u_z i_z = \sum_{z=1}^Z P_z = \sum_{z=1}^Z (P_{Qz} + P_{Vz}) \quad (44)$$

Darin ist  $u_z$  die Spannung über einen Zweig,  $i_z$  der Strom in dem Zweig.  $P_z$  ist die Verlustleistung des Zweiges. Sie setzt sich zusammen aus der Leistung einer sich u.U. in dem Zweig befindenden Quelle  $P_{Qz}$  (Verlustleistung

Pole in der LHE (stabil) :  $1 + \frac{j\omega}{\omega_g} \rightarrow 1 + \frac{s}{\omega_g} = 0$   
 $s = -\omega_g$

Operationsverstärkers angeben. ( $C_K$  bleibt zunächst unberücksichtigt):

$$\underline{F_a}(j\omega) = \frac{F_{a0}}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g1}})(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g2}})(1 + \frac{j\omega}{\omega_{g3}})} \quad (659)$$

$f_{g1} = 10 \text{ KHz}$   
 $f_{g2} = 100 \text{ KHz}$   
 $f_{g3} = 1 \text{ MHz}$

Der Nenner dieser Wirkungsfunktion mit  $s = j\omega$  konnte aufgrund der vereinfachten Annahme entkoppelter Tiefpässe direkt in der für die nachfolgenden Überlegungen praktischen Produktform angegeben werden. Weiterhin enthält  $\underline{F_a}(j\omega)$  die Aussage, daß nur Pole in der linken Halbebene vorhanden sind, der Operationsverstärker also stabil ist.

### 23.3 Das Bode-Diagramm

WICHTIG!

Anhand von Gl. (659) sehen wir, daß der aus der Übertragungsfunktion der Differenz-Spannungsverstärkung für  $s = j\omega$  hervorgehende Frequenzgang  $\underline{F_a}(j\omega)$  eine frequenzabhängige Phasendrehung hervorruft. Eine Rückkopplung des Verstärkers, die bei tiefen Frequenzen als Gegenkopplung wirkt, kann dadurch mit steigender Frequenz zur Mitkopplung werden, wodurch der Verstärker instabil wird.

Zur Untersuchung der Stabilität des rückgekoppelten Operationsverstärkers eignet sich hervorragend das Nyquist-Kriterium in der Frequenzkennliniendarstellung (vgl. Kap. 16.9). Für die Frequenzkennliniendarstellung wird in der Regel das Bode-Diagramm verwendet. Es erlaubt die Konstruktion des Amplituden- und Phasengangs aus der Produktdarstellung der Übertragungsfunktion unter vereinfachenden, aber für praktische Überlegungen hinreichend genauen Annahmen.

Komplexe Frequenz  
 $s = \sigma + j\omega$   
 (später)

Wir leiten die Konstruktion des Bode-Diagrammes anhand einer allgemeinen Wirkungsfunktion her:

$$H(s) = H_0 \frac{(s-s_{n1}) \dots (s-s_{nN})}{(s-s_{p1}) \dots (s-s_{pJ})} = \underline{F_a}(s) = F_{a0} \frac{(1 + \frac{s}{s_{Z1}})(1 + \frac{s}{s_{Z2}}) \dots (1 + \frac{s}{s_{ZI}})}{(1 + \frac{s}{s_{N1}})(1 + \frac{s}{s_{N2}}) \dots (1 + \frac{s}{s_{NJ}})}$$

Allgemeine Wirk.fkt. in (660) alternativer Produktdarstellung.

Wir nehmen dabei an, daß wie im zuvor behandelten Fall, nur (Hoch- und) Tiefpaßterme erster Ordnung die Wirkungsfunktion bestimmen. Daher sind alle  $s_{Zn}$  und  $s_{Nn}$  positiv und reell und wir schreiben im folgenden für  $s_{Zn}$ ,  $s_{Nn} \rightarrow \omega_{Zn}, \omega_{Nn}$ <sup>47</sup>. Daher besitzt  $\underline{F_a}(s)$  keine Pole in der rechten Halbebene

HP/TP - Terme erster Ordnung:  
 $\Rightarrow s_{Zn}, s_{Nn}$  pos. + reell  
 $\Downarrow$  Bspl.

<sup>47</sup>Für den in der Regel vorliegenden RC-Tiefpaß ergibt sich z. B. der Produktterm  $(1 + \frac{s}{s_n}) = (1 + \frac{j\omega}{\omega_n}) = (1 + j\omega RC)$  mit  $RC = \tau_n = \frac{1}{\omega_n}$ .

Bspl:



$$\underline{H} = \underline{Z} = \frac{U}{I} = \frac{R}{1 + sRC} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Pol bei  $s = -\omega_0$

Übertragungsfunktion:  $S = \bar{b} + j\omega$   
(Wirkungsfunktion)

Frequenzgang:  $S = j\omega$

und ist daher stabil.

Der Frequenzgang ergibt sich aus der Wirkungsfunktion für  $s = j\omega$

$$\underline{F}_a(j\omega) = F_{a0} \frac{(1 + \frac{j\omega}{\omega_{Z1}})(1 + \frac{j\omega}{\omega_{Z2}}) \dots (1 + \frac{j\omega}{\omega_{ZI}})}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_{N1}})(1 + \frac{j\omega}{\omega_{N2}}) \dots (1 + \frac{j\omega}{\omega_{NJ}})}$$

**FREQUENZGANG**  
(661)  
(in Produktdarstellung)

Mit der Identität

$$\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_n}\right) = \left|1 + \frac{j\omega}{\omega_n}\right| e^{j \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} = \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{j\varphi_n}$$

ein Produktterm  
(662) in  
Euler-Schreibweise

läßt sich Gl. (661) umformen

$$\underline{F}_a(j\omega) = F_{a0} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Z1}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \dots \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{ZI}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \dots$$

$$\dots \cdot \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{N1}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{N2}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \dots \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{NJ}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \dots$$

$$\dots \cdot e^{j(\varphi_{Z1} + \varphi_{Z2} + \dots + \varphi_{ZI} - \varphi_{N1} - \varphi_{N2} - \dots - \varphi_{NJ})}$$

Beträge

Phasen

Im Bode-Diagramm wird der Betrag von  $\underline{F}_a(j\omega)$  in Dezibel (dB) dargestellt. Ein Dezibel ist als Logarithmus des Verhältnisses zweier Leistungen definiert:

**Def:**

$$a_{dB} \left(\frac{P_1}{P_2}\right) = 10 \log \left|\frac{P_1}{P_2}\right|$$

**Dezibel** (664)

bezieht sich auf Leistungen

- - Zeichen für Nenn-Terme

Für die Umrechnung in Spannungsverhältnisse gilt mit einem Bezugswiderstand  $R_0$  (in der HF-Technik meist der Wellenwiderstand):

$$a_{dB} \left(\frac{P_1}{P_2}\right) = 10 \log \left|\frac{P_1}{P_2}\right| = 10 \log \left|\frac{U_1^2 R_0}{R_0 U_2^2}\right| = 20 \log \left|\frac{U_1}{U_2}\right|$$

$R_0$ : Bezugswiderstand

(665)

Spannung, istem:  $2 \cdot 10 = 20$

Der Betrag des Frequenzgangs der Spannungsübertragungsfunktion in Dezibel ist daher

$$a_{dB}(\underline{F}_a(j\omega)) = 20 \log |F_{a0}| + 20 \sum_{i=1}^I \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{zi}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - 20 \sum_{j=1}^J \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{nj}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vorfaktor

Zählerterme

Nennerterme

(666)

Für den Betrags-Frequenzgang im Bodediagramm wird, wie in Abb. 178 gezeigt, jeder log-Term durch eine Geradenapproximation  $A_{\omega_n}(\omega)$  angenähert:

$$20 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx A_{\omega_n}(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{für } \omega < \omega_n \\ 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) & \text{für } \omega \geq \omega_n \end{cases}$$

**Bode-Näherungen**

**MERKEN:**

dB	0	1	3	6	20	$\Sigma$ dB
U/I Verhältnis	1	1,1	$\sqrt{2}$	2	10	$\Pi$ Verhältnisse

Bspl:  $13 \text{ dB} = 6 + 6 + 1 \text{ dB}$   
 $\downarrow$   
 $2 \cdot 2 \cdot 1,1 \approx 4,4$

Bspl:

Tiefpaßterm (Betrag):

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Nj}}\right)^2}$$

↓ in dB

$$20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Nj}}\right)^2} = a_{dB} \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Nj}}\right)$$

↓ Näherung (Bode Diagramm)

0 für  $\omega < \omega_{Nj}$   
 $-20 \log \frac{\omega}{\omega_{Nj}}$  für  $\omega > \omega_{Nj}$

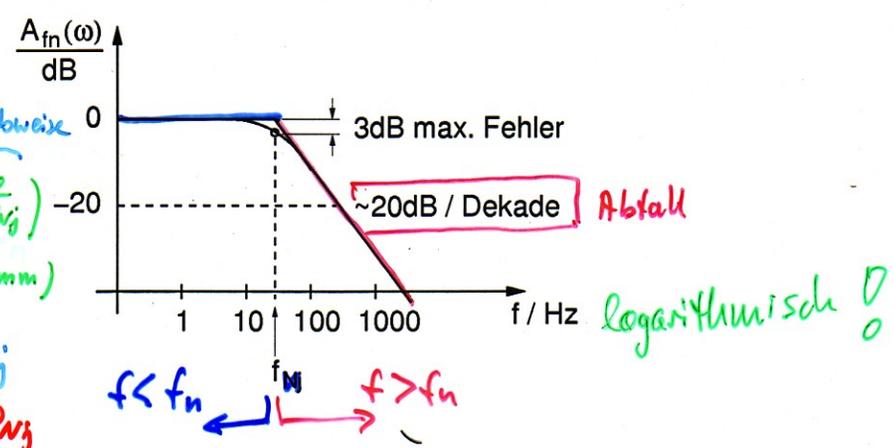


Abb. 178: Beispiel für eine Geradenapproximation im Bodediagramm für den Betragsverlauf eines einpoligen Tiefpasses mit der Grenzfrequenz  $f_n$ .

Der maximale Fehler entsteht dabei an der Stelle  $\omega = \omega_n$  und beträgt Fehlerabschätzung

$$20(\log 1 - \log \sqrt{2}) = -20 \log \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB.} \quad \hat{=} \text{ ca. } 40\% \text{ viel?}$$

zeige, daß verläuft eine fallende Gerade

Wenn nötig, kann dieser Fehler zur Erhöhung der Genauigkeit in der Geradenapproximation mit berücksichtigt werden.

Beispiel: Für einen Tiefpaßterm  $\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Nj}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$  ergibt sich die Geraden-Approximation für  $\omega \geq \omega_{Nj}$ :

$$A_{\omega_{Nj}}(\omega) = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_{Nj}}\right)$$

$$A_{\omega_{Nj}}(\omega) = 20 \left(\log \frac{\omega_{Nj}}{1 \text{ Hz}} - \log \frac{\omega}{1 \text{ Hz}}\right) := 20 (\log \omega_{Nj} - \log \omega) \quad (669)$$

Normierung (kein log Hz)
Kurzschreibweise ohne Normierung

Geradengleichung:  
 $= a + m \cdot x$   
 Für Nenner-Term:  
 $a = 20 \cdot \log \omega_{Nj}$   
 $m = -20$

Wegen

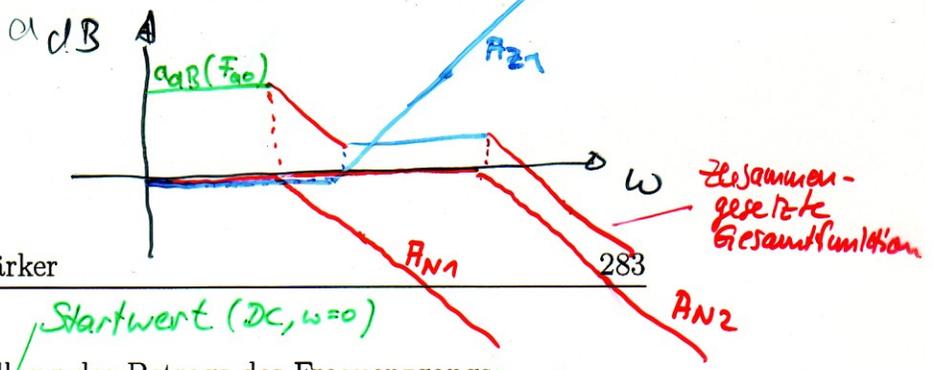
$$A_{\omega_{Nj}}(\omega) - A_{\omega_{Nj}}(10\omega) = 20 \log 10 = 20 \text{ dB} \quad (670)$$

fällt die Approximationsgerade für  $\omega \geq \omega_{Nj}$  mit 20 dB pro Dekade. Entsprechend steigt sie mit 20 dB pro Dekade für einen einpoligen Hochpaß-Term.

Mit der nach Gl. (667) definierten Geradenapproximation schreiben

$x = \log \omega$   
 ↓  
 log.-x Achse  
 ↓  
 Geraden

Bode-Diagramm: 1) log. Frequenzachse (x)  
 2) dB auf y-Achse  
 3) Geradenapprox. des Frequenzgangs



Kapitel 23: Operationsverstärker

wir allgemein für die Darstellung des Betrags des Frequenzgangs

$$a_{dB}(F_a(j\omega)) = 20 \log |F_{a0}| + \sum_{i=1}^I A_{\omega_{z_i}}(\omega) - \sum_{j=1}^J A_{\omega_{n_j}}(\omega) \quad (671)$$

Tiefpaßterme (Nenner)

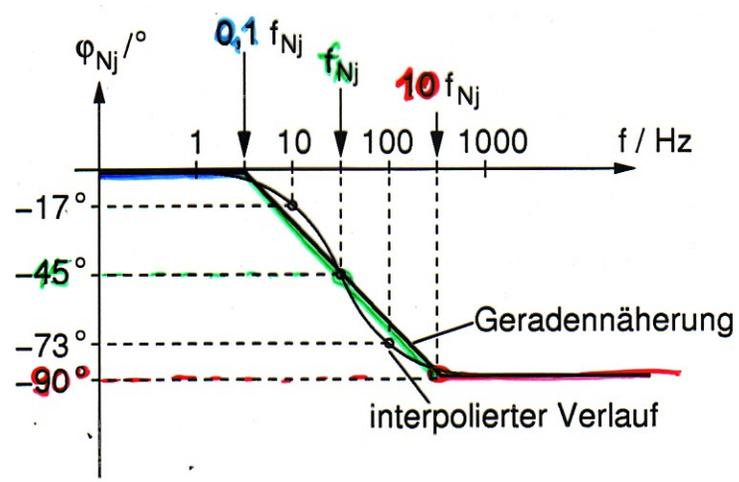
Anstelle von  $\omega$  wird häufig auch direkt die Frequenz verwendet, so dass Gl. (671) lautet

$$a_{dB}(F_a(f)) = 20 \log |F_{a0}| + \sum_{i=1}^I A_{f_{z_i}}(f) - \sum_{j=1}^J A_{f_{n_j}}(f) \quad (672)$$

Für die Phase von  $F_a(j\omega)$  gilt nach Gl. (663) mit Gl. (662) die Approximation:

$$\arctan \frac{\omega}{\omega_n} = \phi_{\omega_n} = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \omega < \omega_n/10, \\ (1 + \log \frac{\omega}{\omega_n}) 45^\circ & \text{für } \omega_n/10 \leq \omega \leq 10 \omega_n, \\ 90^\circ & \text{für } \omega > 10 \omega_n. \end{cases} \quad (673)$$

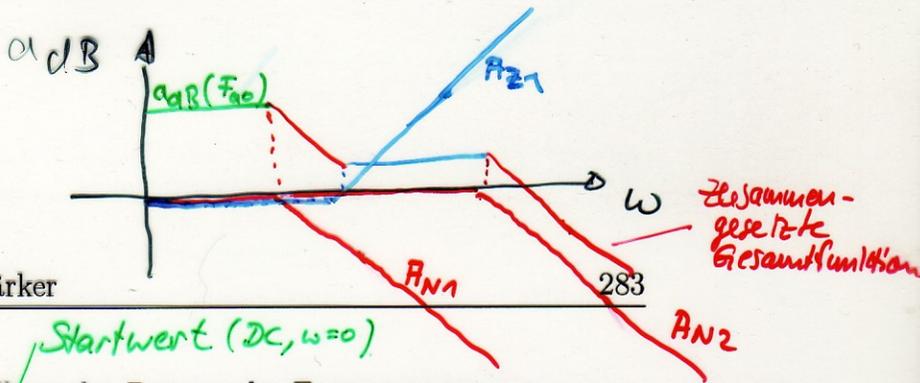
Bode-Näherungen für Phase



Bspl. für Phasengang 1-pol. TP

Abb. 179: Geradennäherung für den Phasengang eines einpoligen Tiefpaßterms. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann der reale Verlauf durch bekannte Werte z. B. nach Tab. 6 interpoliert werden.

Bei höheren Anforderungen an die Genauigkeit können die Bereiche um  $\frac{\omega_n}{10}$  und  $10\omega_n$  durch zusätzliche Geradenabschnitte angenähert werden. Auch eine



wir allgemein für die Darstellung des Betrags des Frequenzgangs:

$$a_{dB}(\underline{F}_a(j\omega)) = 20 \log |F_{a0}| + \sum_{i=1}^I A_{fz_i}(\omega) - \sum_{j=1}^J A_{fn_j}(\omega) \quad (671)$$

*Tiefpaßterme (Nenner)*

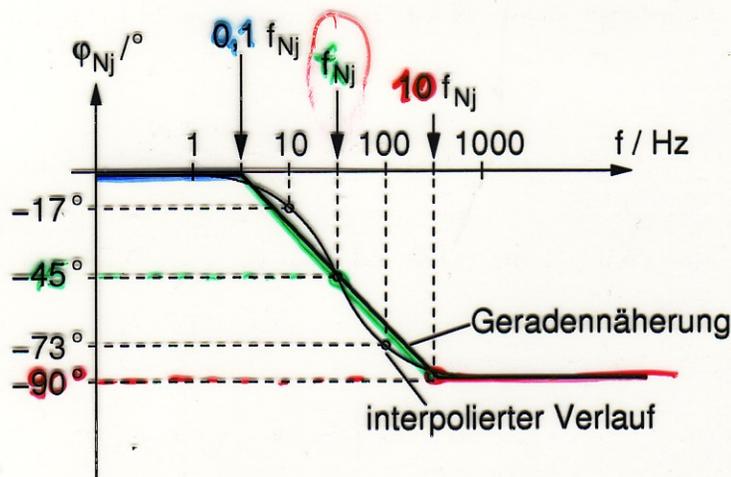
Anstelle von  $\omega$  wird häufig auch direkt die Frequenz verwendet, so dass Gl. (671) lautet

$$a_{dB}(\underline{F}_a(f)) = 20 \log |F_{a0}| + \sum_{i=1}^I A_{fz_i}(f) - \sum_{j=1}^J A_{fn_j}(f) \quad (672)$$

Für die Phase von  $\underline{F}_a(j\omega)$  gilt nach Gl. (663) mit Gl. (662) die Approximation:

$$\arctan \frac{\omega}{\omega_n} = \phi_{\omega_n} = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \omega < \omega_n/10, \\ (1 + \log \frac{\omega}{\omega_n}) 45^\circ & \text{für } \omega_n/10 \leq \omega \leq 10 \omega_n, \\ 90^\circ & \text{für } \omega > 10 \omega_n. \end{cases} \quad (673)$$

*Bode-Näherungen für Phase*



*Bspl. für Phasengang 1-pol. TP*

Abb. 179: Geradennäherung für den Phasengang eines einpoligen Tiefpassterms. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann der reale Verlauf durch bekannte Werte z. B. nach Tab. 6 interpoliert werden.

Bei höheren Anforderungen an die Genauigkeit können die Bereiche um  $\frac{\omega_n}{10}$  und  $10\omega_n$  durch zusätzliche Geradenabschnitte angenähert werden. Auch eine

### 3.2 Verlustleistung in linearen Netzwerken

negativ) und der Verlustleistung  $P_{Vz}$  der Verbraucher in dem Zweig.

Gedankenexperiment: Alle Urquellen des Netzwerkes sollten als Stromquellen vorliegen (Vorgehen zur Umwandlung von Spannungsquellen wie bei der Knotenspannungsanalyse). Sämtlich Urquellen des Netzwerkes werden (unter Beibehaltung von Topologie und Werten) in einen eigenen N-Pol gelegt, das restliche Netzwerk befindet sich in einem zweiten N-Pol (vgl. Abb. 9). Es gilt dann für die Verlustleistung des Urquellen n-Pols:

$$P_Q = \sum_{\nu=1}^k P_{Q\nu} \quad (45)$$

mit  $k$  = Anzahl aller Urquellen.

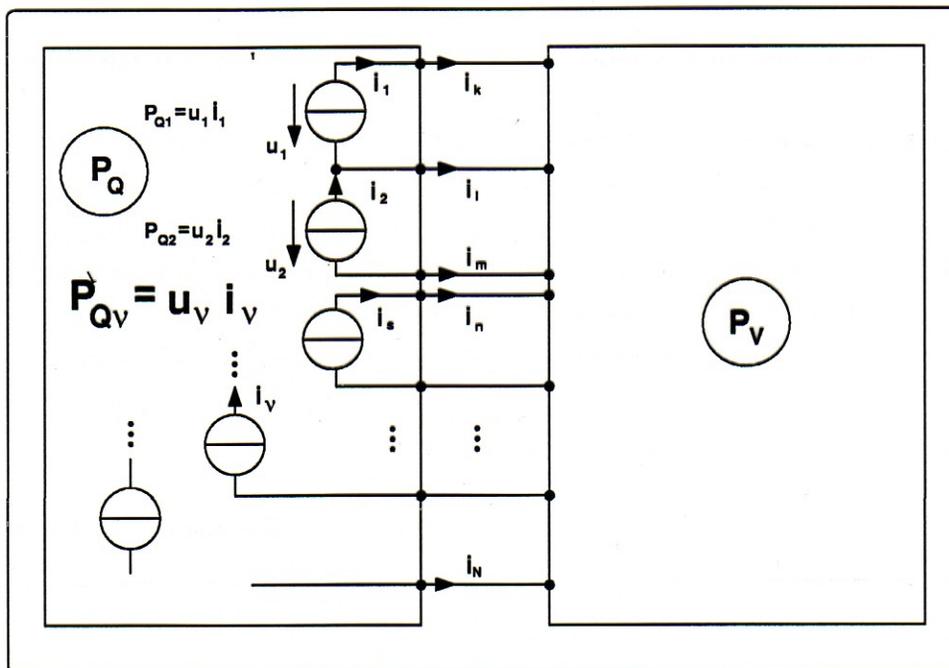


Abb. 9: Aufspaltung eines linearen Netzwerkes in ein Quellen- und ein Verbraucher N-Tor.

Abbildung (9) zeigt ein abgeschlossenes System, mit  $N$  Verbindungsknoten, in dem gilt:  $\sum P = 0$ .

### 3.2 Verlustleistung in nicht-linearen linearen Netzwerken

Jede Stromquelle lässt sich identisch in zwei, gegen ein beliebig wählbares Potential  $\phi_\nu$  strömende Stromquellen umwandeln:

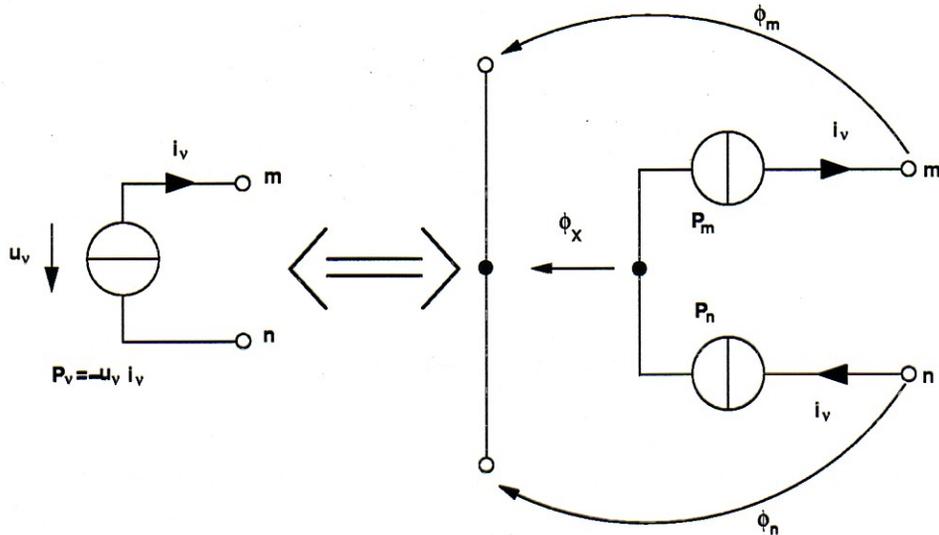


Abb. 10: Umwandlung einer potentialungebundenen ('floating') Quelle in zwei Quellen mit Potentialbezug  $\phi_\nu$ .

In Abbildung (10) gelten folgende Beziehungen:

$$P_\nu = P_m + P_n \quad (46)$$

$$= -(\phi_m - \phi_x) i_\nu - (\phi_x - \phi_n) i_\nu \quad (47)$$

$$P_\nu = -(\phi_m - \phi_n) i_\nu \quad (48)$$

D.h. die Leistung der Quelle ist unabhängig von der Wahl von  $\phi_x$ . Damit können sämtliche Quellen des linken n-Pols identisch in die Darstellung mit Potentialbezug umgezeichnet werden.

### 3.2 Verlustleistungseigenschaften LINEARER NETZWERKE

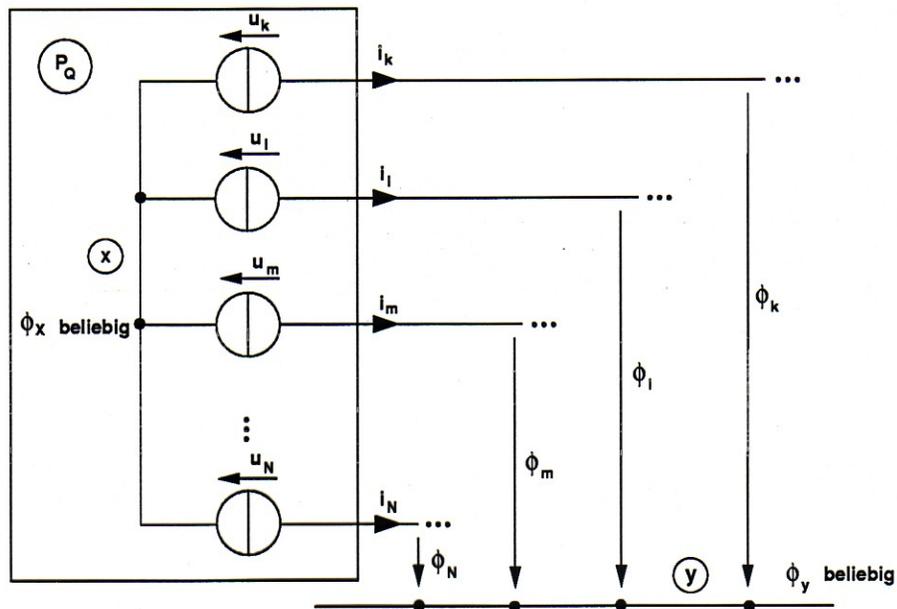


Abb. 11: Umgewandelter Quellen-N-Pol mit Bezugspotential  $\phi_x$ .

Die in dem Urquell N-Pol erzeugte Leistung ist die Summe der Leistungen der N einzelnen Quellen.

$$P_Q = - \sum_{\nu=1}^N u_\nu i_\nu$$

Da  $\sum_{\nu=1}^N I_\nu = 0$  (Überknoten) kann  $\phi_x$  beliebig gewählt werden. Wird  $\phi_x = \phi_y$  gewählt, ergibt sich:

$$P_Q = - \sum_{\nu} \phi_\nu i_\nu \quad (49)$$

als die Summe der abgegebenen Leistung. Darin sind die  $\phi_\nu$  die Knotenpotentiale des Netzwerkdes an den Knoten, an denen Stromquellen angeschlossen sind. Wegen  $P_V + P_Q = 0$  ist damit die Verlustleistung des passiven N-Pols:

$$= -P_Q \quad (50)$$

$$P_V = \sum_{\nu=1}^N \phi_\nu i_\nu \quad (51)$$