

Bei Dotierung mit N_A Akzeptoren und N_D Donatoren sind N_A Zustände bei W_D vorhanden

2.7 Ladungsträgerdichten von Dotierungen

Ist der Halbleiter dotiert, so geben wir die Dichte der für die Dotierung verwandten Akzeptoren mit N_A und die Dichte der Donatoren mit N_D an. Wir hatten diese Volumendichten zur besseren Unterscheidung auch als spezifische Anzahl bezeichnet.

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass alle Donator-Energie-Niveaus innerhalb eines infinitesimalen Energiebereichs dW angesiedelt sind. Das gleiche nehmen wir für die Akzeptor-Niveaus an. Es existiert dann eine spezifische Anzahl (Dichte) von N_A bzw. N_D Zuständen innerhalb eines Bereichs dW .

Die Zustandsdichte auf den beiden Dotierungs-Niveaus ist also

$$D_A(W) = \frac{N_A}{dW} \text{ für } W = W_A \dots W_A + dW \quad (2.46)$$

und

$$D_D(W) = \frac{N_D}{dW} \text{ für } W = W_D \dots W_D + dW \quad (2.47)$$

Wir wollen wissen, wieviele Donatoren ionisiert sind. Die Dichte der ionisierten Donatoren N_D^+ ist identisch mit der Dichte der von den Donatoren an das Leitungsband abgegebenen Elektronen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Donatorzustand ionisiert, also nicht besetzt ist, ist nach Gl. (2.44) $(1 - f(W_D^*))$ ($= const.$). Die Dichte der ionisierten Donatoren lässt sich allgemein über das Integral von Zustandsdichte und Besetzungswahrscheinlichkeit bestimmen

$$N_D^+ = \int_{W_D}^{W_D+dW} D_D(W) (1 - f(W_D^*)) dW = N_D (1 - f(W_D^*))$$

Donatorzust. nicht besetzt (ionisiert)

Dichte der ionisierten Donatoren

Wir fragen nach der Dichte N_A^- der ionisierten Akzeptoren. Ein Akzeptor ist dann ionisiert, wenn sich ein Elektron auf dem Akzeptor-Niveau befindet, es also besetzt ist. Mit der Besetzungswahrscheinlichkeit $f(W_A^*)$ ($= const.$) ergibt sich für die Dichte der ionisierten Akzeptoren

$$N_A^- = \int_{W_A}^{W_A+dW} D_A(W) f(W_A^*) dW = N_A f(W_A^*) \quad (2.49)$$

Akzeptorzustand besetzt (ionisiert)

Dichte der ionisierten Akzeptoren

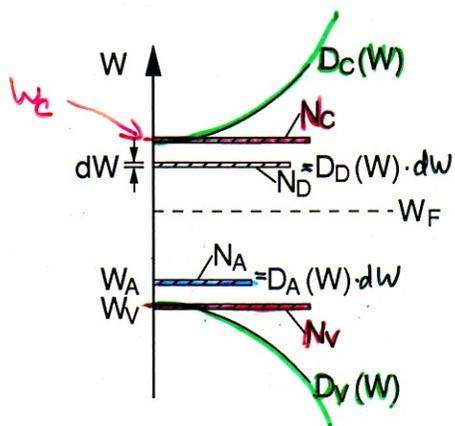
Es ergeben sich also ganz ähnliche Ausdrücke der Form „effektive Zustandsdichte (N_A, N_D, N_C, N_V) mal Wahrscheinlichkeit“, wie schon bei der allge-

Annahme: alle Zustände in einem Bereich dW

Zustandsdichten der Dotierungs-Niveaus

$$N_D^+ = \int_{w_D}^{w_D+dW} D_D(w) (1-f(w_D^*)) dw = N_D (1-f(w_D^*))$$

$$N_A^- = \int_{w_A}^{w_A+dW} D_A(w) f(w_A^*) dw = N_A f(w_A^*)$$



$$n_0 = \int_{LB} D_C(w) \cdot f(w) dw = N_C \cdot f(w_C) = N_C e^{-\frac{w_C - w_F}{kT}}$$

$$p_0 = \int_{VB} D_V(w) \cdot (1-f(w)) dw = N_V (1-f(w_V)) = N_V e^{-\frac{w_F - w_V}{kT}}$$

Abb. 2.9: Zusammenhang zwischen Zustandsdichten und Ladungsträgerdichten in Leitungs- und Valenzband sowie für ein Donator- und Akzeptor-Niveau.

meinen Berechnung der Ladungsträgerdichten in Leitungs- und Valenzband (vgl. Gl. (2.22) und (2.25)). Dies war zu erwarten, da durch die Einführung der effektiven Zustandsdichten in Gl. (2.22) und (2.25) sämtliche in den Bändern vorhandene Niveaus an den Bandkanten konzentriert wurden. Dies ist in Abb. 2.9 veranschaulicht.

2.8 Das Massenwirkungsgesetz

In Kapitel 2.2.3 wurden mit Gl. (2.22) und (2.25) zwei allgemeingültige Beziehungen zur Ermittlung der Ladungsträgerdichten n_0 und p_0 in Leitungs- und Valenzband hergeleitet. Sie gelten für alle Arten von Halbleitern, unabhängig davon, ob n -, p - oder i - (eigen) leitend. Die Unterscheidung des jeweiligen Leitungsmechanismus erfolgt einzig über die davon bestimmte Lage des Fermi-Niveaus.

Multipliziert man die beiden Gleichungen miteinander, so ergibt sich, wie bereits in Gl. (2.32) bei der Ermittlung der Eigenleitungsichte geschehen, das **Massenwirkungsgesetz**

$$n_0 p_0 = n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{w_g}{kT}} = \text{const}(T) \quad (2.50)$$

Es ist entsprechend der vorangegangenen Herleitung allgemeingültig. Dabei muss jedoch der Gültigkeitsbereich der verwendeten Boltzmann-Näherung anstelle der Fermi-Dirac Verteilungsfunktion berücksichtigt werden (vgl. Gl. (2.9)).

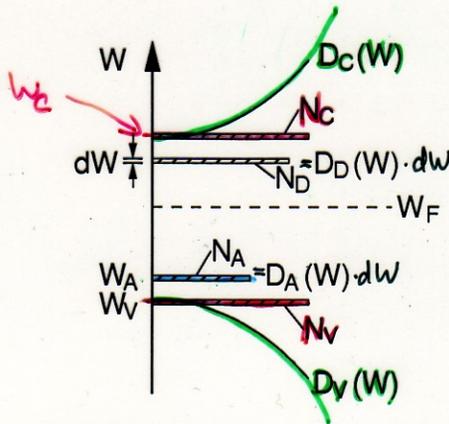
Das Massenwirkungsgesetz besagt, dass das Produkt aus den Ladungsträgerdichten aus Valenz- und Leitungsband konstant ($= n_i^2(T)$) ist. Es ist damit

- Das Produkt aus Ladungsträgerdichte in LB und VB $n_0 \cdot p_0$ ist
- 1) konstant = $n_i^2(T)$
 - 2) UNABHÄNGIG VON DER FERMI-ENERGIE
 \Rightarrow UNABHÄNGIG VON DER DOTIERUNG (gilt immer)

WICHTIG!

$$N_D^+ = \int_{w_D}^{w_D+dW} D_D(w) (1-f(w_D^*)) dw = N_D (1-f(w_D^*))$$

$$N_A^- = \int_{w_A}^{w_A+dW} D_A(w) f(w_A^*) dw = N_A f(w_A^*)$$



$$n_0 = \int_{LB} D_C(w) \cdot f(w) dw = N_C \cdot f(w_C)$$

$$= N_C e^{-\frac{w_C - w_F}{kT}}$$

$$p_0 = \int_{VB} D_V(w) \cdot (1-f(w)) dw = N_V (1-f(w_V))$$

$$= N_V e^{-\frac{w_F - w_V}{kT}}$$

Abb. 2.9: Zusammenhang zwischen Zustandsdichten und Ladungsträgerdichten in Leitungs- und Valenzband sowie für ein Donator- und Akzeptor-Niveau.

meinen Berechnung der Ladungsträgerdichten in Leitungs- und Valenzband (vgl. Gl. (2.22) und (2.25)). Dies war zu erwarten, da durch die Einführung der effektiven Zustandsdichten in Gl. (2.22) und (2.25) sämtliche in den Bändern vorhandene Niveaus an den Bandkanten konzentriert wurden. Dies ist in Abb. 2.9 veranschaulicht.

2.8 Das Massenwirkungsgesetz

In Kapitel 2.2.3 wurden mit Gl. (2.22) und (2.25) zwei allgemeingültige Beziehungen zur Ermittlung der Ladungsträgerdichten n_0 und p_0 in Leitungs- und Valenzband hergeleitet. Sie gelten für alle Arten von Halbleitern, unabhängig davon, ob n -, p - oder i - (eigen) leitend. Die Unterscheidung des jeweiligen Leitungsmechanismus erfolgt einzig über die davon bestimmte Lage des Fermi-Niveaus.

Multipliziert man die beiden Gleichungen miteinander, so ergibt sich, wie bereits in Gl. (2.32) bei der Ermittlung der Eigenleitungsichte geschehen, das **Massenwirkungsgesetz**

$$n_0 p_0 = n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{w_g}{kT}} = \text{const}(T) \quad (2.50)$$

Es ist entsprechend der vorangegangenen Herleitung allgemeingültig. Dabei muss jedoch der Gültigkeitsbereich der verwendeten Boltzmann-Näherung anstelle der Fermi-Dirac Verteilungsfunktion berücksichtigt werden (vgl. Gl. (2.9).

Das Massenwirkungsgesetz besagt, dass das Produkt aus den Ladungsträgerdichten aus Valenz- und Leitungsband konstant ($= n_i^2(T)$) ist. Es ist damit

Das Produkt aus Ladungsträgerdichte in LB und VB $n_0 \cdot p_0$ ist

- 1) konstant = $n_i^2(T)$
- 2) UNABHÄNGIG VON DER FERMI-ENERGIE
 \Rightarrow UNABHÄNGIG VON DER DOTIERUNG (gilt immer)

WICHTIG!

unabhängig von der Lage des Fermi-Niveaus und damit von der Dotierung und wird nur durch die Temperatur (vgl. Gl. (2.35)) bestimmt.

2.9 Neutralitätsbedingung

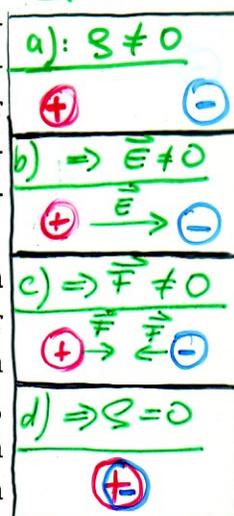
Halbleiter an jedem Ort \vec{r} neutral solange im thermodyn. Gleichgewicht

Eine wichtige Bedingung, die u. a. zur Berechnung der Fermi-Energie benötigt wird, ist die Neutralitätsbedingung. Sie fordert, dass der Halbleiter in jedem Ort (lokal) elektrisch neutral ist, solange er sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet.

$\rho(\vec{r}) = 0$

Physikalisch bedeutet dies, dass die Raumladungsdichte an jedem Ort des Halbleiters gleich Null sein muss. Wäre dies nicht so, würde daraus ein elektrisches Feld resultieren, durch das die Ladungen wieder so verschoben werden, dass sich ein Gleichgewichtszustand (Neutralität) einstellt. Aus dieser Überlegung wird auch deutlich, dass die Neutralitätsbedingung nur im thermodynamischen Gleichgewicht, also ohne von außen an den Halbleiter angelegte Spannung gilt.

Bspl:



Die Ladungen im Halbleiter bestehen aus den frei beweglichen Elektronen im Leitungsband mit der Ladungsdichte $-e n_0$, frei beweglichen Löchern der Dichte $e p_0$ und den Dichten der ortsfest im Gitter eingebauten ionisierten Akzeptoren $-e N_A^-$ und Donatoren $e N_D^+$. Hierbei haben wir vorausgesetzt, dass die Dotierungsatome aus der dritten bzw. fünften Gruppe stammen und daher durch Abgabe bzw. Aufnahme eines Elektrons ionisieren. Zum Verständnis sei darauf hingewiesen, dass sich die Dichten der frei beweglichen Ladungsträger n_0, p_0 jeweils aus der Dichte der Ladungsträger durch Eigenleitung und den Ladungsträgerdichten der ionisierten Dotierungsatome zusammensetzt. Die Bedingung für Ladungsneutralität lautet somit

$\rho = 0 = e(-n_0 - N_A^- + p_0 + N_D^+)$ (2.51)

bzw. umgestellt als Bilanzgleichung von positiver und negativer Ladung

$n_0 + N_A^- = p_0 + N_D^+$ (2.52)

Wichtig

Neutralitätsbedingung

Das ist die wichtige Neutralitätsbedingung für Halbleiter im thermodynamischen Gleichgewicht. Die darin enthaltenen Beiträge haben wir bereits ermittelt. Wir können die Neutralitätsbedingung daher zunächst allgemein mit n_0 nach Gl. (2.22), p_0 nach Gl. (2.25), N_D^+ nach Gl. (2.48) und N_A^- nach Gl. (2.49) formulieren:

$N_C f(W_C) + N_A f(W_A^*) = N_V (1 - f(W_V)) + N_D (1 - f(W_D^*))$ (2.53)

Formulierung mit effektiven Zustandsdichten

für alle $f(w)$:

$f(w) = \frac{1}{1 + e^{\frac{w - W_F}{kT}}}$

mit $w = W_C, W_V, W_A^*, W_D^*$

← BEKANNT

NUR W_F ist UNBEKANNT!

Darin sind N_C und N_V die effektiven Zustandsdichten von Leitungs- und Valenzband nach Gl. (2.23) und (2.26). N_A und N_D sind die Dichten der Dotierung, die bei reiner Akzeptor- oder Donator-Dotierung entsprechend auf Null zu setzen sind. Nur bei „vergifteten“ oder „kompensierten“ Halbleitern sind gleichzeitig beide Dotierungen vorhanden. In Gl. (2.53) ist mit $f(W)$ zunächst die Fermi-Dirac Verteilungsfunktion nach Gl. (2.6) verwendet worden, da a priori aus Gl. (2.53) nicht ersichtlich ist, ob sich ein Fermi-Niveau ergibt, dass die Verwendung der Boltzmann-Näherung für einen der Terme zulässt.

Nur W_F in Neutralitätsbedingung unbekannt

Wir rufen uns nochmals die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion $f(W)$ in Erinnerung

$$f(W) = \frac{1}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}}, \quad (2.6)$$

die durch Substitution von W mit W_C, W_V, W_A^*, W_D^* direkt in die Neutralitätsbedingung nach Gl. (2.53) eingesetzt werden kann.

Plan

verwende Neutralitätsbedingung zur

2.10 Ermittlung der Fermi-Energie

Alle in der Neutralitätsbedingung (Gl. (2.53)) enthaltenen Größen bis auf die Fermi-Energie W_F sind bekannt, sodass Gl. (2.53) als Bestimmungsgleichung für die Fermi-Energie im allgemeinen Fall verwendet werden kann.

Leider ist Gl. (2.53) eine transzendente Gleichung, die sich nicht geschlossen nach W_F umformen lässt. Zur Lösung bietet sich ein Computer oder eine grafische Lösung an.

Problem:

nicht analytisch lösbar

Wir favorisieren hier wegen der Unabhängigkeit von elektronischen Hilfsmitteln und der Schulung der Intuition die grafische Variante. Versuchen Sie doch einmal als Kompromiss die grafische Lösung auf dem Computer zu programmieren.

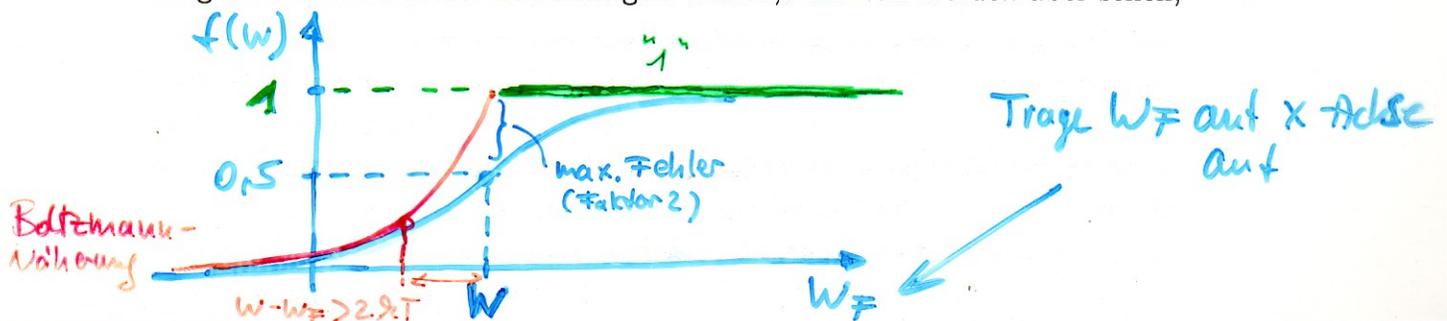
Näherung + grafische Lösung

Für die grafische Lösung benötigen wir eine geeignete Näherung zur Darstellung der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion. Wir unterteilen den Verlauf der Funktion daher in zwei Bereiche mit den Näherungen

$$\frac{1}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}} = f(W) \approx \begin{cases} 1, & W_F \gg W \\ e^{-\frac{W - W_F}{kT}}, & W_F \ll W, \end{cases} \quad (2.54)$$

die im Punkt $W = W_F$ mit $f(W_F) = \frac{1}{2}$ zusammentreffen. Der maximale Fehler tritt bei dieser Approximation bei $W = W_F$ auf. Hier nimmt die Näherung den Wert 1 anstatt den richtigen Wert 0,5 an. Wir werden aber sehen,

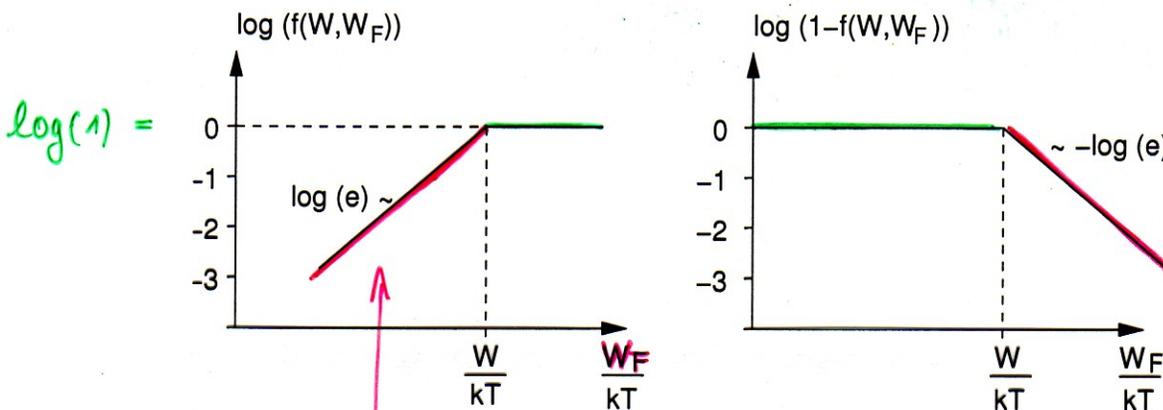
(oder Computer)



$$f(W) = \begin{cases} 1 & W_F \gg W \\ e^{-\frac{W-W_F}{kT}} & W_F \approx W \\ 0 & W_F \ll W \end{cases}$$

dass dieser Fehler in der Regel ohne Auswirkung auf die Bestimmung des Fermi-Niveaus ist. Wählen wir eine Darstellung mit logarithmischer (Basis 10) y-Achse und tragen auf der x-Achse die auf kT normierte Fermi-Energie auf, so ergibt sich der in Abb. 2.10 gezeigte Verlauf von $f(W, W_F)$ bzw. $1 - f(W, W_F)$.

Wähle geeignete Darstellung:



1) $y = \log(f(W))$
2) $x = \frac{W}{kT}$

Abb. 2.10: Geradenapproximation bei logarithmischer Darstellung des Verlaufs der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion (links) und der Nicht-Besetzungsfunktion (rechts).

Dabei sind die Verläufe der beiden Bereiche durch Geradenabschnitte angenähert worden. Im Bereich $W_F < W$ ergibt sich durch die logarithmische y-Achse die Gerade

für $f(W)$:

$$y = \log\left(e^{-\frac{W-W_F}{kT}}\right) = \left(-\frac{W}{kT} + \frac{W_F}{kT}\right) \log(e) \quad (2.55)$$

e -Funktion wird zur Gerade, \rightarrow einfach zu zeichnen

Die Gerade hat also eine Steigung von $\log(e)$ und mündet im Punkt $y = \log(1) = 0$, $x = \frac{W_F}{kT}$ in den horizontalen Verlauf.

Durch entsprechende Überlegungen erhält man den in Abb. 2.10 rechts gezeigten Verlauf für die Wahrscheinlichkeit $1 - f(W, W_F)$ eines nicht besetzten Niveaus. Durch Multiplikation mit den effektiven Zustandsdichten in Gl. (2.53) verschieben sich die Approximationsverläufe nach oben um den Logarithmus der jeweiligen Zustandsdichte (z. B. liegt der waagerechte Verlauf von $N_C f(W_C)$ bei $\log(N_C)$).

Zur Ermittlung der Fermi-Energie aus der Neutralitätsbedingung (Gl. (2.53)) stellen wir die linke und rechte Seite der Gleichung grafisch in Abhängigkeit

↓ Konstruktionsregeln:

- 1) $f(W)$; $(1-f(W))$
- 2) Knick bei W
- 3) $\log(e) = 0,43 \approx 0,5$
- 4) $\log(N \cdot f(W)) = \log(N) + \log(f(W)) \Rightarrow$ um $\log(N)$ verschieben

NEUTRALITÄTSBEDINGUNG: $n_0 + N_A^- = p_0 + N_D^+$

$N_C \cdot f(W_C) + N_A f(W_A^*) = N_V (1 - f(W_V)) + N_D (1 - f(W_D^*))$

der Fermi-Energie dar. Die Fermi-Energie im Schnittpunkt der beiden Kurven erfüllt die Neutralitätsbedingung und ist die gesuchte Lösung.

Abb. 2.11 zeigt die grafische Lösung der Neutralitätsbedingung für einen Si-Halbleiter mit p - und n -Dotierung. Dargestellt sind die Verläufe ohne die Geradenapproximation.

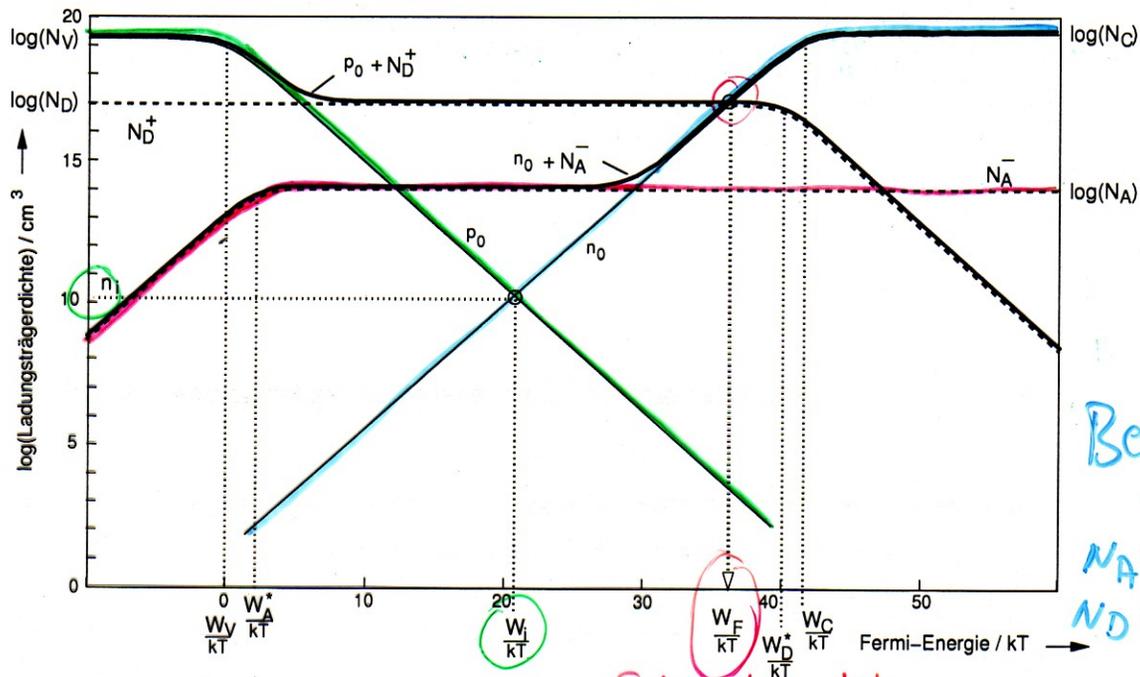


Abb. 2.11: Grafische Bestimmung der Fermi-Energie für einen Si-Halbleiter bei $T = 300\text{ K}$ mit einer Dotierung $N_A = 10^{14}\text{ cm}^{-3}$ und $N_D = 10^{17}\text{ cm}^{-3}$.

Die beiden dicken Kurven stellen die Verläufe der beiden Seiten der Neutralitätsbedingung dar (ohne Geradenapproximation).

Der Nullpunkt der Energie wurde an die Kante des Valenzbandes gelegt. Bei Verwendung der Geraden-Näherung ergibt sich als einzige Abweichung zu Abb. 2.11 jeweils eine Ecke an den Schnittpunkten der Geradenabschnitte anstelle des gekrümmten Verlaufs. Der maximale Fehler entsteht am Schnittpunkt der Geraden und beträgt den Faktor Zwei. Aus Abb. 2.11 erkennt man, dass dieser Fehler in dem vorliegenden Beispiel keinen Einfluss auf das Ergebnis hat, da der gesuchte Schnittpunkt davon weit entfernt liegt. Der Fehler bei einer Verwendung des Geradenapproximation ist daher in der Regel vernachlässigbar.

Der waagerechte Verlauf liegt für die vier Ladungsträgerdichten bei dem Wert

der effektiven Zustandsdichten (N_C, N_V) im Fall der freien Ladungsträger bzw. bei den Dotierungskonzentrationen (N_D, N_A) bei den Ladungsträgerdichten der ortsfesten, ionisierten Dotierungsatome. Bei der grafischen Addition von zwei Beiträgen wirkt sich der logarithmische Maßstab vorteilhaft aus. Hier geht der Summenverlauf direkt vom Verlauf eines Beitrags zum anderen über, sobald der eine Beitrag um eine Zehnerpotenz unter den anderen gefallen ist.

Die Konstruktion der Kurven zur grafischen Lösung ist aufgrund der auf kT normierten x -Achse besonders einfach. Dadurch besitzen alle Verläufe unabhängig von der Temperatur die gleiche Steigung (betragsmäßig). Leitungsband und ionisiertes Akzeptorniveau haben eine positive, Valenzband und ionisiertes Donator-Niveau eine negative Steigung (vgl. Abb. 2.10).

Durch die Überlagerung der einzelnen Kurven lassen sich anhand der grafischen Darstellung verschiedene Fälle einfach darstellen. So beschreiben z. B. die Verläufe von n_0 und p_0 alleine den nicht dotierten Halbleiter. Ihr Schnittpunkt liefert die Fermi-Energie W_i für Eigenleitung und die Eigenleitungsdichte n_i . Auch die Abhängigkeit der Fermi-Energie von der Temperatur lässt sich mit ein wenig Übung sehr einfach ermitteln. Dies betrachten wir im nächsten Kapitel.

2.11 Temperaturabhängigkeit von Fermi-Niveau und Ladungsträgerdichte

Wir vermuten, dass durch die starke Temperaturabhängigkeit der Exponentialfunktionen ($\exp(\frac{W}{kT})$) in der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion die Eigenschaften eines Halbleiters ebenfalls stark von der Temperatur abhängen. Als Maß für die Abhängigkeit ermitteln wir die Lage des Fermi-Niveaus und die Dichte der Ladungsträger in den Bändern in Abhängigkeit von der Temperatur.

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit und ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit betrachten wir als Beispiel einen Halbleiter mit n -Dotierung. Die Verhältnisse bei p -dotierten Halbleitern stellen sich dann symmetrisch (bezogen auf die Bandmitte) dazu dar.

Ein immer anwendbares Lösungsverfahren zur Ermittlung des Fermi-Niveaus ist die im vorangegangenen Kapitel beschriebene grafische Lösung. Abb. 2.12 zeigt ein Beispiel für schwache n -Dotierung mit $N_D = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ bei $T = 200, 300$ und 600 K .

Vermutung:
 $n \sim e^{\frac{W}{kT}}$

bewirkt

starke
Temperatur-
abhängigkeit
von W_F



ermittle

$W_F(T)$

Temp. abhängig

Temp. abh.

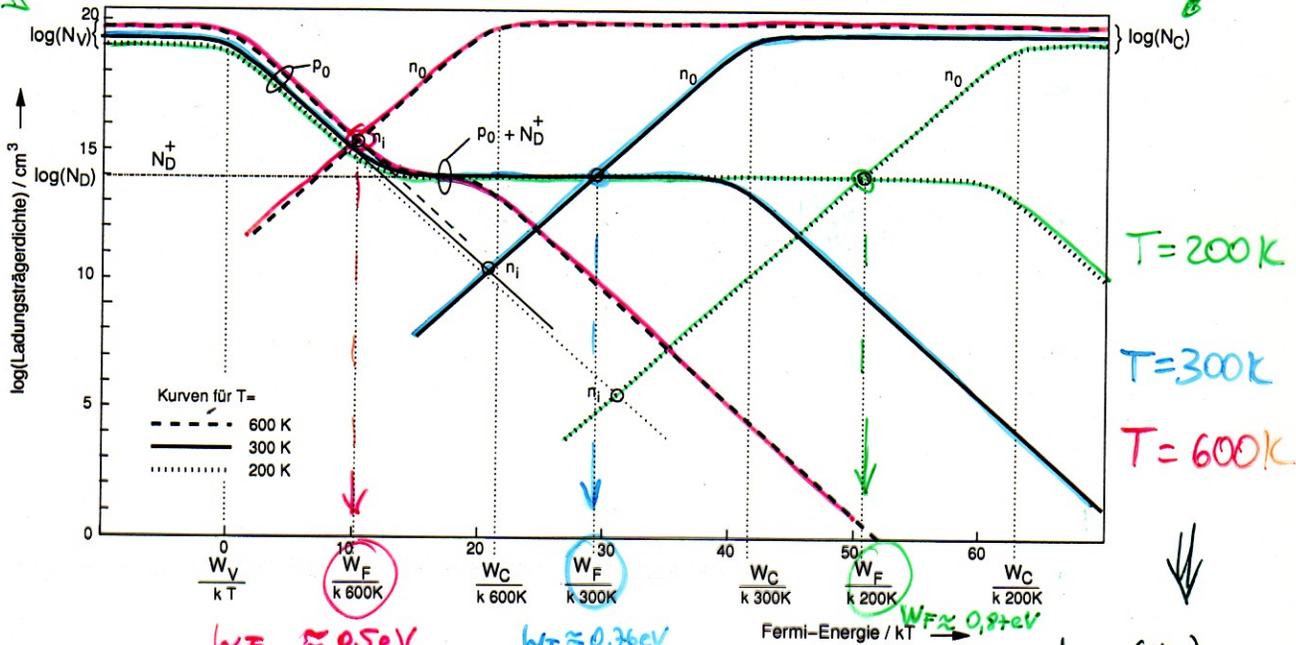
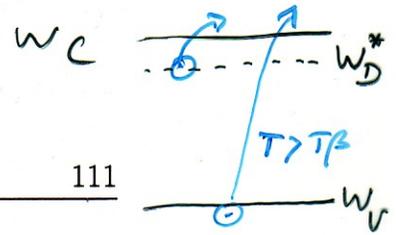


Abb. 2.12: Verläufe von p_0 , n_0 und N_D^+ für $T = 200, 300$ und 600 K bei n -dotiertem Halbleiter. Der Schnittpunkt der $p_0 + N_D^+$ -Kurve mit der entsprechenden n_0 -Kurve ergibt die Fermi-Energie der jeweiligen Temperatur.

$W_F(T)$
wandert von
L-B-Kante
zur Bandmitte
(W_i)
⇒ Eigenleitung
bei
hohen T

Die Temperaturabhängigkeit stellt sich in dem Diagramm recht einfach dar. Zu berücksichtigen sind die temperaturabhängigen effektiven Zustandsdichten N_C und N_V , die über Gl. (2.23) und (2.26) ermittelt werden können. Sie legen das Start-Plateau der Geradennäherung für die beiden Seiten der Neutralitätsgleichung fest (ganz links beginnend für die positiven Ladungen auf der p_0 -Kurve, ganz rechts für die negativen Ladungen auf n_0). An den Energien der Bandkanten W_V und W_C fallen beide Verläufe ab¹⁴. Bedingt durch die Normierung von W_C und kT geschieht dies temperaturabhängig an unterschiedlichen Stellen. Prinzipiell gilt dies auch für W_V . Jedoch ändert sich durch die Wahl von $W_V = 0$ als Nullpunkt die Position hier nicht. Sobald der Verlauf der positiven Ladungen auf der p_0 -Kurve das Niveau der komplett ionisierten Donatoren ($N_D^+ = N_D$) erreicht, geht er in diesen Verlauf

¹⁴Mathematisch steigt natürlich der Verlauf von n_0 . In dieser, an die Konstruktion des Diagramms angelehnten Beschreibung fällt der Verlauf ab, da wir für den n_0 -Verlauf von der rechten Seite des Diagramm-Randes kommen.



über. Das Niveau dieses mittleren Plateaus ist temperaturunabhängig, da sich die Anzahl (Dichte) der in den Kristall eingebrachten (dotierten) Atome nicht ändert. Bei steigender Fermi-Energie (von dem mittleren Plateau nach rechts) nimmt die Anzahl der ionisierten Donatoren ab, sobald W_F die Energie des Donator-Niveaus W_D^* erreicht. Diese Energie ist in Abb. 2.12 zur Erhöhung der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet, da sie sehr dicht an der Energie W_C der Leitungsbandkante liegt und in erster Näherung in der Darstellung mit dieser gleichgesetzt werden kann.

Die Fermi-Energie ergibt sich als Schnittpunkt des n_0 -Verlaufs mit dem $p_0 + N_D^+$ Verlauf. Abb. 2.12 zeigt deutlich, dass dies bei 200 K und 300 K auf dem mittleren Plateau des $p_0 + N_D^+$ Verlaufs erfolgt. Wir lesen $W_F(200K) = 0,87 \text{ eV}$ und $W_F(300K) = 0,76 \text{ eV}$ ab¹⁵. Das Fermi-Niveau wandert also mit steigender Temperatur in Richtung Mitte der Bandlücke ($= \frac{1}{2} \cdot 1,08 \text{ eV}$). Die Erklärung hierfür wird deutlich, wenn wir die Temperatur noch weiter erhöhen. Bei höherer Temperatur verschiebt sich der Schnittpunkt auf den abfallenden Ast des p_0 -Anteils. Der Schnittpunkt ist dann bei einer Ladungsdichte $p_0 \gg N_D$, sodass die Fermi-Energie $W_F = W_i$ den Wert für Eigenleitung besitzt (in etwa Bandmitte). Bei hohen Temperaturen (in Abb. 2.12 ca. $T > 600 \text{ K}$) liegt also trotz der Dotierung Eigenleitung vor.

Dies ist die Erklärung für das Wandern der Fermi-Energie in Richtung Bandmitte: Mit steigender Temperatur nimmt die Energie der Elektronen im Valenzband immer weiter zu und es gelangen immer mehr von dort in das Leitungsband. Die Donator-Niveaus sind bei diesen Temperaturen bereits alle ionisiert (Störstellenerschöpfung), da die hierzu benötigte Energie viel geringer als die Energie der Bandlücke ist. Der Zuwachs an Elektronen im Leitungsband erfolgt also nur durch Elektronen aus dem Valenzband. Ist die Temperatur so groß, dass deren Zahl viel (Faktor 10) größer ist als die Zahl der Dotierungs-Atome, ist die Dotierung vernachlässigbar. Dann liegen die Verhältnisse bei Eigenleitung vor und das Fermi-Niveau muss in der Bandmitte liegen.

Wir wissen jetzt, dass das Fermi-Niveau mit steigender Temperatur in Richtung Bandmitte wandert. Aber von wo kommt es bei tiefen Temperaturen?

¹⁵Genauer gesagt lesen wir $W_F/(k \cdot 200 \text{ K}) \approx 51$ und $W_F/(k \cdot 300 \text{ K}) \approx 29$ ab, woraus wir durch Umstellen und Einsetzen der Boltzmannkonstanten die oben angegebenen Werte berechnen.

$T \uparrow$
 \downarrow

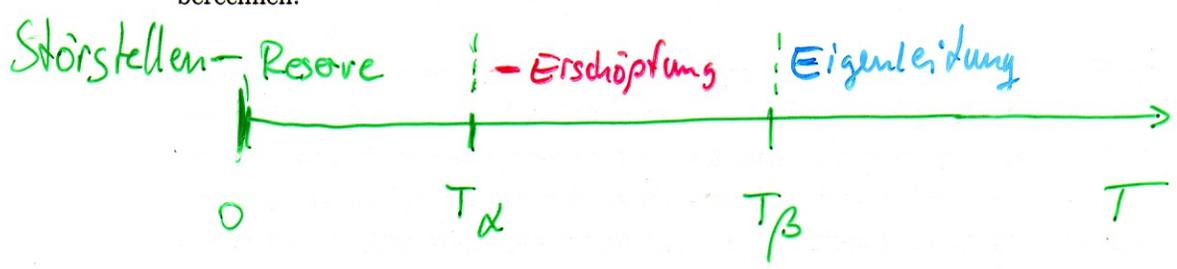
$W_F \rightarrow W_i$

Anschaulich:

1) ab $T = T_\alpha$
 $N_D^+ = N_D$
(alle Donatoren ionisiert)

2) $T > T_\alpha < T_\beta$
 $n_0 = \text{const.}$
(therm. Energie reicht nicht für Elektron-Loch-Paar-Bildung)

3) $T \gg T_\beta$
 $n_0 \approx n_i$
therm. Energ. so groß, dass $n_0 \gg N_D$
Eigenleitung
(Donatoren vernachlässigbar)



WF(T) Lösungsmöglichkeit 2:

Hierzu machen wir (anstelle der immer möglichen grafischen Lösung) einige einfache Überlegungen, die für unsere Belange vollständig ausreichen. Wir nehmen an, die Temperatur ist auf dem absoluten Nullpunkt ($T = 0$). Dann ist das Leitungsband leer und keines der Donator-Atome ionisiert. Steigt die Temperatur auch nur ein wenig an (z. B. 1 K), dann reicht die thermische Energie aus um nach der Fermi-Dirac Statistik Elektronen mit einer kleinen aber von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit in das Leitungsband zu heben. Dies ist von dem dicht darunter liegenden Donator-Niveau viel wahrscheinlicher als von dem im Vergleich viel weiter entfernten Valenzband. Wir vernachlässigen daher den Beitrag des Valenzbandes bei tiefen Temperaturen. Da das Donator-Niveau bei tiefen Temperaturen komplett besetzt ist mit Elektronen, die mit steigender Temperatur in das Leitungsband gehen, liegen hier die gleichen Verhältnisse wie bei Eigenleitung vor. Die Rolle des Valenzbandes wird hier vom Donator-Niveau übernommen.

Damit ist klar, dass die Fermi-Energie wie bei der Eigenleitung in der Mitte zwischen den Bändern liegen muss. Das Fermi-Niveau startet also in dieser einfachen Betrachtungsweise für $T = 0$ bei

$$W_F(T = 0) \approx \frac{1}{2} (W_L + W_D^*) \quad (2.56)$$

Abb. 2.13 zeigt zur Verdeutlichung diese Lage in einem Bändermodell.

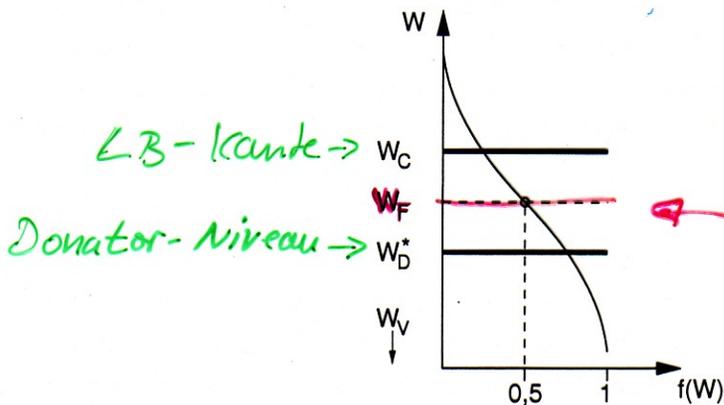


Abb. 2.13: Lage des Fermi-Niveaus bei tiefen Temperaturen zwischen effektivem Donator-Niveau und Leitungsbandkante.

Da die gleichen Verhältnisse wie bei Eigenleitung vorliegen, kann die Ladungsträgerdichte mit Hilfe von Gl. (2.34) zur Bestimmung der Eigenleitungsdichte ermittelt werden. Dazu muss nur der Bandabstand W_g durch

Anwenden von bekannter Lösung:

1) $T = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{LB leer} \\ n_D^+ = 0 \end{array} \right.$

2) $T = 0 + \epsilon$
Wahrscheinlichkeit dass \ominus von W_D^* in LB

Wahrscheinlichkeit dass \ominus von W_V in LB

↓
bei "tiefen" T übernimmt W_D^* Funktion von W_V

Austausch $W_V \rightarrow W_D^*$

↓
Bei tiefen T liegt W_F i.d. MITTE zwischen W_D^* und W_C

↓
analoge Überlegung bei Akzeptordotierung:

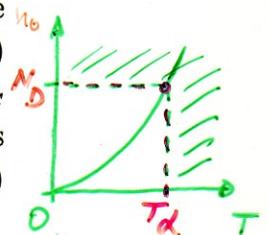
$$W_F(T=0) = \frac{1}{2} (W_A^* + W_V)$$

den Abstand zwischen effektivem Donator-Niveau und Leitungsbandkante ersetzt werden ($W_g \rightarrow W_C - W_D^*$) und anstelle der effektiven Zustandsdichte des Valenzbandes die Dichte der Donator-Dotierung eingesetzt werden ($N_V \rightarrow N_D$). Damit ergibt sich die Ladungsträgerdichte im Leitungsband bei tiefen Temperaturen zu

$$n_0 = \sqrt{N_C N_D} e^{-\frac{W_C - W_D^*}{2kT}} \quad (2.57)$$

Mit gleichem Trick:
bestimme n_0 über
Eigenleitungs-
dichte-Formel
da "Bandmitte"
 $n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{W_g}{kT}}$

Sie nimmt von $n_0(T=0) = 0$ an zu und erreicht bei einer Temperatur T_α die Größenordnung der Dotierungsdichte. Theoretisch ließe sich T_α aus Gl. (2.57) berechnen. Jedoch muss dazu auch die Temperaturabhängigkeit von N_C berücksichtigt werden, wodurch keine analytische Lösung existiert. Da bis T_α die Zahl der Ladungsträger zunimmt, spricht man auch von (Störstellen-) Reserve („Freeze-out“).



Gl. (2.57) besitzt als Näherung einen nur sehr eingeschränkten Gültigkeitsbereich. So kann z. B. n_0 in dieser Näherung auch Werte größer als N_D annehmen, was entgegen unserer Annahme für den betrachteten Bereich ist, wonach alle Ladungsträger im Leitungsband aus dem Donator-Niveau stammen. Wir leiten daher eine genauere Beziehung für die Ladungsträgerdichte in diesem Bereich her:

Näherung für $T > T_\alpha$
unbrauchbar
da $n_0 > N_D$

Bei der niedrigen Temperatur stammen alle Elektronen im Leitungsband aus dem Donator-Niveau. Die Elektronendichte im Leitungsband ist demnach gleich der Dichte der nicht mit einem Elektron besetzten Donator-Zustände. Die mathematische Formulierung dafür, lautet

↓ Lösung 3
genauer rechnen

Ursprung der Ladung: (1)

$$n_0 = N_D \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{W_D^* - W_F}{kT}}} \right) \quad (2.58)$$

⊖-Dichte in LB = Dichte der nicht mit ⊖ besetzten Donator-Zustände

Weiterhin gilt allgemein, solange die Boltzmann-Näherung gilt:

allgemeine Lad. freigebl. dichte (2)

$$n_0 = N_C f(W_C) = N_C e^{-\frac{W_C - W_F}{kT}} \quad (2.59)$$

allgemein (gilt immer) wenn Boltzmann-Näherung gültig

Diese Beziehung kann dazu verwendet werden, um die Fermi-Energie in der vorangegangenen Gl. (2.58) zu ersetzen. Durch Umformen und Lösen einer quadratischen Gleichung ergibt sich

(2) → W_F in (1) ⇒

$$n_0 = \frac{2 N_D}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{N_D}{N_C} e^{\frac{W_C - W_D^*}{kT}}}} \quad (2.60)$$

Fallunterscheidung $\begin{cases} a \gg 1 \\ a \ll 1 \end{cases}$

$$n_0 = \frac{2 N_D}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{N_D}{N_C} e^{\frac{w_C - w_D^*}{kT}}}}$$

$$w_C - w_D^* \hat{=} w_g$$

hängt nur von T ab \Rightarrow Fallunterscheid. nach T

Anhand der Fallunterscheidung

für $T < T_\alpha$:

$$4 \frac{N_D}{N_C} e^{\frac{w_C - w_D^*}{kT}} \gg 1 \rightarrow n_0 = \sqrt{N_C N_D} e^{-\frac{w_C - w_D^*}{2kT}} \quad (2.61)$$

RESERVE

(n_0 steigt mit T)

und $T_\alpha \leq T \leq T_\beta$:

$$4 \frac{N_D}{N_C} e^{\frac{w_C - w_D^*}{kT}} \ll 1 \rightarrow n_0 = N_D \quad (2.62)$$

ERSCHÖPFUNG

($n_0 = N_D = \text{const}$)

lassen sich zwei Temperaturbereiche für Näherungslösungen von Gl. (2.60) bestimmen.

Für den Bereich bis T_α nimmt Gl. (2.61) als Näherung von Gl. (2.60) die bereits vorhergesagte Form der Eigenleitungsdichte nach Gl. (2.57) für Störstellenreserve an.

Für $T > T_\alpha$ geht dieser Verlauf in das konstante Plateau $n_0 = N_D$ nach Gl. (2.62) über. Ab T_α sind sämtliche Donatoren ionisiert. Man spricht daher auch von (Störstellen-) Erschöpfung.

Ab $T = T_\beta$ wird die Anzahl der Elektronen, die durch Eigenleitung aus dem Valenzband stammen, größer werden als die der Dotierung und die Annahme die zu Gl. (2.60) führte, gilt nicht mehr. Ab dieser Temperatur geht das konstante Plateau in den Verlauf der Eigenleitungsdichte nach Gl. (2.34) über.

Abb. 2.14 fasst die vorangegangenen Aussagen über die Temperaturabhängigkeit der Elektronendichte im Leitungsband und Lage des Fermi-Niveaus zusammen. Es ist unmittelbar anhand des Schnittpunktes der Gerade für Eigenleitung mit dem Plateau $n_0 = N_D$ zu sehen, dass sich T_β bei höherer Dotierung zu höheren Temperaturen verschiebt.

Die gleichen Überlegungen gelten für die Löcherdichte im Valenzband. Daher gilt Abb. 2.14 links ebenso für Löcher. Entsprechend verläuft die Lage des Fermi-Niveaus für p -dotierte Halbleiter i.e. gespiegelt zu dem Verlauf in Abb. 2.14 rechts.

Halbleiterbauelemente werden im Bereich der Störstellen-Erschöpfung betrieben. In diesem Temperaturbereich hängt die Zahl der freien Ladungsträger und damit die Leitfähigkeit von der Dotierung ab. Die Temperaturabhängigkeit ist gering und die Eigenschaften des Halbleiters können von dem Entwickler des Bauelementes gezielt über die Stärke der Dotierung eingestellt werden. Die vorangegangenen Überlegungen

erwünscht

da temper. unabhängig

Eigenschaften des Halbleiters durch Dotierung bestimmt

Halbleiterbauelemente werden im Bereich der

St.-Erschöpfung betrieben

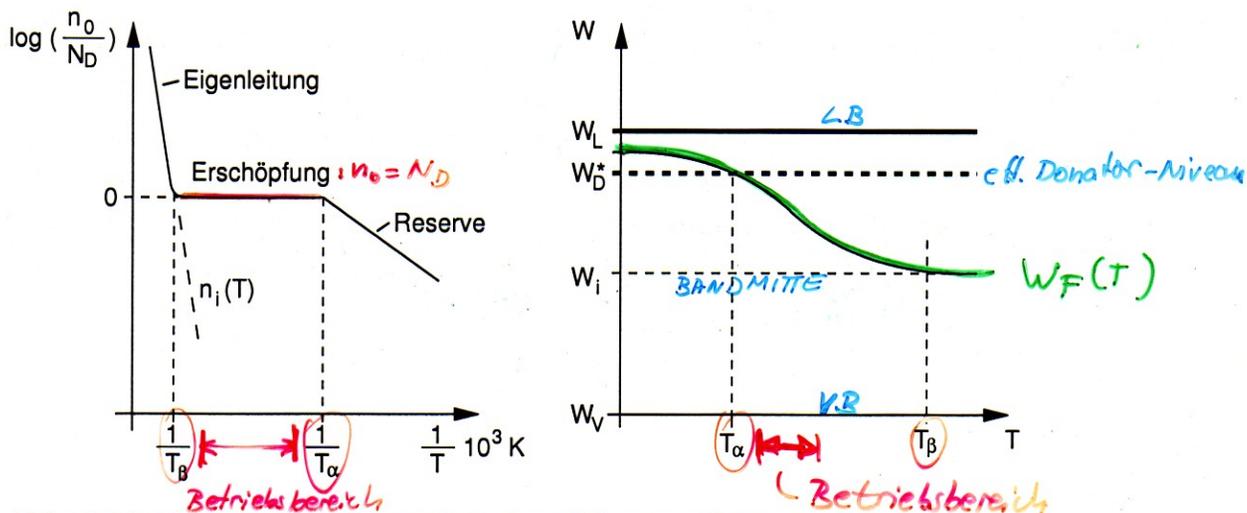


Abb. 2.14: Temperaturabhängigkeit der Elektronendichte im Leitungsband eines n-dotierten Halbleiters (links) und die entsprechende Lage des Fermi-Niveaus (rechts). Für die Kurvenabschnitte links gilt Eigenleitung Gl. (2.34), Erschöpfung Gl. (2.62), und bei Reserve Gl. (2.61).

verdeutlichen auch den Grund für die bevorzugte Verwendung von **Si** anstelle von **Ge** wenn es darum geht, Halbleiterbauelemente für möglichst hohe Temperaturen zu entwerfen. Da aufgrund der kleineren Bandlücke bei **Ge** gilt $n_i(Ge) > n_i(Si)$, setzt für einen **Si**-Halbleiter der Beginn der Eigenleitung (T_β) später ein.

*Wahl des Halbleitermaterials
 $w_g(Si) > w_g(Ge)$
 $\Rightarrow Si$ für $T \uparrow$*

Für die Berechnung der Halbleitereigenschaften im Bereich der Störstellenerschöpfung kann wegen der Ionisation aller Dotierungsatome immer

$$N_D^+ = N_D, N_A^- = N_A$$

Erschöpfung: alle Dotierungsatome ionisiert

gesetzt werden. Da im Bereich der Störstellenerschöpfung die Eigenleitung vernachlässigbar ist, bestehen die sich in der Majorität befindenden Ladungsträger ausschließlich aus den Ladungsträgern der ionisierten Dotierungsatome. Daher gilt für alle nachfolgenden Berechnungen der Halbleiter folgende Zusammenfassung:

→ Tabelle

Eine Beziehung für die Berechnung bei gleichzeitiger p- und n-Dotierung wird in einer Übung hergeleitet.

2.12 Bewegte Ladungsträger

Wir sind nach dem vorangegangenen Kapitel in der Lage, die Zahl (genauer die Dichte) der Elektronen und Löcher in Leitungs- und Valenzband zu be-

Wichtig ✓
& einfach

| | Majoritätsträger | Minoritätsträger |
|----------------|---------------------|---|
| n -Dotierung | $n_0 = N_D^+ = N_D$ | $p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = \frac{n_i^2}{N_D}$ |
| p -Dotierung | $p_0 = N_A^- = N_A$ | $n_0 = \frac{n_i^2}{p_0} = \frac{n_i^2}{N_A}$ |

Ladungskarrieren -
Dichten
bei Erschöpfung

BEWEGTE LADUNGSTRÄGER

rechnen. Für die Funktion von Halbleiterbauelementen ist deren Bewegung entscheidend. Bei gerichteter, Bewegung entsteht ein Strom von Ladungsträgern, der den bekannten elektrischen Strom bildet.

Aufgrund der Ursache der gerichteten Bewegung unterscheiden wir zwischen Feld- oder Driftstrom, der aufgrund der Kraftwirkung eines elektrischen Feldes auf die Ladungsträger entsteht und den Diffusionsstrom, der sich aufgrund eines Konzentrationsgefälles von Ladungsträgern ergibt.

Der gerichteten Bewegung überlagert ist eine zufällige ungerichtete Bewegung der (freien) Ladungsträger, die sich aus der thermischen Anregung ergibt. Der Mittelwert des Geschwindigkeitsvektors dieser ungerichteten Bewegung ist Null, sodass hierdurch kein Stromfluss entsteht.

Bei ihrer Bewegung durch den Kristall stoßen die Ladungsträger gegeneinander, gegen Störstellen und Grenzflächen im Kristall und gegen das Kristallgitter. Stöße mit dem Kristallgitter sind im Temperaturbereich der Störstellenererschöpfung meist dominant. Durch die Stöße wird die Beweglichkeit der Ladungsträger eingeschränkt und die Leitfähigkeit des Stroms verringert. Beide Begriffe stellen wichtige Parameter von Halbleiterbauelementen dar, die im weiteren Verlauf ermittelt werden.

2.12.1 Der Halbleiter ohne elektrisches Feld

Ohne elektrisches Feld bewegen sich die Ladungsträger mit ihrer effektiven Masse m^* ($= m_{ec}^*, m_{hc}^*$) aufgrund ihrer thermischen Energie „frei“ im Halbleiter.

Sie stoßen dabei gegen das Kristallgitter bzw. das Gitter, das selbst auch in thermischer Schwingung ist, stößt gegen die Ladungsträger. Die Stoßprozesse im Einzelnen sind nicht vorhersagbar, führen aber zu einer mittleren Geschwindigkeit der Ladungsträger. Abb. 2.15 rechts zeigt eine beliebige Ge-

Bewegung durch
Feld (Drift)
oder
Diffusion
↓
Feldstrom
Diffusionsstrom
Behinderung durch
Stöße
- gegenseitig
- gegen Störstellen
- Grenzflächen
- Kristallgitter
dominant bei Erschöpfung
↓
Beweglichkeit eingeschränkt
⇓
Leitfähigkeit verringert