

schwindigkeitsverteilung für einen Ladungsträger in einer willkürlich gewählten Richtung  $x$

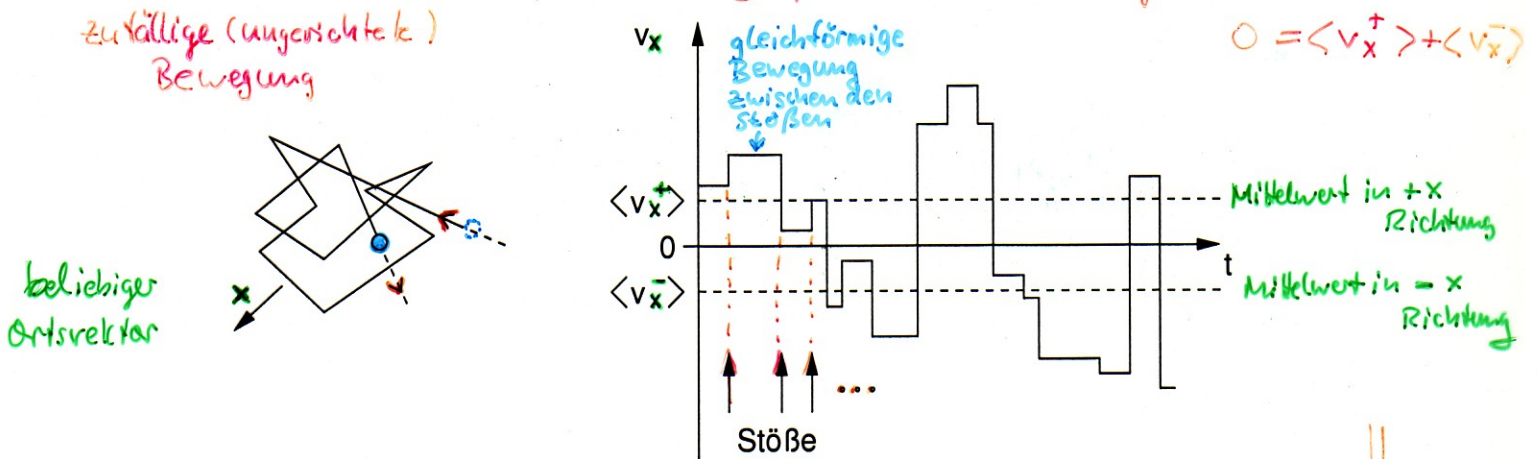


Abb. 2.15: Links: Zufällige ungerichtete Bewegung eines Ladungsträgers im Zweidimensionalen. Rechts: Geschwindigkeit des Ladungsträgers in  $x$ -Richtung.

Für die Bewegung in  $+x$ -Richtung stellt sich eine mittlere Geschwindigkeit  $\langle v_x^+ \rangle$  ein. Diese muss, aufgrund der ungerichteten, zufälligen Bewegung entgegengesetzt gleich der mittleren Geschwindigkeit in  $-x$ -Richtung sein, sodass im Mittel für die resultierende Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung gilt  $\langle v_x \rangle = 0 = \langle v_x^+ \rangle + \langle v_x^- \rangle$ . Die gleichen Aussagen gelten für die Mittelwerte der Geschwindigkeit in allen drei Dimensionen und Richtungen. Wir ersetzen daher im Folgenden die  $x$ -Richtung durch einen allgemeinen Ortsvektor  $\vec{r}$ . Wenn wir im Folgenden ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  annehmen, soll  $\vec{r}$  in Richtung von  $\vec{E}$  zeigen.

In einem einfachen Modell kann ein Ladungsträger als Teilchen nach der klassischen Thermodynamik behandelt werden. Danach besitzt er aufgrund seiner Bewegung in  $x$ -Richtung mit  $\langle v_x \rangle = \langle v_x^+ \rangle = -\langle v_x^- \rangle$  eine kinetische Energie von

$$W_{kin_x} = \frac{1}{2} m^* \langle v_x \rangle^2 = \frac{1}{2} kT \quad (2.64)$$

Für eine Bewegung in  $y$ - und  $z$ -Richtung gilt aufgrund der Unabhängigkeit der drei orthogonalen Raumvektoren die gleiche Beziehung. Die Gesamtenergie ist demnach

$$W_{kin} = W_{kin_x} + W_{kin_y} + W_{kin_z} = \frac{1}{2} m^* \langle v \rangle^2 = \frac{3}{2} kT \quad (2.65)$$

gleiche Aussage für  $y$ - und  $z$ -Richtung

$\langle v_x \rangle = 0$

$\langle v_y \rangle = 0$

$\langle v_z \rangle = 0$

verwende allgem.  $\vec{r}$  ( $\vec{r} \parallel \vec{E}$ ) (später)

klassische Thermodynamik

Kinetische Energie Teilchen mit einem Freiheitsgrad

Gesamtenergie bei drei Freiheitsgraden

Daraus berechnet sich die mittlere (thermische) Geschwindigkeit für eine Bewegung

$w_{kin} = \frac{1}{2} m^* \langle v \rangle^2 \rightarrow$   $v_{th} = \langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m^*}}$  THERMISCHE GESCHWINDIGKEIT  
LADUNGSTRÄGER ohne el. FELD (2.66)  
 der Ladungsträger in drei Dimensionen ohne elektrisches Feld.

**Beispiel:** Für ein Elektron in Si gilt  $m^* = m_{ec}^* = 0,26m_e$   
 Mit  $kT \approx 0,026\text{eV}$  bei 300K und  $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ J}$  ( $1\text{J} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$ ) ergibt sich

$v_{th} = \left( \frac{3 \cdot 0,026 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2}{0,26 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg s}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 2 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

Beispiel  
 Si @ 300K  
 200 km/s (schnell!)

**2.12.2 Ladungsträgerdichten außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichts**

Änderungen des Gleichgewichtszustandes in einem Halbleiter(gebiet) können durch „äußere“ Einflüsse hervorgerufen werden. Dazu gehören z. B. ein Spannungsabfall über dem Gebiet bzw. ein Stromfluss durch das Gebiet. Dazu gehört auch das Einbringen zusätzlicher, ggf. auch ortsabhängiger Ladungsträgerdichten (z. B. durch Lichteinstrahlung). Es ergeben sich dann die „Überschussladungsträgerdichten“  $n$  und  $p$ , die um  $\Delta n$  bzw.  $\Delta p$  von ihrem Gleichgewichtsdichten  $n_0, p_0$  abweichen.

äußere Einflüsse  
 (Spannung, Strom, Licht  
 ; )

$n = n_0 + \Delta n = N_C e^{-\frac{W_C - W_{Fn}}{kT}}$  (2.67)

$p = p_0 + \Delta p = N_V e^{-\frac{W_{Fp} - W_V}{kT}}$  (2.68)

Überschussladungsträgerdichten  
 $\Delta n, \Delta p$

Um weiterhin mit den uns schon vertrauten Verteilungsfunktionen für die Ladungsträgerdichten ähnlich wie in Gl. (2.22) und (2.25) arbeiten zu können, haben wir auf der rechten Seite eine Formulierung mit der gleichen Struktur gewählt. Als Unterschied zu den Berechnungen im Gleichgewichtsfall müssen wir anstelle des Fermi-Niveaus jetzt mit zwei unterschiedlichen „Quasi-Fermi-Niveaus“  $W_{Fp}, W_{Fn}$  arbeiten. Dadurch wird sowohl der Überschussanteil  $\Delta n, \Delta p$  als auch die Abweichung von der Eigenleitungsdichte  $n_i$  berücksich-

↓  
 verwende weiterhin  $N \cdot e^{-\frac{W_C - W_{Fn}}{kT}}$   
 Funktionen  
 ABER

therm. Geb. :  $n_0 + N_A^- = p_0 + N_D^+ \Rightarrow W_F$   
 außerhalb :  $\Delta n + n_0 + N_A^- = \Delta p + p_0 + N_D^+ \Rightarrow W_{Fn}, W_{Fp}$

QUASI-FERMI-NIVEAUS  
 $W_{Fn}, W_{Fp}$

tigt. Dies zeigt sich durch Multiplikation von  $p$  und  $n$ .

$$pn = \underbrace{N_c N_V e^{-\frac{W_g}{kT}}}_{n_i^2} e^{\frac{W_{Fn} - W_{Fp}}{kT}} \quad (2.69)$$

$$pn = n_i^2 e^{\frac{W_{Fn} - W_{Fp}}{kT}} \quad (2.70)$$

" Abstand  $W_{Fn} - W_{Fp}$  bestimmt Abweichung von  $n_i$

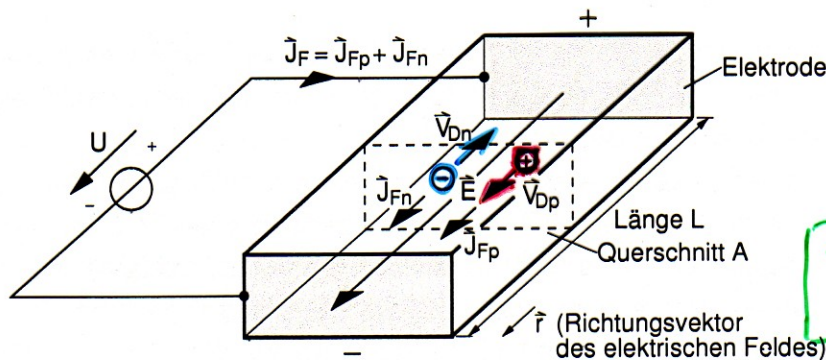
Der Abstand zwischen  $W_{Fn}$  und  $W_{Fp}$  bestimmt also die Abweichung von der Gleichgewichtsdichte. Für  $pn > n_i^2$  liegt  $W_{Fn}$  im Bändermodell über  $W_{Fp}$ . Für  $pn < n_i^2$  liegt  $W_{Fp}$  über  $W_{Fn}$ . Wir werden gegen Ende dieses zweiten Hauptkapitels genug Wissen haben, um genauere Aussagen über den Verlauf der Quasi-Fermi-Niveaus machen zu können. Wir werden dann auch anhand der Kontinuitätsgleichung sehen, dass die Erhöhung einer Ladungsträgerdichte aufgrund der Ladungsneutralität ( $\Delta n = \Delta p$ , wird später gezeigt) nahezu unmittelbar eine Erhöhung der anderen Ladungsträgerart bewirkt. Daher folgt für  $pn > n_i^2$  :  $p > p_0$ ,  $n > n_0$  bzw. für  $pn < n_i^2$  :  $p < p_0$ ,  $n < n_0$ .

$pn > n_i^2 \Rightarrow W_{Fn} > W_{Fp}$   
 $pn < n_i^2 \Rightarrow W_{Fn} < W_{Fp}$

**2.12.3 Der Halbleiter im elektrischen Feld**

- kein thermodyn. Gleichgewicht  
- Drift (Feld-) Strom  $\vec{J}_F, \vec{J}_F$

Wir betrachten den Halbleiter, in dem ein elektrisches Feld wirkt. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass das elektrische Feld durch eine Anordnung wie in Abb. 2.16 erzeugt wird und zwischen den beiden stirnseitig angebrachten Elektroden homogen ist.



Def.: Stromrichtung = Flussrichtung der Löcher  $\oplus$   
= Richtung  $\vec{E}$

$\vec{J}_F = \vec{J}_{Fp} + \vec{J}_{Fn}$   
Beide Ladungsträger tragen zum Stromfluss bei

Abb. 2.16: Definition von Stromdichten für Löcher und Elektronen.

Aufgrund der Kraftwirkung des elektrischen Feldes

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad , \quad q = -e, +e \quad (2.71)$$

$$q = \begin{cases} -e & \text{Elektron} \\ +e & \text{Loch} \end{cases}$$

erfährt ein Ladungsträger eine, zu der Kraft proportionale Beschleunigung entsprechend

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = \vec{F} = m^* \vec{a} = m^* \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad m^* = m_{ec}^*, m_{hc}^*,$$

Bewegungsgleichung für Elektr. und Löcher

die ihn nach jedem Stoß wieder beschleunigt. Der Startwert der Geschwindigkeit nach einem Stoß ist wieder ein Zufallsprozess mit dem Mittelwert Null (keine Vorzugsrichtung, d. h. beliebige Richtung). Die Beschleunigung erfolgt jedoch gerichtet und lässt Elektronen entgegen und Löcher in der Richtung des elektrischen Feldes driften. Abb. 2.17 zeigt das an einem Beispielverlauf.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m^*} \vec{E} = \text{const. Beschleunig. in Richtung } \vec{E}, \vec{r}$$

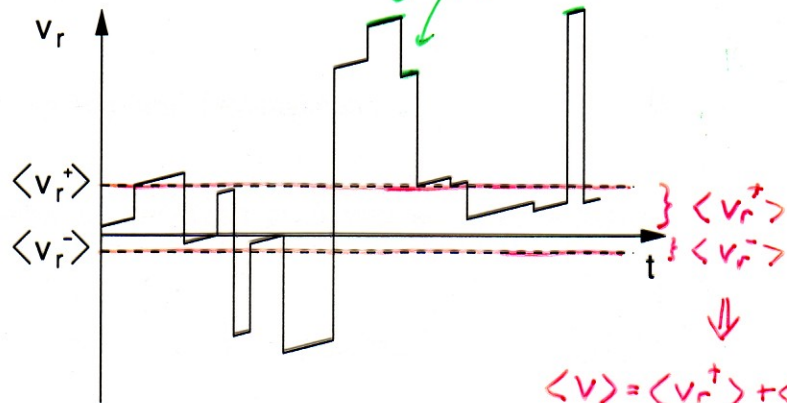
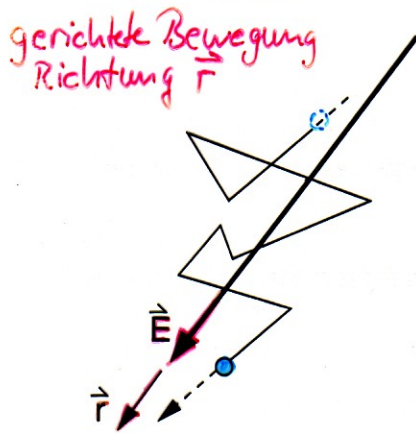


Abb. 2.17: Links: Gerichtete Driftbewegung eines Ladungsträgers aufgrund der Kraftwirkung eines elektrischen Feldes. Rechts: Beschleunigung der Ladungsträger nach jedem Stoß. Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}_r$  zeigt in Richtung von  $\vec{E}$ .

Aufgrund der Richtung des elektrischen Feldes werden die Ladungsträger in dem Beispiel in positive  $\vec{r}$ -Richtung beschleunigt und in entgegengesetzter Richtung abgebremst. Anhand dieses Verhaltens ist klar, dass es sich in diesem Beispiel bei den Ladungsträger um ein Loch handelt (vgl. Feldrichtung in Abb. 2.17). Die gleiche Überlegung gilt für Elektronen, die sich aufgrund der entgegengesetzten Ladung in die entgegengesetzte Richtung bewegen. Die gerichtete Bewegung drückt sich dadurch aus, dass eine resultierende Geschwindigkeitskomponente, hier in  $x$ -Richtung  $\langle v \rangle = \langle v_r^+ \rangle + \langle v_r^- \rangle > 0$  entsteht.

Wir wollen die resultierende Geschwindigkeit (Driftgeschwindigkeit) ermitteln und mit ihrer Hilfe die Stromdichte als die Zahl der Elektronen, die pro Zeiteinheit einen Querschnitt durchströmen, bestimmen. Dazu nehmen wir an, dass für viele Stöße eines Elektrons die gleichen statistischen Aussagen wie für jeweils einen Stoß vieler Elektronen gelten (ergodisch). Da sehr viele Elektronen den Querschnitt in einem Zeitintervall von der mittleren Dauer zwischen zwei Stößen passieren, ist die Statistik in jedem dieser Zeitintervalle erfüllt. Gemäß der Statistik besitzen die Ladungsträger unmittelbar nach dem Stoß keine Vorzugsrichtung und tragen daher im Mittel nicht zum Stromfluss bei. Daher braucht nur der Geschwindigkeitszuwachs der Ladungsträger zwischen den Stößen berücksichtigt zu werden. Unmittelbar nach dem Stoß beträgt er Null und wächst linear bis zum nächsten Stoß an. Abb. 2.18 links zeigt dies anhand eines Beispielverlaufs, der aus Abb. 2.17 hervorgeht, wenn der Startwert nach jedem Stoß zu Null gesetzt wird.

Vereinfachung:  
Mittlerer Stoßprozess

Annahme 1  
ergodisch

Annahme 2  
Stoßprozess zufällig

Ladungsträger haben nach Stoß keine Vorzugsricht.

betrachte nur Geschwindigk.-zuwachs zwischen den Stößen

Definiere mittleren Stoßprozess mit  $v_D, \tau_c$

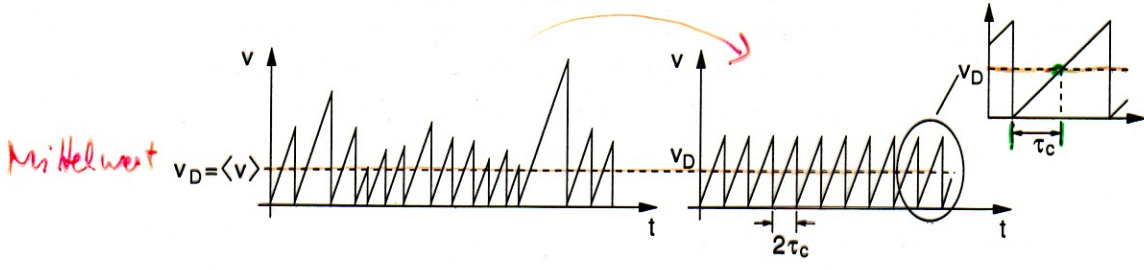


Abb. 2.18: Links: Zeitverlauf der Driftgeschwindigkeit eines Ladungsträgers. Rechts: Definition einer mittleren Stoßzeit.

Definition  
 $v_D$ : Driftgeschw. (Mittelwert)

$\tau_c$ : mittlere Stoßzeit

Der Mittelwert

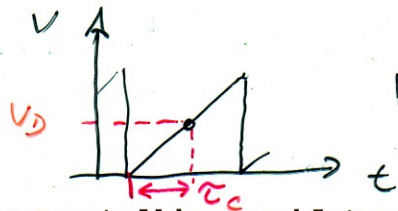
$$v_D = \langle v \rangle \tag{2.73}$$

dieses Geschwindigkeitsprofils ist die sog. Driftgeschwindigkeit. Sie ist identisch mit dem Mittelwert der Geschwindigkeit  $v_r = \langle v_r^+ \rangle + \langle v_r^- \rangle$  in Abb. 2.15. Die Driftgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich eine Ladungsträgerart unter Einfluss eines elektrischen Feldes im Mittel bewegt.

(Zeit bis Ladungsträger  $v_D$  erreicht)

Auch für die Zeitachse ist es sinnvoll mit Mittelwerten zu arbeiten. Wir definieren die mittlere Stoßzeit  $\tau_c$  als die Zeit, die ein Ladungsträger benötigt, um von Null auf Driftgeschwindigkeit zu beschleunigen. Sie beträgt die Hälfte der mittleren Zeit zwischen zwei Stößen. Die Beschleunigung in diesem

$v_D, \tau_c$ : arbeiten bei Ladungsträgertransport mit MITTELWERTEN



mittlerer Stoßprozess

linearen Modell ist dann

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_D}{\tau_c} \quad \text{Beschleunigung} \quad (2.74)$$

Diese Beschleunigung findet in jedem der äquidistanten Zeitintervalle (vgl. 2.18 rechts)  $\tau_c$  statt und lässt sich daher zu einer konstanten Beschleunigung über  $t$  fortsetzen. Wir setzen  $\vec{a}$  in Gl. 2.72 ein und setzen diese mit Gl. 2.71 gleich und erhalten einen Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und Driftgeschwindigkeit

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \quad ; \quad \text{Umsstellen} \quad m^* \frac{\vec{v}_D}{\tau_c} = q \vec{E} \quad \text{Bewegungsgleichung} \quad (2.75)$$

Die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger

$$\vec{v}_D = \frac{\tau_c q}{m^*} \vec{E} = \pm \mu \vec{E} \quad ; \quad \mu := \frac{\tau_c e}{m^*} \quad (2.76)$$

ist für Elektronen und Löcher unterschiedlich. Für Elektronen gilt

$$\vec{v}_{Dn} = -\frac{\tau_{cn} e}{m_{ec}^*} \vec{E} = -\mu_n \vec{E} \quad \text{Elektronen-Driftgeschwindigkeit} \quad (2.77)$$

mit der Beweglichkeit der Elektronen

$$\mu_n := \frac{\tau_{cn} e}{m_{ec}^*} \quad \text{Beweglichkeit} \quad (2.78)$$

Entsprechend gilt für Löcher

$$\vec{v}_{Dp} = \frac{\tau_{cp} e}{m_{hc}^*} \vec{E} = \mu_p \vec{E} \quad \text{Löcher-Driftgeschwindigkeit} \quad (2.79)$$

mit der Beweglichkeit der Löcher

$$\mu_p := \frac{\tau_{cp} e}{m_{hc}^*} \quad \text{Beweglichkeit} \quad (2.80)$$

Merken:

$$\mu \sim \tau$$

$$\mu \sim \frac{1}{m^*}$$

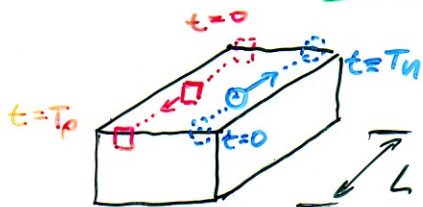
$$v_D \sim \mu \cdot E$$

Wir können jetzt die Stromdichte  $\vec{J}_F$  in der Fläche  $A$  des Halbleiters aufgrund des elektrischen Feldes berechnen. Sie setzt sich zusammen aus den Stromdichten der Elektronen und Löcher.

$$\vec{J}_F = \vec{J}_{Fn} + \vec{J}_{Fp} = \frac{1}{A} (I_{Fn} + I_{Fp}) \vec{e}_r \quad (2.81)$$

$$= \frac{1}{A} \left( \frac{-Q_n}{T_n} + \frac{Q_p}{T_p} \right) \vec{e}_r \quad (2.82)$$

Berechne Strom



$Q_n, Q_p$  : Elektronen u. Löcherladung die in der Zeit  $T_n, T_p$  den Halbleiter durchströmen

$$\vec{J} = \frac{1}{A} \left( \frac{-Q_n}{T_n} + \frac{Q_p}{T_p} \right) \vec{e}_r$$



Darin ist  $Q_n, Q_p$  die gesamte Elektronen- und Löcherladung, die in der Zeit

$$T_n = \frac{L}{|\vec{v}_{Dn}|} \text{ bzw. } T_p = \frac{L}{|\vec{v}_{Dp}|} \quad \text{Durchlaufzeiten} \quad (2.83)$$

den Halbleiter mit der Länge  $L$  von einer Elektrode zur Anderen durchströmt (vgl. Abb. 2.16). Einsetzen von  $T_n$  und  $T_p$  ergibt

$$\vec{J}_F = \frac{1}{A} \left( \frac{-Q_n |\vec{v}_{Dn}|}{L} + \frac{Q_p |\vec{v}_{Dp}|}{L} \right) \vec{e}_r = e (n_0 \vec{v}_{Dn} + p_0 \vec{v}_{Dp}) \quad (2.84)$$

$$-en_0 = \frac{Q_n}{V}$$

$$ep_0 = \frac{Q_p}{V}$$

$$V = A \cdot L$$

Darin sind  $-en_0 = \frac{Q_n}{V}$  und  $ep_0 = \frac{Q_p}{V}$  die Ladungsträgerdichten im Halbleitervolumen  $V = A \cdot L$ .

Einsetzen der Driftgeschwindigkeiten ergibt die wichtige Beziehung für den Feldstrom aufgrund eines elektrischen Feldes in einem Halbleiter:

$$\vec{J}_F = \underbrace{e n_0 \mu_n \vec{E}}_{\vec{J}_{Fn}} + \underbrace{e p_0 \mu_p \vec{E}}_{\vec{J}_{Fp}} \quad (2.85)$$

sehr wichtig!  
**FELDSTROM**  
**(DRIFTSTROM)**

Die Leitfähigkeit des Halbleiters ist definiert als der Quotient

$$\sigma := \left| \frac{\vec{J}_F}{\vec{E}} \right| = e (n_0 \mu_n + p_0 \mu_p) = \sigma_n + \sigma_p \quad (2.86)$$

**Leitfähigkeit**

Damit läßt sich Gl. (2.85) verallgemeinert als das bekannte Ohmsche Gesetz

$$\vec{J}_F = \sigma \vec{E} \quad (2.87)$$

**Ohmsches Gesetz**

darstellen.

### 2.12.4 **Beweglichkeit**

Die Beweglichkeit wird durch die Art der Stöße, bzw. im Wellenmodell, durch die Art der Streuung die der Ladungsträger erfährt bestimmt. Eine Streuung führt immer zu einem Energieaustausch mit dem Streukörper sowie zu einem Richtungswechsel. Wir betrachten kurz die wichtigsten Arten der Streuung.

### 2.12.5 **Streuung an Störstellen**

Die Streuung an Störstellen ist besonders stark, wenn die Störstellen eine Ladung besitzen. Dies ist z. B. bei ionisierten Dotierungen der Fall. Die Stärke,

der auf elektrostatischen Kräften zwischen Ionen und Ladungsträger beruhenden Streuung, nimmt mit der Dauer der Wechselwirkung und der Anzahl der beteiligten Ionen zu.

Daher führen hohe Dotierungen zu einer Abnahme der Beweglichkeit.

Die Dauer der Wechselwirkung nimmt ab mit steigender Temperatur, da die thermische Geschwindigkeit (vgl. Gl. (2.66)) der Ladungsträger mit der Temperatur zunimmt.<sup>16</sup>

Daher nimmt die Streuung mit der Temperatur ab und die Beweglichkeit steigt.

In erster Näherung ergibt sich aus den Abhängigkeiten eine Proportionalität der Beweglichkeit von

$$\mu \sim \frac{T^{\frac{3}{2}}}{N^{\pm}} \quad (2.88)$$

wobei  $N^{\pm}$  die Dichte der ionisierten Störstellen erfasst.

Streuung an Störstellen  
 ↓  
 Coulomb Kräfte  
 ~ Dauer ~  
 ↑  
 Temperatur  
 ~ Ladung  
 (Dotierungskonzentrat.)  
 ~ N  
 ↓  
 $\mu \sim \frac{T}{N_{\text{Stör}}}$   
 $\mu \sim \frac{1}{N}$

**2.12.6 Gitterstreuung** Interaktion mit Phononen

Schwingungen des Gitters können durch Phononen beschrieben werden. Streuung am Kristallgitter bedeutet daher eine Wechselwirkung mit Phononen in Form einer Aufnahme oder Abgabe von Energie. Aus der Herleitung der Besetzungswahrscheinlichkeit wissen wir, dass die Dichte der Gitterschwingungen (Phononen) in einem Energieintervall mit der Temperatur zunimmt (vgl. Gl. (2.1)). Hierdurch sinkt die Streuzeit und damit die Beweglichkeit.

Theoretische Untersuchungen zeigen, dass Si, Ge die Beweglichkeit über Streuung an akustischen Phononen mit einer  $T^{-\frac{3}{2}}$ -Temperaturabhängigkeit erfolgt.

Bei Streuung an optischen Phononen ist eine  $T^{-\frac{1}{2}}$ -Abhängigkeit zu erwarten. Experimentelle Ergebnisse der Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit aufgrund von Gitterstreuungen zeigt Tabelle 2.3. Im Bereich der Temperaturen der Störstellenerschöpfung wird die Beweglichkeit meist von Gitterstreuung dominiert.

$f_{MB} \sim e^{-\frac{W}{kT}}$   
 ↓  
 $T \uparrow \Rightarrow f_{MB} \uparrow$   
 Dichte der Gitterschwingung.  
 nimmt mit T zu  
 ↓  
 $\mu_{\text{phon.}} \sim \frac{1}{T^x}$

<sup>16</sup>Genauer müsste die relative Geschwindigkeit zwischen Ladungsträger und Ionen betrachtet werden. Wir nehmen in der Relation die Geschwindigkeit der im Gitter eingebauten Ionen zu Null an.



	Ge	Si	GaAs
$\mu_n$	$\sim T^{-1,7}$	$\sim T^{-2,4}$	$\sim T^{-1,0}$
$\mu_p$	$\sim T^{-2,3}$	$\sim T^{-2,2}$	$\sim T^{-2,1}$

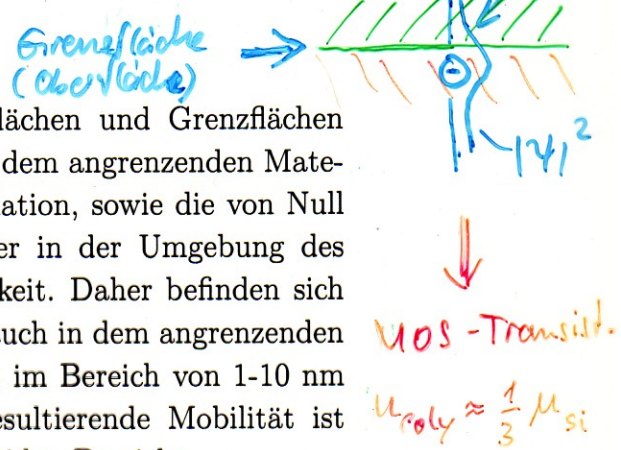
$\mu_{phon} \sim \frac{1}{T^x}$

Tabelle 2.3: Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit aufgrund von Phononenstreuung für verschiedene Halbleitermaterialien.

**2.12.7 Oberflächenstreuung**

Die Beweglichkeit von Ladungsträgern an Oberflächen und Grenzflächen wird durch die Beweglichkeit der Ladungsträger in dem angrenzenden Material bestimmt. Ursache hierfür ist die Unschärferelation, sowie die von Null verschiedenen Wellenfunktionen der Ladungsträger in der Umgebung des Ortes mit der höchsten Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Daher befinden sich Ladungsträger an der Grenze eines Mediums z.T. auch in dem angrenzenden Medium. Die Wellenfunktionen können dabei z. B. im Bereich von 1-10 nm in den angrenzenden Bereich überlappen. Die resultierende Mobilität ist dann eine Kombination der Beweglichkeiten der beiden Bereiche.

Dies führt z. B. dazu, dass Ladungsträger in der Inversionschicht eines MOS-Feldeffekttransistors eine bis zu drei mal geringere Beweglichkeit wie im Halbleitermaterial selbst besitzen. Die Ursache liegt zum einen an der deutlich geringeren Beweglichkeit der Elektronen in dem darüber liegenden amorphen Silizium (Polysilizium). Zum Anderen existieren geladene Oberflächenzustände, die der Beweglichkeit entsprechend der Wirkungsweise der ionisierten Störstellen reduzieren.



**2.12.8 Werte für die Beweglichkeit**

Die resultierende Beweglichkeit ergibt sich unter Berücksichtigung aller Streuprozesse zu

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{1}{\mu_i}$$

Resultierende Beweglichkeit (2.89) (kleinstes  $\mu_i$  dominiert)

Tabelle 2.4 gibt einige Werte der Beweglichkeit für p- und n-Dotierung in Abhängigkeit der Dotierungskonzentration bei Raumtemperatur an.

Abb. 2.19 zeigt den dazu gehörenden Verlauf in Abhängigkeit von der Temperatur.

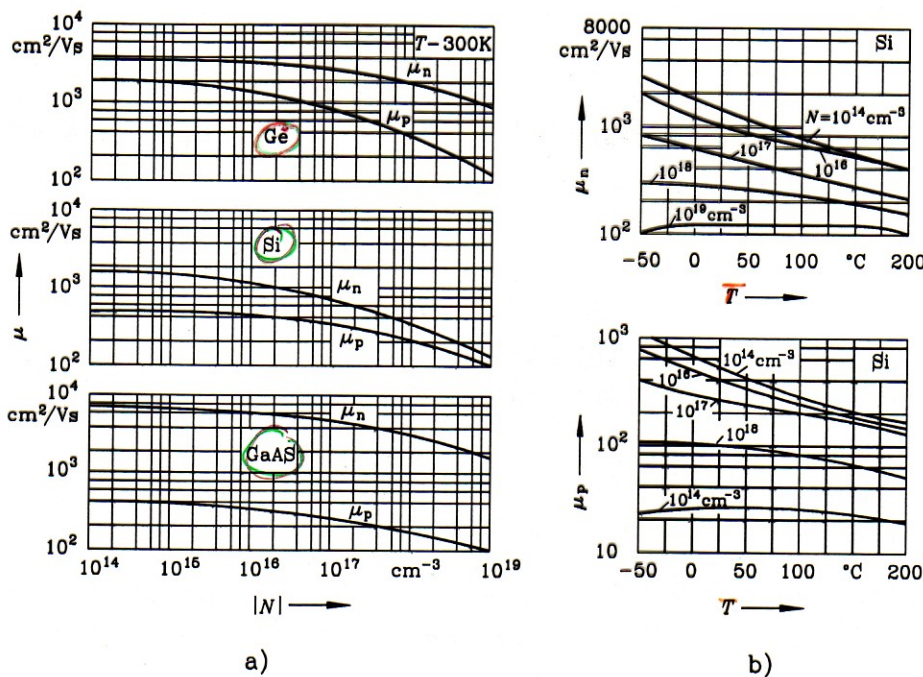
$\frac{N}{\text{cm}^2}$	$\mu_n$ As	$\mu_n$ P	$\mu_p$ B
$10^{15}$	1359	1362	462
$10^{16}$	1177	1184	429
$10^{17}$	727	721	317
$10^{18}$	284	277	153
$10^{19}$	108	115	71

Dotierungs-  
abhängigkeit

$\mu_n > \mu_p$ ,  $\mu \downarrow$  für  $N \uparrow$

Tabelle 2.4: Beweglichkeit von Majoritäten in Si bei Raumtemperatur für verschiedene Dotierungen und Konzentrationen in  $\frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$ .

Material-  
abhängig



Temperatur-  
abhängig

Abb. 2.19: Beweglichkeit von Elektronen und Löchern als Funktion der Dotierungskonzentration (links) und der Temperatur (rechts).

### 2.12.9 Heiße Ladungsträger, Sättigungsgeschwindigkeit

Bei der Ermittlung der Driftgeschwindigkeit haben wir die mittlere Stoßzeit  $\tau$  definiert. Sie wurde bestimmt durch die Hälfte des zeitlichen Mittelwertes zwischen zwei Stößen. Die Zeit zwischen zwei Stößen wird durch die mittlere

$\frac{N}{\text{cm}^3}$	$n$ As	$n$ P	$p$ B
$10^{15}$	1359	1362	462
$10^{16}$	1177	1184	429
$10^{17}$	727	721	317
$10^{18}$	284	277	153
$10^{19}$	108	115	71

Dotierungs-  
abhängigkeit

$\mu_n > \mu_p$ ,  $\mu \downarrow$  für  $N \uparrow$

Tabelle 2.4: Beweglichkeit von Majoritäten in Si bei Raumtemperatur für verschiedene Dotierungen und Konzentrationen in  $\frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$ .

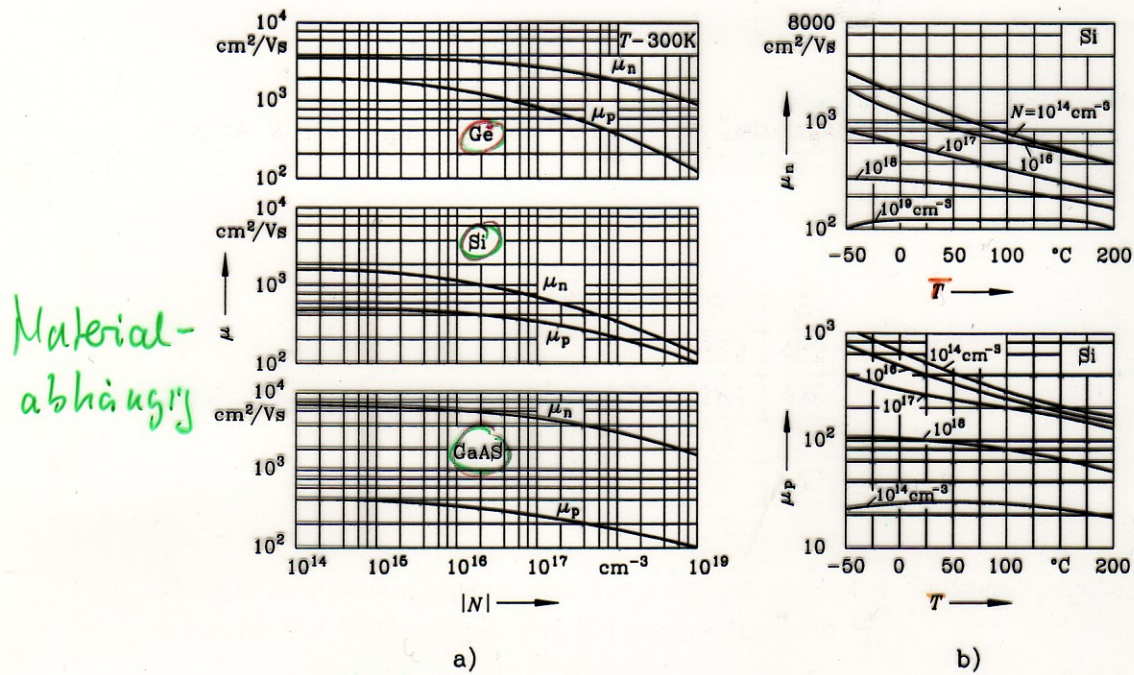


Abb. 2.19: Beweglichkeit von Elektronen und Löchern als Funktion der Dotierungskonzentration (links) und der Temperatur (rechts).

### 2.12.9 Heiße Ladungsträger, Sättigungsgeschwindigkeit

Bei der Ermittlung der Driftgeschwindigkeit haben wir die mittlere Stoßzeit  $\tau$  definiert. Sie wurde bestimmt durch die Hälfte des zeitlichen Mittelwertes zwischen zwei Stößen. Die Zeit zwischen zwei Stößen wird durch die mittlere

### 2.12.9 Heiße Ladungsträger, Sättigungsgeschwindigkeit

Bei der Ermittlung der Driftgeschwindigkeit haben wir die mittlere Stoßzeit  $\tau_c$  definiert. Sie wurde bestimmt durch die Hälfte des zeitlichen Mittelwertes zwischen zwei Stößen. Die Zeit zwischen zwei Stößen wird durch die Gesamtgeschwindigkeit aus thermischer Geschwindigkeit und Driftgeschwindigkeit

$$\mathbf{v} = v_{th} + v_D$$

Gesamtgeschwindigkeit (Mittelwert) der Ladungsträger (2.90)

der Ladungsträger bestimmt. Solange  $v_{th} \gg v_D$ , ist die Stoßzeit unabhängig von einem angelegten Feld und damit konstant.

Bei sehr hohen Feldstärken erreicht die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger die Größenordnung der thermischen Geschwindigkeit und kann nicht mehr vernachlässigt werden. Dadurch steigt die Gesamtgeschwindigkeit der Ladungsträger durch das elektrische Feld an. Als Folge werden die mittlere Stoßzeit und die Beweglichkeit abhängig von der Feldstärke.

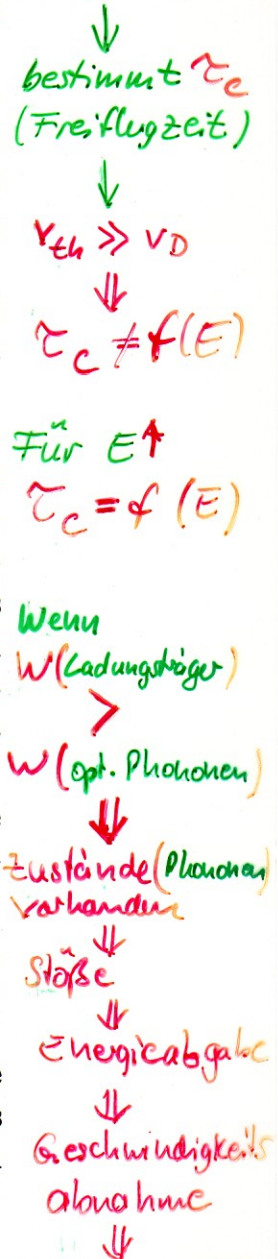
Da sich die Gesamtgeschwindigkeit mit steigender Feldstärke erhöht, nimmt die mittlere Stoßzeit  $\tau_c$  und wegen Gl. (2.76) auch die Beweglichkeit ab. In diesem Bereich gilt das Ohmsche Gesetz nach Gl. (2.87) nicht mehr.

In der Beschreibung im Wellenmodell entsteht die Abnahme der Geschwindigkeit dadurch, dass die Energie der Ladungsträger durch das elektrische Feld steigt. Ist das elektrische Feld so stark, dass die Energie der Ladungsträger größer wird als die Energie der optischen Phononen, steigt die Wahrscheinlichkeit, Energie an ein optisches Phonon abzugeben, abrupt an. Dies führt dazu, dass die Geschwindigkeit der Ladungsträger abnimmt und bei höheren Feldstärken in einen Sättigungsverlauf, wie in Abb. 2.20 links gezeigt, übergeht. Der Maximalwert der Driftgeschwindigkeit ist die sog. Sättigungsgeschwindigkeit  $v_{sat}$ .

Die Geschwindigkeit von Ladungsträgern in Materialien wie Si, die keine erreichbaren höheren Bänder bzw. Bandstrukturen, wie z. B. bei GaAs, besitzen, kann beschrieben werden durch

$$v_D(E) = \frac{\mu E}{1 + \frac{\mu E}{v_{sat}}} \quad (2.91)$$

Wir merken uns den Übergang der Driftgeschwindigkeit in die konstante Sättigungsgeschwindigkeit bei hohen Feldstärken. Dieser Übergang wird uns später bei der Behandlung des Feldeffekt-Transistors im Abschnürbereich begegnen.



Sättigungsgeschwindigkeit

( $v_D = \text{const}$  für große  $E$ )

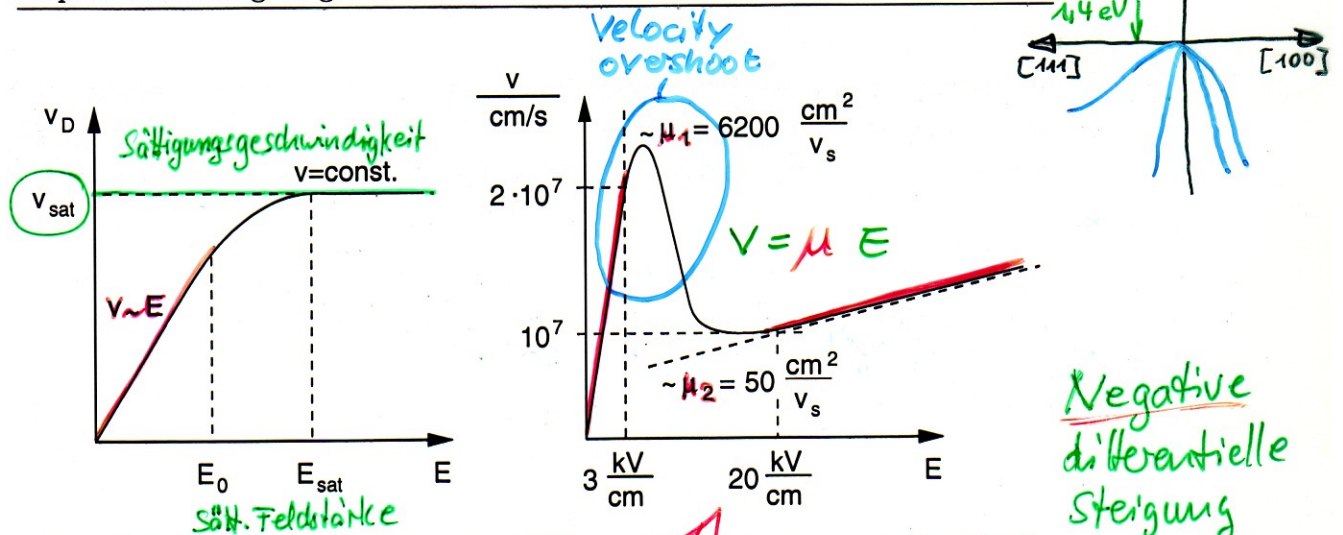


Abb. 2.20: Links: Abhängigkeit der Driftgeschwindigkeit  $v_D$  von der Größe des elektrischen Feldes. Bei  $E = E_0$  geht die lineare Abhängigkeit in einen Sättigungsverlauf über. Bei  $E = E_{sat}$  ist die Sättigungsgeschwindigkeit  $v_{sat}$  erreicht. Rechts: Feldabhängigkeit der Driftgeschwindigkeit bei GaAs.

### 2.12.10 Gunn-Effekt, velocity overshoot

Bei Halbleitermaterialien wie GaAs oder InP tritt ebenfalls eine Abweichung von einem linearen  $v_D(E)$ -Zusammenhang bei hohen Feldstärken auf. Ursache ist jedoch nicht eine verringerte mittlere Stoßzeit, sondern eine vergrößerte effektive Masse. Dies führt nach Gl. (2.77) und (2.78) ebenfalls zu einer Verringerung von Driftgeschwindigkeit und Beweglichkeit.

Die Ursache für die bei hohen Feldstärken vergrößerte effektive Masse liegt in der Struktur des Leitungsbandes dieser Halbleiter. Betrachten wir z. B. die Bandstruktur von GaAs in Abb. 1.40, so sehen wir, dass um  $\Delta W = 0,36$  eV über dem Hauptminimum, das den Bandabstand von 1,43 eV bildet, ein Nebenminimum liegt. Die Krümmung des Nebenminimums ist geringer als die des Hauptminimums. Nach Gl. (1.140) ist damit die Masse der Elektronen im Nebenminimum größer als die im Hauptminimum.

Bei hohen Feldstärken nehmen die Elektronen im Hauptminimum so viel Energie auf, dass sie die Energiedifferenz  $\Delta W = 0,36$  eV überwinden und in das Nebenminimum übergehen (Intrabandübergang/-streuung). Hier besitzen sie eine größere Masse und damit eine geringere Beweglichkeit und Driftgeschwindigkeit. Die Abnahme von Beweglichkeit und Driftgeschwindigkeit beim Übergang zu hohen Feldstärken zeigt Abb. 2.20

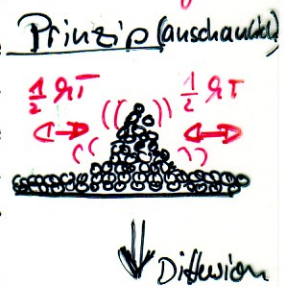
Negative  
differenzielle  
Steigung  
↓  
negativen  
Widerstand  
↓  
Verstärker

rechts. Die Spitze in der Geschwindigkeitskurve wird als sog. „velocity overshoot“ bezeichnet. Die Änderung der effektiven Masse durch Streuung der Elektronen in ein Nebenminimum mit größerer Masse wird nach seinem Entdecker als „Gunn“-Effekt bezeichnet.

Eine wesentliche Eigenschaft des Gunn-Effektes ist die negative differentielle Beweglichkeit beim Übergang in das Nebenminimum. Unter bestimmten Voraussetzungen, die über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgehen, können durch Ausnutzen dieses Effektes Verstärker, Oszillatoren und Impulsgeneratoren für die Mikrowellentechnik realisiert werden.

**2.12.11 Diffusion von Ladungsträgern** → Ursache: thermische Energie

Bisher haben wir die Bewegung von Ladungsträgern verursacht durch die Kraftwirkung eines elektrischen Feldes betrachtet. Bei der Diffusion von Ladungsträgern ist die Ursache der Bewegung ausschließlich die thermische Energie der Ladungsträger von  $\frac{1}{2} kT$  je Freiheitsgrad ( $x, y, z$ ). Diese thermische Energie ist der Motor des Diffusionsprozesses. Bei  $T = 0$  findet daher keine Diffusion statt.



Wir haben bereits in Kap. 2.12.1 gesehen, dass der Ladungsträger aufgrund dieser thermischen Bewegung zwischen zwei Stößen eine mittlere Geschwindigkeit  $v_{th}$  besitzt. Die Geschwindigkeit gemittelt über eine ausreichende Zahl von Stößen oder eine ausreichende Zahl von Ladungsträgern war jedoch Null, da zu jeder Geschwindigkeitskomponente  $\langle v_x^+ \rangle$  auch Ladungsträger mit einem Mittelwert der Geschwindigkeit  $\langle v_x^- \rangle$  in entgegengesetzter Richtung existieren. Die Beiträge durch die entgegengesetzten Komponenten heben sich auf, wodurch der Stromfluss gleich Null ist.



Diese Aussage gilt jedoch für den gesamten Halbleiter nur dann, wenn in diesem eine homogene Ladungsträgerverteilung herrscht. Bei inhomogener Verteilung, also bei unterschiedlicher Ladungsträgerdichte im Volumen des Halbleiters, kommt es zu einer Diffusion der Ladungsträger. Sie fließen dabei, getrieben von der thermischen Energie vom Ort der Anhäufung (höherer Dichte), in Richtung der niedrigeren Dichte. Das Bestreben des Auseinanderfließens hat eine Gleichverteilung der Ladungsträger über das gesamte Volumen zum Ziel. Im Zweidimensionalen läßt sich dieser Vorgang mit dem Auseinanderfließen eines Sandhaufens auf einer Rüttelplatte vergleichen. Der Rüttelvorgang entspricht der Anregung der Ladungsträger durch die thermische Energie.

Prinzip (anschaulich)  
 $\frac{1}{2} kT$   $\frac{1}{2} kT$   
 ↓ Diffusion  
 Homogene Ladungsverteilung  
 keine Diffusion  
 $\langle v_x^+ \rangle$  und  $\langle v_x^- \rangle$  heben sich auf.

Wir wollen eine mathematische Beschreibung für den Diffusionsvorgang herleiten. Dabei beschränken wir uns auf den wichtigsten Fall der eindimensionalen Dichteverteilung. Wir nehmen dabei an, dass sich die Dichte der Ladungsträger nur in Richtung der  $x$ -Koordinate ändert, wobei die Wahl der  $x$ -Koordinate hier willkürlich erfolgt.

Aufgrund dieser Wahl ist die Dichte in  $y$ - und  $z$ -Richtung konstant, so dass  $n(x, y, z) = n(x)$  gilt. Wir führen die folgenden Überlegungen zur Vereinfachung für eine allgemeine Ladungsträgerdichte  $n(x)$  durch und schließen aus den Ergebnissen im Anschluss auf die Diffusion von Elektronen und Löchern. Abb. 2.21 links zeigt beispielhaft einen Dichteverlauf in  $x$ -Richtung mit willkürlich gewähltem Nullpunkt.

*1-dim.*

*Ortsabhängiger Verlauf der Ladungsträgerdichte*

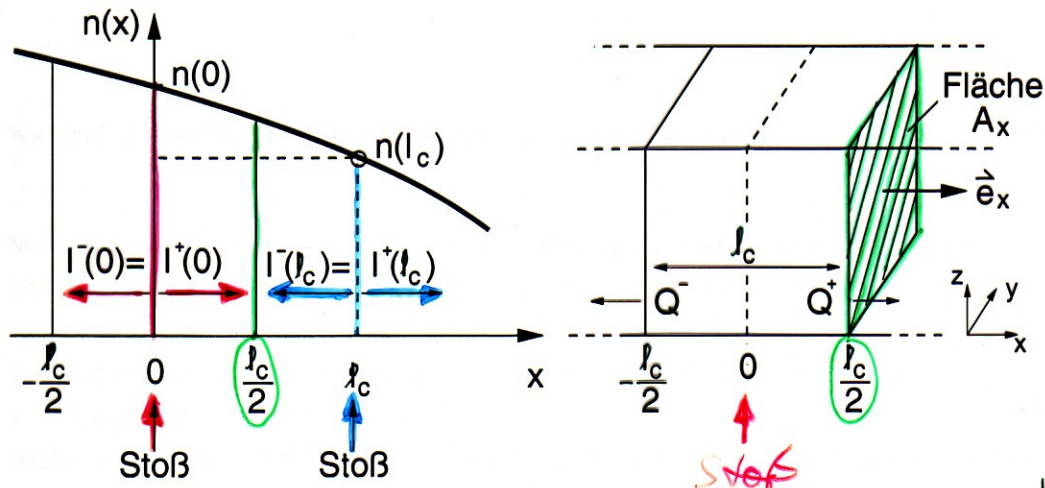


Abb. 2.21: Links: Ladungsträgerdichte  $n(x)$  in Abhängigkeit vom Ort. Stöße finden am Ort  $x = 0, l_c$  statt. Die Ströme in  $+x$ - und  $-x$ -Richtung an jedem der beiden Orte sind gleich.

Rechts: Ein Volumenelement mit homogener Ladungsträgerdichte auf der Fläche  $A_x$  in der  $y$ - $z$ -Ebene in Richtung  $\vec{e}_x$ .

*lc: mittlere freie Weglänge*

Da die thermische Energie eine Zufallsgröße darstellt, erfordert eine allgemeine mathematische Behandlung der thermischen Anregung der Ladungsträger die Beschreibung durch einen Zufallsprozess. Es zeigt sich anhand der daraus erhaltenen Ergebnisse, dass das Arbeiten mit Mittelwerten für unsere Fragestellungen zu den gleichen Ergebnissen führt.

Wir verwenden daher die bereits zuvor bei der Betrachtung von Ladungsträgern im elektrischen Feld definierte mittlere Stoßzeit (Freiflugzeit)  $\tau_c$ . Die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger ist gleich der thermischen Ge-

schwindigkeit. Wir ermitteln über  $\tau_c$  und die thermische Geschwindigkeit der Ladungsträger die mittlere (freie) Weglänge zwischen zwei Stößen

$$l_c = v_{th} \tau_c \quad \text{Mittlere freie Weglänge} \quad (2.92)$$

In unserem auf Mittelwerten basierenden Modell bewegt sich der Ladungsträger auf einer Strecke  $l_c$  frei, d.h. unbeeinflusst von jeglicher Wechselwirkung. Wir legen den Nullpunkt der  $x$ -Achse an die Stelle eines Stoßes. Dann erfolgt der nächste Stoß (im Mittel)<sup>18</sup> an der Stelle  $x = l_c$ .

Zur Herleitung einer Bilanzgleichung (Kontinuitätsgleichung) für die Ladungsträgerdichte in einem Volumenelement betrachten wir zuerst die Stromdichte am Ort  $x = \frac{l_c}{2}$  zwischen den beiden Stößen.

Vom Stoßzentrum ( $x = 0$ ) links von unserem Betrachtungsort erfolgt ein Beitrag

*Stromdichte durch Stoßzentrum  $x = 0$ :*

$$\vec{J}_x^+(0) = \frac{I^+(0)}{A_x} \vec{e}_x, \quad (2.93)$$

der aufgrund des Zufallscharakters des Stoßvorgangs auch in gleicher Größe in  $-\vec{e}_x$ -Richtung erfolgt. Zu einer Aussage über die  $y$ - und  $z$ -Richtung gelangen wir später sehr einfach.

Wir betrachten den Strom über die Dauer der halben mittleren Stoßzeit  $\tau_c$ , in der eine Ladung  $Q^+(0) = \frac{1}{2} \tau_c I^+(0)$  vom Stoßzentrum bei  $x = 0$  nach rechts durch die Fläche  $A_x$  an die Stelle  $x = \frac{l_c}{2}$  transportiert wird (vgl. Abb 2.21 rechts) und schreiben

$$\vec{J}_x^+(0) = \frac{Q^+(0)}{A_x \frac{l_c}{2}} \vec{e}_x \quad (2.94)$$

und mit Gl. (2.92)  $\tau_c = l_c / v_{th}$

$$\vec{J}_x^+(0) = \frac{Q^+(0) v_{th}}{A_x l_c \frac{1}{2}} \vec{e}_x = q n(0) v_{th} \vec{e}_x \quad (2.95)$$

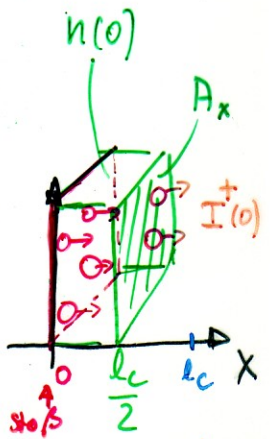
Darin bezeichnet  $n(0)$  die Ladungsträgerdichte in dem Volumenelement  $\frac{1}{2} A_x l_c$ , die wegen  $Q^+(0) = Q^-(0)$  identisch mit der Ladungsträgerdichte im Volumenelement  $A_x l_c$  ist.

Analog ergibt sich ein weiterer Beitrag zur Stromdichte bei  $x = \frac{l_c}{2}$  von der aus dem Stoßzentrum bei  $x = l_c$  nach links strömenden Ladung in Höhe von

*Stoßzentrum  $x = l_c$*

$$\vec{J}_x^-(l_c) = q n(l_c) v_{th} (-\vec{e}_x) \quad (2.96)$$

<sup>18</sup>Wir lassen im Folgenden diesen erläuternden Einschub weg und berücksichtigen weiterhin, dass es sich bei den betrachteten Größen um Mittelwerte handelt.

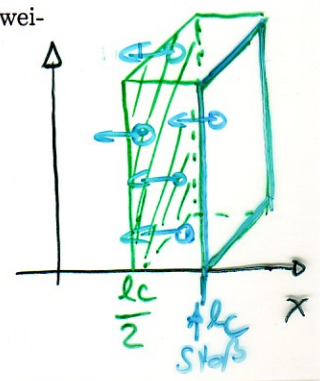


$$I^+(0) = \frac{Q^+(0)}{\frac{1}{2} \tau_c}$$

*(Strom durch  $A_x$  aufgrund Stoß bei  $x=0$ )*

$$Q = N \cdot q$$

$$q = \frac{Q}{V} = \frac{N}{V} \cdot q = n \cdot q$$





Die resultierende Stromdichte bei  $x = \frac{l_c}{2}$  ist dann

$$\vec{J}_x\left(\frac{l_c}{2}\right) = \vec{J}_x^+(0) + \vec{J}_x^-(l_c) \quad (2.97)$$

$$= q v_{th} (n(0) - n(l_c)) \vec{e}_x \quad (2.98)$$

$$\vec{J}_x\left(\frac{l_c}{2}\right) = -q v_{th} l_c \frac{n(l_c) - n(0)}{l_c} \vec{e}_x \quad (2.99)$$

Da  $l_c$  die in unserem Modell verwendete kleinstmögliche Quantisierung des Ortes ist, interpretieren wir den Quotiententerm als Differentialquotienten und schreiben allgemein

$l_c$  ist kleinste (mögliche) Ortsquantisierung  $\rightarrow$  Differentialquotient

Diffusionsstrom

$$\vec{J}_x(x) = -q v_{th} l_c \frac{dn(x)}{dx} \vec{e}_x = -q D \frac{dn(x)}{dx} \vec{e}_x \quad (2.100)$$

mit  $D := v_{th} l_c$  Diffusionskonstante. (2.101)

$D = v_{th} \cdot l_c$   
Diffusionskonstante

Immer in Richtung Ladungsträgerdichteänderung  
Ziel: homogene Verteilung

Dies ist die Formulierung des Diffusionsstromes aufgrund einer ortsabhängigen Ladungsträgerdichte  $n(x)$ .

Da wir uns auf eindimensionale Dichteprofile  $n(x)$  beschränken, ist  $\frac{dn}{dy} = 0$  und  $\frac{dn}{dz} = 0$ , wodurch  $\vec{J}_y = 0$  und  $\vec{J}_z = 0$  folgen.

Daher existiert nur eine Komponente der Stromdichte in Richtung der Ladungsträgerdichte-Änderung. Der Stromfluss ist dabei immer so gerichtet, dass es durch den Ladungstransport zu einem Abbau von Dichteunterschieden kommt.

$v_{th} ?$

Wir haben in Gl. (2.101) allgemein eine Diffusionskonstante definiert. Diese lässt sich auf die Beweglichkeit der Ladungsträger zurückführen, was wir im Folgenden zeigen.

Dazu schätzen wir die thermische Geschwindigkeit ab, indem wir berücksichtigen, dass die thermische Energie je Freiheitsgrad  $\frac{1}{2} kT$  beträgt. Für eine eindimensionale Bewegung in Richtung des Stromflusses (hier  $x$ -Richtung) gilt dann

$$\frac{1}{2} kT = \frac{1}{2} m^* v_{th}^2$$

Stromfluss in eine Richtung (ein Freiheitsgrad) (2.102)

Darin ist  $m^*$  die effektive Masse der Ladungsträger.

Mit  $v_{th}$  aus Gl. (2.102) und  $l_c$  aus Gl. (2.92) lässt sich die Diffusionskonstante schreiben

$$D = v_{th} l_c = v_{th}^2 \tau_c = kT \frac{\tau_c}{m^*} = \frac{kT}{e} \mu \quad (2.103)$$

$$e \cdot \frac{\tau_c}{m^*} = \mu$$

Für die letzte Umformung wurde die Definition der Beweglichkeit nach Gl. (2.76) verwendet.

Es ist gebräuchlich, den Ausdruck

$$\frac{kT}{e} := U_T \quad \text{TEMPERATURSPANNUNG} \quad (2.104)$$

als Temperaturspannung  $U_T$  zu definieren.

Es ergeben sich dann die Diffusionskonstanten für Elektronen und Löcher (Nernst-, Townsend- und Einstein-Beziehungen)

$$D_n = \frac{kT}{e} \mu_n = U_T \mu_n \quad \text{Diffusionskonstanten} \quad (2.105)$$

$$D_p = \frac{kT}{e} \mu_p = U_T \mu_p \quad (2.106)$$

mit den dazugehörigen Diffusionsströmen

$$\vec{J}_{Dn}(x) = e D_n \frac{dn}{dx} \vec{e}_x \quad \text{Diffusionsströme} \quad (2.107)$$

$$\vec{J}_{Dp}(x) = -e D_p \frac{dp}{dx} \vec{e}_x \quad (2.108)$$

Den Index  $x$  lassen wir zur Übersichtlichkeit im Folgenden weg und versehen die Stromdichten mit dem Index  $D$  für „Diffusion“.

Wir erkennen, dass die Beweglichkeit der Ladungsträger einen entscheidenden Einfluss auf den Vorgang des Stromflusses hat. Sie erscheint sowohl in den Drift- als auch in den Diffusionsgleichungen als Proportionalitätskonstante der Ursache ( $\vec{E}$  bei Drift,  $\frac{dn}{dx}$  bei Diffusion).

Beachten: Die Herleitung der Diffusionsgleichungen nimmt als Ursache nur die örtliche Änderung der Ladungsträgerdichte. Entsteht aufgrund dieser Änderung ein elektrisches Feld, so bewirkt dies zusätzlich einen Feld-Strom (Driftstrom).

### 2.12.12 Strom-Transportgleichungen

Wir haben zwei voneinander unabhängige Ursachen für einen Ladungsträgerstrom ermittelt. Im vorangegangenen Kapitel war die Ursache eine ortsabhängige Ladungsträgerdichte. Sie erzeugt den Diffusionsstrom, der

Wichtig

Beachten:  
 Ursache von  
 Div. Strom  
 ist  $\frac{dn}{dx} \neq 0$   
 $\Downarrow$   
 hat  $\frac{dn}{dx} \neq 0$   
 noch  $S \neq 0$   
 $\Downarrow$   
 $E \neq 0$   
 $\Downarrow$   
 Feldstrom  
 (zusätzlich)

unabhängig von einem elektrischen Feld ist. Ein elektrisches Feld erzeugt den Feld- oder Driftstrom. Das Feld kann dabei entweder von außen an den Halbleiter gelegt werden oder durch eine ortsabhängige Ladungsverteilung hervorgerufen werden.

*Schrittweise*

Der Gesamtstrom für Elektronen und Löcher ergibt sich aus der Überlagerung von Feld- und Diffusionsstrom aus Gl. (2.85) bzw. (2.107) und (2.108):

*Elektronen:*

$$\vec{J}_n = \vec{J}_{Fn} + \vec{J}_{Dn} = en\mu_n \vec{E} + eD_n \frac{dn}{dx} \vec{e}_x \quad (2.109)$$

*Löcher:*

$$\vec{J}_p = \vec{J}_{Fp} + \vec{J}_{Dp} = ep\mu_p \vec{E} - eD_p \frac{dp}{dx} \vec{e}_x \quad (2.110)$$

*(Symmetrie) - TRANSPORT - GLEICHUNGEN*

Wir betrachten im Folgenden nur elektrische Felder in  $x$ -Richtung. Wir verzichten daher zur Vereinfachung der Schreibweise auf die Vektordarstellung und betrachten  $J_n$  und  $J_p$  als Komponenten der Stromdichte in  $+x$ -Richtung.

*Vorlesung:*

*Vereinfachte Schreibweise da nur Abh. v.  $x$*

$$J_n = en\mu_n E + eD_n \frac{dn}{dx} \quad (2.111)$$

$$J_p = ep\mu_p E - eD_p \frac{dp}{dx} \quad (2.112)$$

$E$  zeigt in dieser Definition in  $+x$ -Richtung. Für die entgegengesetzte Richtung ist ein negatives Vorzeichen zu wählen.

Der Gesamtstrom im Halbleiter ergibt sich aus der Überlagerung von Elektronen und Löcherstrom

$$J = J_n + J_p \quad (2.113)$$

*Gesamtstrom*

### 2.12.13 Kontinuitätsgleichung

Die Fähigkeit, das elektrische Verhalten von Halbleiterbauelementen beschreiben zu können, geht einher mit der Fähigkeit, das Verhalten der Ladungsträger im Halbleiter zu beschreiben. Für das thermodynamische Gleichgewicht haben wir bereits mit Gl. (2.51) die wichtigste Neutralitätsbedingung als Bilanzgleichung aufgestellt.

Außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichts fließen die Ladungsträger durch den Halbleiter (Ladungsträger werden bewegt). Der Vorgang des Stromflusses ist in der zuvor abgeleiteten Transportgleichung beschrieben. Wir wissen daher, dass ein elektrisches Feld oder ein Dichtegradient die Ursache für einen Ladungsträgertransport und damit für einen Stromfluss sind.

# Ladungsträger - Bilanz $\rightarrow$ Kontinuitätsgleichung ("woher kommen sie, wohin gehen sie?")

Durch den Stromfluss befindet sich der Halbleiter außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichts, wodurch nach Gl. (2.67) und (2.68) eine Abweichung der Ladungsträgerdichten von den Gleichgewichtsdichten und damit von der Ladungsneutralität resultiert. Die Abweichung kann dabei lokal (Anhäufung von Ladungsträgern) oder global (homogener Halbleiter in elektrischem Feld) sein.

Über die Erzeugung und Vernichtung (Generation und Rekombination) von Ladungsträgern haben wir bisher noch keine Aussage gewonnen. Auch der Aspekt der Zeitabhängigkeit von Vorgängen, die mit Ladungsträgern verknüpft sind, wurde bisher nicht beschrieben.

Das wollen wir im Folgenden nachholen, indem wir eine vereinheitlichte Beschreibung in Form einer orts- und zeitabhängigen Bilanzgleichung für Ladungsträger aufstellen. Wir verwenden dazu die erste Maxwellsche Gleichung, die in allgemeingültiger Form Auskunft über die Ursache für einen Strom von Ladungsträgern gibt:

① 
$$\vec{J} = \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{1. MW-Gl.} \quad (2.114)$$

Danach können die Wirbel (rot) eines magnetischen Feldes  $\vec{H}$  oder ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld  $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}$  die Ursache sein. Das Bilden der Divergenz gibt die Quellen der Stromdichte an:

Quellen der Stromdichte

$$\text{div } \vec{J} = - \text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} \quad (2.115)$$

Dabei wird die Zulässigkeit der Vertauschung von Orts- und Zeitdifferentiation vorausgesetzt. Der Ausdruck  $\text{div } \vec{D}$  steht für die Quellen des elektrischen Feldes.

Wir wissen durch die dritte Maxwellsche Gleichung

② 
$$\rho = \text{div } \vec{D} = \text{div } \epsilon \vec{E} = \epsilon \text{div } \vec{E} \quad \text{3. MW-Gl.} \quad (2.116)$$

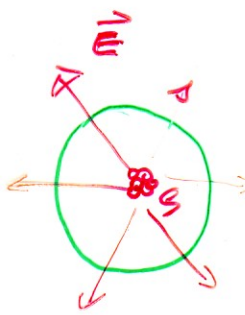
mit  $\epsilon = \text{const.}$ , dass die Quellen des elektrischen Feldes aus einer Raumladungsdichte  $\rho$  gebildet werden. Für unsere eindimensionale Betrachtung geht die Maxwellsche Gleichung wegen  $\text{div } \vec{D}(x) = \frac{d}{dx} D$  über in

Divergenz im Eindimensionalen

$$\rho = \frac{dD}{dx} = \epsilon \frac{dE}{dx} \quad (2.117)$$

Dabei ist die Raumladungsdichte  $\rho = \rho(x)$  auch ortsabhängig. Generell wird

① + ②  $\Rightarrow$  
$$\text{div } \vec{J} = - \frac{\partial}{\partial t} \rho$$
 Quellen des Stromes sind zeitabhängige Raumladungsdichten  $\rho$



$\rho$ : Raumladungsdichte

die Raumladungsdichte an einem Ort immer durch die Summe aller Ladungsdichten an diesem Ort gebildet. Daher gilt immer

$$\rho = e(p + N_D^+ - n - N_A^-) \quad (2.118)$$

*allgemeine Formulierung der Ladung in einem HL.*

Je nach Bedarf kann  $\rho$  auch alternativ mit Gl. (2.67) und (2.68) geschrieben werden als

$$\rho = e(\overset{p}{p_0 + \Delta p} + N_D^+ - \overset{n}{n_0 - \Delta n} - N_A^-) \quad (2.119)$$

*n, p: Überschussladungsträgerdichten*

$$\rho = e(\Delta p - \Delta n), \quad (2.120)$$

*alternative Formulierung*

wobei für die alternative Darstellung im zweiten Schritt die Neutralitätsbedingung verwendet wurde.

Für alle Überlegungen im Rahmen dieser Vorlesung wird der Halbleiter im Bereich der Störstellenerschöpfung betrieben. Das bedeutet, dass alle Dotierungsatome ionisiert sind ( $N_D^+ = N_D$ ,  $N_A^- = N_A$ ) und es auch bleiben. Daher gilt

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial N_A^-}{\partial t} = 0. \quad (2.121)$$

*Störstellenerschöpfung (alle Störstellen sind und bleiben ionisiert)*

Dies berücksichtigen wir, wenn wir in Gl. (2.115) für die Quellen des elektrischen Feldes die Raumladung entsprechend Gl. (2.117) mit den beiden alternativen Darstellungen nach Gl. (2.118) und (2.120) einsetzen:

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho = -e \frac{\partial}{\partial t} (p - n) = -e \frac{\partial}{\partial t} (\Delta p - \Delta n). \quad (2.122)$$

*Kontinuitätsgleichung (allgemeine Formulierung)*

Wir werden (nur) in diesem Kapitel mit beiden alternativen Darstellungen arbeiten. Für die spätere Arbeit mit den Gleichungen kann dann die für das jeweilige Problem passende Darstellung verwendet werden.

Gleichung (2.122), die wir erhalten haben, ist die Kontinuitätsgleichung für Raumladungen. Wir werden sie im weiteren Verlauf genauer diskutieren und erläutern. Die von uns benötigte eindimensionale Darstellung lautet

*1-dim. Darstellung*

$$\frac{d}{dx} \vec{J}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -e \frac{\partial}{\partial t} (p(x, t) - n(x, t)) = -e \frac{\partial}{\partial t} (\Delta p(x, t) - \Delta n(x, t)). \quad (2.123)$$

Wir wissen, dass sich die Stromdichte auf der linken Seite der Kontinuitätsgleichung aus einem Elektronen- und einem Löcherstrom (vgl. Gl. (2.113)) zusammensetzt. Indem wir dies explizit schreiben, erhalten wir aus Gl. (2.123)

eine Bilanzgleichung für die Quellen des Elektronen- und Löcherstroms (zunächst wieder in der allgemeinen dreidimensionalen Darstellung)

$div \vec{j} = div \vec{j}_n + div \vec{j}_p = e \frac{\partial n}{\partial t} - e \frac{\partial p}{\partial t} = e \frac{\partial \Delta n}{\partial t} - e \frac{\partial \Delta p}{\partial t}$  (2.124)

Die Angabe der Orts- und Zeitabhängigkeit aller darin enthaltenen Größen lassen wir der Übersichtlichkeit wegen weg.

Wir können diese Bilanzgleichung in zwei separate Bilanzgleichungen für Elektronen und Löcher aufspalten:

**Elektronen**  $\frac{1}{e} div \vec{j}_n = \frac{\partial n}{\partial t} + R = \frac{\partial \Delta n}{\partial t} + R$  (2.125)

**Löcher**  $\frac{1}{e} div \vec{j}_p = -\frac{\partial p}{\partial t} - R = -\frac{\partial \Delta p}{\partial t} - R$ , (2.126)

die durch Überlagerung (Addition) wieder die Gesamtbilanz nach Gl. (2.124) ergeben. In den separaten Gleichungen ist hier zunächst rein formal eine Funktion  $R = R(\vec{r}, t)$  eingeführt worden, da die Aufspaltung diesen Freiheitsgrad erlaubt, denn  $R(\vec{r}, t)$  verschwindet durch die Überlagerung der beiden Ladungsträgerströme identisch.

Wir nennen  $R(\vec{r}, t)$  die „Nettorekombinationsrate“ (oder auch den „Rekombinationsüberschuss“). Sie ist maßgeblich bestimmend für den Stromfluss in Halbleiterbauelementen und wird ausführlich im folgenden Kapitel behandelt. An dieser Stelle können wir schon folgende Eigenschaften von  $R$  anhand der Art der Einbettung in die Bilanzgleichungen feststellen:

1. Die Bilanzgleichungen für Elektronen und Löcher sind nicht unabhängig. Sie werden über die Nettorekombinationsrate gekoppelt. (Die direkte Kopplung über  $R$  ist das Resultat der Annahme nach Gl. (2.121).)
2. Die Einheit von  $R$  ist  $\frac{1}{cm^3 s}$ , also Ladungsträgerdichte pro Sekunde. Daher erläutert sich der Begriff „Rate“ in der Bezeichnung Nettorekombinationsrate. Es wird demnach die Änderung einer Ladungsträgerdichte pro Zeiteinheit beschrieben. Es läßt sich daher immer für  $R$  eine formale Darstellung in der Form

$R = \frac{\Delta n}{\tau}$  (2.127)

verwenden. Darin repräsentiert  $\Delta n$  eine allgemeine Änderung einer Ladungsträgerdichte (Elektronen sowie Löcher). Auf die physikalische Repräsentation der darin enthaltenen Größen werden wir in Kapitel 2.21 zurückkommen.

Freiheitsgrad:  
**R**  
Nettorekombinationsrate

$J_n, J_p$   
über  $R$   
gekoppelt

$[R] = \frac{1}{cm^3 s}$   
↓  
"Rate"  
Änderung pro Zeit

3. Stellen wir uns die Divergenz der Stromdichten in der Integralform vor, so besagt die linke Seite von Gl. (2.125) und (2.126), dass durch die Hüllfläche des Integrals ein Strom entsprechend der darin enthaltenen Quellen oder Senken, die auf der rechten Seite der Gleichungen stehen, fließt. Die Nettorekombination  $R$  beschreibt also einen Vorgang, der innerhalb des betrachteten Halbleiterbereichs (im allgemeinen ein Volumenelement) abläuft. Wegen Punkt 2) besteht dieser Vorgang in der Erzeugung bzw. Vernichtung (Generation, Rekombination) von Ladungsträgern.

Allgemein können wir formal immer annehmen, dass eine Generation  $g$  und eine Rekombination  $r$  stattfinden, aus der die Nettorekombinationsrate hervorgeht:

$$R = r - g. \quad \begin{array}{l} r: \text{rekombiniert} \\ g: \text{generiert} \end{array} \quad (2.128)$$

Wir schreiben damit Gl. (2.125) und (2.126) in der allgemein gebräuchlichen Form der Kontinuitätsgleichungen für beide Ladungsträgerdichten:

$$\frac{1}{e} \operatorname{div} \vec{J}_n = r - g + \frac{\partial n}{\partial t} = r - g + \frac{\partial \Delta n}{\partial t} \quad (2.129)$$

$$-\frac{1}{e} \operatorname{div} \vec{J}_p = r - g + \frac{\partial p}{\partial t} = r - g + \frac{\partial \Delta p}{\partial t}. \quad (2.130)$$

Kontinuitätsgleichung  
(allgemein  
3-dim)

Bei der in dieser Vorlesung angenommenen eindimensionalen Ortsabhängigkeit geht die Bildung der Divergenz in die Ortsableitung nach  $x$  über und wir erhalten die eindimensionalen Kontinuitätsgleichungen in der Form, die wir im Folgenden verwenden werden:

$$\frac{1}{e} \frac{dJ_n}{dx} = R + \frac{\partial n}{\partial t} = R + \frac{\partial \Delta n}{\partial t}, \quad R = r - g \quad (2.131)$$

$$-\frac{1}{e} \frac{dJ_p}{dx} = R + \frac{\partial p}{\partial t} = R + \frac{\partial \Delta p}{\partial t}, \quad R = r - g. \quad (2.132)$$

KONTINUITÄTSGL.  
1-DIM.

Die linke Seite lässt sich, wie in Abb. 2.22 gezeigt, als die Differenz zwischen dem herausfließenden und dem hineinfließenden Strom in ein Volumenelement  $A dx$  interpretieren. Dabei ist  $A$  die Fläche, durch die der Strom homogen fließt. Die linke Seite liefert also die Ladungsträgerdichte pro Zeiteinheit, die in dem Volumen verbleibt. Die in dem Volumen verbleibende Ladungsträgerdichte entspricht der darin netto rekombinierten Ladungsträgerdichte