Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

SoSe 2011 **Blatt 1** **15.04.2011**

Aufgabe 1 *Zeitentwicklungsoperator*

Sei $\hat{H}$ ein zeitunabhängiger Hamiltonoperator mit einer orthonormalen Eigenbasis $\{|n\rangle\}$ und zugehörigen Eigenenergien E_n, für die $\hat{H} = \sum_n E_n |n\rangle\langle n|$ gilt. Die Eigenzustände sind vollständig $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$ und orthonormal $\langle n|\, m\rangle = \delta_{nm}$. Der Zustand zur Zeit $t = 0$ sei durch $|\psi(0)\rangle$ gegeben.

a) Schreiben Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ zur Zeit t in der Basis der Eigenzustände des Hamiltonoperators $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung die Zeitentwicklung des Koeffizienten $c_n(t)$. *(1 Punkt)*

b) Für hermitesche Operatoren A, B mit Kommutator $[A, B] = 0$ gilt die binomische Formel

$$(A + B)^l = \sum_{m=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} A^{l-m} B^m. \tag{1}$$

Sei $A = |n\rangle\langle n|$ und $B = |m\rangle\langle m|$, zeigen Sie zunächst dass A und B Projektoren sind ($A^2 = A$, $B^2 = B$), und dass $[A, B] = 0$ erfüllt ist. Benutzen Sie dann die binomische Formel, um

$$\exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right) = \sum_n \exp\left(-iE_n t/\hbar\right) |n\rangle\langle n| \tag{2}$$

zu zeigen. *(1 Punkt)*

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des unitären Zeitentwicklungsoperators $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, 0)|\psi(0)\rangle$. Zeigen Sie, dass das Ergebnis mit dem in Teilaufgabe a) übereinstimmt. *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie als Beispiel den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators $\hat{H} = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ in der Basis seiner Eigenzustände. Berechnen Sie nun die Zeitentwicklung der beiden Zustände

$$|\psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |\psi_2\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \equiv |\alpha\rangle\ . \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass der kohärente Zustand $|\alpha\rangle$ normiert ist. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Freies Teilchen*

Die Eigenzustände des Hamiltonoperator des freien Teilchens

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{4}$$

sind gegeben durch

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(ipx/\hbar\right)\ . \tag{5}$$

a) Geben Sie den Propagator des freien Teilchens an. Ergebnis:

$$K(x_f, t, x_i, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left(\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar t}\right) \tag{6}$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-iax^2\right) dx = \sqrt{\pi/a}\, e^{-i\pi/4}$. *(1 Punkt)*

b) Die klassische Trajektorie eines freien Teilchens, das sich während der Zeit t von x_i nach x_f bewegt, ist durch

$$x_{\text{cl}}(\tau) = x_i + \frac{(x_f - x_i)}{t}\tau \tag{7}$$

gegeben mit den Randbedingungen $x_{\text{cl}}(0) = x_i$ und $x_{\text{cl}}(t) = x_f$. Geben Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{\text{cl}}(x_{\text{cl}}, \dot{x}_{\text{cl}}, \tau)$ des freien Teilchens an, und bestimmen Sie die klassische Wirkung

$$\mathcal{R}_{\text{cl}} = \int_0^t \mathcal{L}_{\text{cl}} d\tau\,. \tag{8}$$

(1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass der Propagator aus Teilaufgabe a) mit Hilfe der klassischen Wirkung wie folgt geschrieben werden kann:

$$K(x_f, t, x_i, 0) = \left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 \mathcal{R}_{\text{cl}}}{\partial x_f \partial x_i}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{R}_{\text{cl}}\right)\,. \tag{9}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 3 *Propagator, Green'sche Funktionen und Resolvente*

Sei $\hat{H}$ ein zeitunabhängiger Hamiltonoperator mit Eigenzuständen $\{|n\rangle\}$ und Eigenenergien E_n, der sich als $\hat{H} = \sum_n E_n |n\rangle\langle n|$ schreiben lässt. Die Eigenzustände seien vollständig $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$ und orthonormal $\langle n|\, m\rangle = \delta_{nm}$. Sei $\hat{U}(t,t') = e^{-i\hat{H}(t-t')/\hbar}$ der zugehörige Zeitentwicklungsoperator und $K(x,t,x',t') = \langle x|\, \hat{U}(t,t')\, |x'\rangle$ der Propagator. Die retardierte und advancierte Green'sche Funktion lauten:

$$G_r(x,t,x',t') = \hat{K}(x,t,x',t')\Theta(t-t') \equiv G_r(x,x';\tau) \tag{10}$$

$$G_a(x,t,x',t') = -\hat{K}(x,t,x',t')\Theta(t'-t) \equiv G_a(x,x';\tau)\,, \tag{11}$$

und es gilt

$$K(x,t,x',t') = G_r(x,t,x',t') - G_a(x,t,x',t')\,. \tag{12}$$

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierten der retardierten und advancierten Green'schen Funktionen

$$\tilde{G}_\nu(x,x';E) = \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iE\tau/\hbar} G_\nu(x,x';\tau) d\tau \quad \text{für} \quad \nu = \{r,a\} \tag{13}$$

in der Notation der Vorlesung. Was ergibt sich für ein freies Teilchen? *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Rücktransformationen für $\tilde{G}_r(x,x';E) = \lim_{\eta\to 0^+}\sum_n \frac{\psi_n(x)\psi^*(x')}{E-E_n+i\eta}$ und $\tilde{G}_a(x,x';E) = \lim_{\eta\to 0^+}\sum_n \frac{\psi_n(x)\psi^*(x')}{E-E_n-i\eta}$ explizit:

$$G_\nu(x,x';\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iE\tau/\hbar}\tilde{G}_\nu(x,x';E)dE \quad \text{für} \quad \nu = \{r,a\}\,. \tag{14}$$

Hinweis: Eventuell ist folgende Darstellung der Θ-Funktion von Nutzen:

$$\Theta(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\xi+i\epsilon}e^{-i\xi x}d\xi = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\xi-i\epsilon}e^{i\xi x}d\xi \tag{15}$$

(3 Punkte)

c) Wir führen die Resolvente

$$\tilde{G}(z) \equiv \frac{1}{z-\hat{H}} \tag{16}$$

als Funktion von $z \in \mathbb{C}$ ein, deren Ortsdarstellung gegeben ist durch

$$\tilde{G}(x,x';z) \equiv \langle x|\,\tilde{G}(z)\,|x'\rangle = \sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{z-E_n}\,. \tag{17}$$

Man erhält die fouriertransformierten Green'schen Funktionen durch

$$\tilde{G}_r(x,x';E) = \lim_{\eta\to 0^+}\tilde{G}(x,x';E+i\eta) \qquad \tilde{G}_a(x,x';E) = \lim_{\eta\to 0^+}\tilde{G}(x,x';E-i\eta)\,. \tag{18}$$

Diskutieren Sie die Polstellen und Residuen von $\tilde{G}(x,x';z)$ für ein allgemeines $\hat{H}$. *(1 Punkt)*

d) Es gilt

$$K(x,x';\tau) = G_r(x,x';\tau) - G_a(x,x';\tau) \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[G_a(x,x';E) - G_r(x,x';E)\right]e^{-iE\tau/\hbar}dE \tag{20}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes explizit, dass das Kontourintegral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+ + C_-}\tilde{G}(x,x';z)e^{-iz\tau/\hbar}dz = K(x,x';\tau) \tag{21}$$

wieder den Propagator ergibt, wobei der Pfad C_+ parallel überhalb der reelen Achse von $+\infty$ nach $-\infty$ und der Pfad C_- parallel unterhalb der reelen Achse von $-\infty$ nach $+\infty$ verläuft. Zeichnen Sie den Integrationspfad in der Komplexen Ebene. Identifizieren Sie in (20) die beiden Pfade. Welchen Beitrag ergibt für $\tau > 0$ das Integral über C_-? Welchen für $\tau < 0$ über C_+? *(2 Punkte)*