Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2011 **Blatt 2** **21.04.2011**

Aufgabe 4 *Iterative Lösung des Pfadintegrals für ein freies Teilchen*

In der Vorlesung wurde für ein freies Teilchen die Gleichung

$$G_0(x,x';\tau) = \int_{\tilde{x}(0)=x'}^{\tilde{x}(\tau)=x} \mathcal{D}\tilde{x}(t)\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_0^\tau dt\; \dot{\tilde{x}}^2(t)\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}}\exp\left(\frac{im}{2\hbar\tau}(x-x')^2\right) \qquad (1)$$

gezeigt. Verwenden Sie nun die Gitter-Definition des Pfadintegrals,

$$G_0(x,x';\tau) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right]^{N/2}\left(\prod_{k=1}^{N-1}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_k\right)\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{\Delta t}\right], \qquad (2)$$

um diese iterativ herzuleiten.

Hinweis: Separieren Sie die Terme in Abhängigkeit von der Variable x_1, und integrieren Sie diese aus. Fügen Sie das Ergebnis ein, und wiederholen dies für die x_2-Variable usw.

(1 Punkt)

Aufgabe 5 *Feynman-Pfadintegral*

Wir betrachten ein eindimensionales freies Teilchen mit Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$, dessen Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$ durch $\psi_0(x)$ gegeben sei.

a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $\psi_t(x)$ zur Zeit t mit Hilfe des Feynman-Pfadintegrals. Nehmen sie als Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$ eine Gaußfunktion an,

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \qquad \text{mit } \sigma > 0\,. \qquad (3)$$

Berechnen Sie $\psi_t(x)$ und die Breite $\Delta x^2(t) = \langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2$ der Wellenfunktion als Funktion der Zeit. *(1 Punkt)*

Aufgabe 6 *Getriebener harmonischer Oszillator*

Gegeben sei der getriebene harmonische Oszillator mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \alpha(t)\hat{x}\,, \qquad (4)$$

wobei $\alpha(t)$ eine reelle und ∞-fach stetig differenzierbare Funktion sei. Der Fall $\alpha(t) = 0$ ergibt wieder den ungestörten harmonischen Oszillator.

a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion und setzen Sie diese in die Wirkung ein. Teilen Sie das Integral wie in der Vorlesung nach dem klassischen Pfad und den Fluktuationen $\tilde{x}(t) = x_{\rm cl}(t) + q(t)$ auf, und vereinfachen Sie. *(0,5 Punkte)*

b) Berechnen Sie die klassische Wirkung $\mathcal{R}_{\rm cl}[x, x', \tau]$, indem Sie die klassische Bahn des getriebenen harmonischen Oszillators einsetzen. Bestimmen Sie dazu zunächst die Bewegungsgleichungen und Anfangsbedingungen, beschreiben Sie den Lösungsansatz und geben Sie die allgemeine Lösung für die klassische Bahn $x_{\rm cl}(t)$ an. Berechnen Sie die klassische Geschwindigkeit $\dot{x}_{\rm cl}(t)$, und geben Sie diese zur Anfangs- und Endzeit $t = 0$ und $t = \tau$ an. *(1 Punkt)*

c) Lösen Sie den Propagator des getriebenen harmonischen Oszillators mit Hilfe der bisher erhaltenen Ergebnisse sowie den Methoden der Vorlesung. Diskutieren Sie die Unterschiede zum ungestörten harmonischen Oszillator bzw. führen Sie Ihr Ergebnis auf diesen zurück, indem Sie $\alpha(t) = 0$ setzen. *(1 Punkt)*

Hinweis: Die nächste Vorlesung am Mittwoch den 27.April beginnt bereits um ***12:15 Uhr****!*