Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2011 **Blatt 3** **05.05.2011**

Aufgabe 7 *Yukawa-Potential*

In der Vorlesung wurde ein freies klassisches skalares Feld besprochen, dessen Bewegungsgleichung eine lineare Wellengleichung erfüllt. Die entsprechende Lagrangedichte ist durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} + \mu^2\phi^2\right) \tag{1}$$

gegeben, wobei $x_\nu = (x, y, z, ict)$ die Koordinaten in Vierervektor-Schreibweise sind. Die Wechselwirkung des Feldes mit einer Quelle kann durch einen zusätzlichen Term $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\rho\phi$ in der Lagrangedichte berücksichtigt werden, wobei $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ eine skalare Quellendichte (analog zur Ladungsdichte in der Elektrostatik) ist.
Das Yukawa-Potential beschreibt das Meson-Feld der Wechselwirkung zwischen Nukleonen unter Vernachlässigung von Spin und Ladung der zugehörigen Austauschteilchen, der sogenannten Pionen oder π-Mesonen.

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung her. Zeigen Sie, dass diese invariant unter Lorentz-Transformationen ist. *(1 Punkt)*

b) Sei die Ladungsdichte einer ruhenden punktförmige Quelle am Ursprung durch $\rho = g\delta^{(3)}(\vec{r})$ gegeben, wobei die Konstante g die Kopplungsstärke zwischen Feld und Quelle ist (analog zur elektrischen Ladung e in der Elektrodynamik). Zeigen Sie, dass das Feld im ruhenden Bezugssystem dann durch

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{g}{4\pi}\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{2}$$

gegeben ist. *(2 Punkte)*
Hinweis: Verwenden Sie Fouriertransformation zur Lösung der Bewegungsgleichung.

c) Berechenen Sie die Hamiltonfunktion der Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen an den Orten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$,

$$H_{\text{int}} = \int d\vec{r}\,\mathcal{H}_{\text{int}}\,. \tag{3}$$

Bestimmen Sie zunächst die Hamilton'sche Dichte $\mathcal{H}_{\text{int}}$. Ist die Wechselwirkung attraktiv oder repulsiv? Was ergibt sich für $\mu = 0$? Vergleichen Sie dies mit der Coulomb-Wechselwirkung. *(1 Punkt)*

Aufgabe 8 *Lagrange-Dichte des Elektromagnetischen Feldes*

Die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes kann durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{c} j_\alpha A_\alpha \tag{4}$$

beschrieben werden. Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ ist dabei durch

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\mathrm{i}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\mathrm{i}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3 \\ \mathrm{i}E_1 & \mathrm{i}E_2 & \mathrm{i}E_3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu \tag{5}$$

gegeben, und die Vierervektoren A_μ und j_μ durch

$$A_\nu = (\vec{A}, \mathrm{i}\phi) \qquad\qquad j_\mu = (\vec{j}, \mathrm{i}c\rho)\,. \tag{6}$$

Leiten Sie die Maxwellgleichungen

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu \tag{7}$$

mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen her. Aus welcher Annahme folgen die restlichen Gleichungen,

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0\,? \tag{8}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 9 *Kohärente Zustände*

Der kohärente Zustand ist definiert als Eigenzustand des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ mit dem Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \ . \tag{9}$$

Der kohärente Zustand kann mit der Hilfe des Verschiebungsoperators $D(\alpha)$ aus dem Vakuum-Zustand $|0\rangle$ erzeugt werden,

$$D(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle \ , \tag{10}$$

wobei D durch

$$D(\alpha) = \exp\left[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}\right] \tag{11}$$

gegeben ist.

a) Zeigen Sie die Beziehungen,

$$\langle\alpha| \hat{a} |\alpha\rangle = \alpha \,, \qquad \langle\alpha| \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle = \alpha^* \,, \qquad \langle\alpha| \hat{a}^\dagger \hat{a} |\alpha\rangle = |\alpha|^2 \ , \tag{12}$$

und berechnen Sie die folgende Ausdrücke:

$$D^\dagger(\alpha)\hat{a}D(\alpha) \,, \qquad D^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger D(\alpha) \,, \qquad D^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{a}D(\alpha) \,. \tag{13}$$

Was ergeben die Kombinationen

$$D(\alpha)D(\beta) \,, \qquad D(\alpha)D(\beta)D(-\alpha)D(-\beta) \,? \tag{14}$$

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie die Darstellung des kohärenten Zustandes in der Eigenbasis des harmonischen Oszillators $\{|n\rangle\}$, und zeigen Sie damit, dass die Wahrscheinlichkeit n Photonen in einem kohärenten Zustand zu finden, durch

$$P(n) = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} \tag{15}$$

gegeben ist. Was für einer Verteilung entspricht dies? *(1 Punkt)*

d) Finden Sie die Unbestimmtheitsrelation $\Delta x \Delta p$ für einen kohärenten Zustand, wobei $\Delta x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ und $\Delta p^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$ *(2 Punkte)*