Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2011 **Blatt 4** **13.05.2011**

Aufgabe 10 *Impuls des elektromagnetischen Feldes*

Das freie elektromagnetische Feld für ebene Wellen ist in der Coulomb-Eichung gegeben durch

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}) = \sum_\lambda i\mathcal{E}_\lambda \vec{\epsilon}_\lambda \left[\hat{a}_\lambda e^{i\vec{k}_\lambda.\vec{r}} - \hat{a}_\lambda^\dagger e^{-i\vec{k}_\lambda.\vec{r}}\right] \tag{1}$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}) = \sum_\lambda i\mathcal{B}_\lambda \left(\frac{\vec{k}_\lambda}{|\vec{k}_\lambda|} \times \vec{\epsilon}_\lambda\right) \left[\hat{a}_\lambda e^{i\vec{k}_\lambda.\vec{r}} - \hat{a}_\lambda^\dagger e^{-i\vec{k}_\lambda.\vec{r}}\right] , \tag{2}$$

wobei $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda = \sqrt{2\pi\hbar\omega_\lambda/V}$ (im Gaußschen CGS-System), und $\lambda = (\vec{k}_\lambda, \vec{\epsilon}_\lambda)$ ist.
Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Impuls des elektromagnetischen Feldes

$$\hat{\vec{P}} = \frac{1}{4\pi c}\int_V \left(\hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{B}}\right) d^3x \qquad \text{als} \qquad \hat{\vec{P}} = \sum_\lambda \hbar\vec{k}_\lambda\, \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda \tag{3}$$

geschrieben werden kann. *(2 Punkte)*

Aufgabe 11 *Kommutatorbeziehungen des elektromagnetischen Feldes*

Jedes Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ lässt sich in einen longitudinalen und transversalen Teil aufspalten,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}^{||}(\vec{r}) + \vec{A}^{\perp}(\vec{r}) , \tag{4}$$

mit $\nabla \times \vec{A}^{||} = 0$ und $\nabla.\vec{A}^{\perp} = 0$. Die longitudinale und transversale δ-Funktionen sind definiert über die Beziehungen

$$A_l^{||} = \sum_m \int d^3x\ \delta_{lm}^{||}(\vec{r} - \vec{r}')\, A_m(\vec{r}') , \tag{5}$$

$$A_l^{\perp} = \sum_m \int d^3x\ \delta_{lm}^{\perp}(\vec{r} - \vec{r}')\, A_m(\vec{r}') , \tag{6}$$

für $l, m, n \in \{x, y, z\}$, und sie erfüllen die folgenden Eigenschaften:

$$\delta_{lm}^{*}(\vec{r}) = \delta_{ml}^{*}(\vec{r}) , \qquad \delta_{lm}^{*}(\vec{r}) = \delta_{lm}^{*}(-\vec{r}) , \qquad \frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{mn}^{||}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\partial}{\partial x_m}\delta_{ln}^{||}(\vec{r} - \vec{r}') , \tag{7}$$

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{lm}^{||}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\partial}{\partial x_m}\delta(\vec{r} - \vec{r}') , \qquad \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{lm}^{\perp}(\vec{r} - \vec{r}') = 0 , \tag{8}$$

wobei $* = \{||, \perp\}$ ist. Für ihre Fouriertransformierten gilt entsprechend:

$$\delta_{lm}^{||}(\vec{k}) = \frac{k_l k_m}{|\vec{k}|^2} , \qquad \delta_{lm}^{\perp}(\vec{k}) = \delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{|\vec{k}|^2} . \tag{9}$$

a) Zeigen Sie zunächst die folgenden Relationen:

$$\sum_{\vec{\epsilon}_\lambda} \epsilon_{\lambda,l}\epsilon_{\lambda,m} = \delta_{lm} - \frac{k_{\lambda,l}k_{\lambda,m}}{|\vec{k}_\lambda|^2}\,, \tag{10}$$

$$\sum_{\vec{\epsilon}_\lambda} \epsilon_{\lambda,l}\frac{(\vec{k}_\lambda \times \vec{\epsilon}_\lambda)_m}{|\vec{k}_\lambda|} = \sum_n \varepsilon_{lmn}\frac{k_{\lambda,n}}{|\vec{k}_\lambda|}\,, \tag{11}$$

$$\sum_{\vec{\epsilon}_\lambda} \frac{(\vec{k}_\lambda \times \vec{\epsilon}_\lambda)_l}{|\vec{k}_\lambda|}\frac{(\vec{k}_\lambda \times \vec{\epsilon}_\lambda)_m}{|\vec{k}_\lambda|} = \delta_{lm} - \frac{k_{\lambda,l}k_{\lambda,m}}{|\vec{k}_\lambda|^2}\,, \tag{12}$$

für $l, m, n \in \{x, y, z\}$ und ε_{lmn} gleich dem Levi-Civita-Tensor. Zeigen Sie damit die folgende Kommutatorbeziehung der kartesischen Feldkomponenten in der Coulomb-Eichung,

$$\left[\hat{E}_x(\vec{r}, t), \hat{B}_y(\vec{r}\,', t)\right] = 4\pi i c\hbar\frac{\partial}{\partial z}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\,. \tag{13}$$

Dabei sind die Felder gegeben durch:

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}) = \int d^3k \sum_{\epsilon_\lambda} i\mathcal{E}_k\vec{\epsilon}_\lambda \left[\hat{a}_{\epsilon_\lambda}e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \hat{a}^\dagger_{\epsilon_\lambda}e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right]\,, \tag{14}$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}) = \int d^3k \sum_{\epsilon_\lambda} i\mathcal{B}_k \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\epsilon}_\lambda\right) \left[\hat{a}_{\epsilon_\lambda}e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \hat{a}^\dagger_{\epsilon_\lambda}e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right]\,, \tag{15}$$

mit $\mathcal{B}_k = \mathcal{E}_k = \sqrt{\hbar\omega/(4\pi^2)}$. *(2 Punkte)*

Hinweis: Die Fourier-Rücktransformation ist hier mit dem Faktor $(2\pi)^{-3}$ definiert.

b) Im Heisenberg-Bild sind die Operatoren der freien Felder gegeben durch

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \int d^3k \sum_{\epsilon_\lambda} i\mathcal{E}_k\vec{\epsilon}_\lambda \left[\hat{a}_\lambda e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger_\lambda e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}\right]\,, \tag{16}$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \int d^3k \sum_{\epsilon_\lambda} i\mathcal{B}_k \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\epsilon}_\lambda\right) \left[\hat{a}_\lambda e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger_\lambda e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}\right]\,. \tag{17}$$

Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{E}_x(\vec{r}_1,\, t_1), \hat{B}_y(\vec{r}_2,\, t_2)]$, und diskutieren Sie die Möglichkeit einer gemeinsamen Messung der beiden Feldkomponenten zu verschiedenen Raum-Zeit-Punkten ($\rho^2 = c^2\tau^2$, $\rho^2 > c^2\tau^2$ und $\rho^2 < c^2\tau^2$), wobei $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}$, $t_1 - t_2 = \tau$. *(2 Punkte)*

Hinweis: Die Frequenz ist eine Funktion von $|\vec{k}|$: $\omega = c|\vec{k}|$.

c) Wie lautet die Beziehung zwischen $\mathcal{E}_k$ und $\mathcal{E}_\lambda$ (bzw. $\mathcal{B}_k$ und $\mathcal{B}_\lambda$) für den Übergang von der Summe $\sum_\lambda$ zum Integral $\int d^3k \sum_{\vec{\epsilon}_\lambda}$? Wie hängen die Felder vom Volumen ab? *(1 Punkt)*

Aufgabe 12 *Spin des Photons*

a) Zeigen Sie, dass die unabhängigen und nichtverschwindenden Komponenten der antisymmetrischen Dyade

$$\hat{\mathbf{S}}_n = -i\hbar \left(\vec{\epsilon}_l \vec{\epsilon}_m - \vec{\epsilon}_m \vec{\epsilon}_l\right) \,, \tag{18}$$

– für $\{l, m, n\}$ zyklische Permutation von $\{1, 2, 3\}$ und $\vec{\epsilon}_3 = \vec{k}/|\vec{k}|$ –, geschrieben werden können als

$$\hat{\mathbf{S}}_n \cdot \; = i\hbar \left(\vec{\epsilon}_n \times \; \cdot \;\right) \,, \tag{19}$$

und dass diese die Kommutatorbeziehungen der Drehimpulsalgebra erfüllen,

$$\hat{\mathbf{S}}_l . \hat{\mathbf{S}}_m - \hat{\mathbf{S}}_m . \hat{\mathbf{S}}_l = i\hbar \hat{\mathbf{S}}_n \,. \tag{20}$$

(1 Punkt)

Hinweis: Das Skalarprodukt zwischen zwei Dyaden $\hat{\mathbf{A}} = \vec{a}_1 \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2$ *und* $\hat{\mathbf{B}} = \vec{b}_1 \vec{b}_2 = \vec{b}_1 \otimes \vec{b}_2$ *ist definiert als:*

$$\hat{\mathbf{A}} . \hat{\mathbf{B}} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2) . (\vec{b}_1 \vec{b}_2) = (\vec{a}_2 . \vec{b}_1) \vec{a}_1 \vec{b}_2 \,. \tag{21}$$

b) Zeigen Sie weiter, dass für die Funktionen

$$\vec{u}_{\vec{k},\pm}(\vec{r}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{\epsilon}_1 \pm i \vec{\epsilon}_2\right) e^{i\vec{k}.\vec{r}} \tag{22}$$

folgende Eigenwertgleichungen gelten:

$$\hat{\mathbf{S}}_3 \vec{u}_{\vec{k},\pm} = \pm \hbar \vec{u}_{\vec{k},\pm} \,, \qquad \sum_{j=1}^{3} \left(\hat{\mathbf{S}}_j . \hat{\mathbf{S}}_j\right) \vec{u}_{\vec{k},\pm} = 2\hbar^2 \vec{u}_{\vec{k},\pm} \,. \tag{23}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 13 *Vakuumfluktuationen*

Im Vakuumzustand verschwindet der Erwartungswert des Feldes in einem Punkt $\vec{r}$,

$$\langle 0| \hat{\vec{E}}(\vec{r}) |0\rangle \equiv 0 \,, \tag{24}$$

allerdings divergiert die Varianz

$$\Delta\hat{\vec{E}}^2(\vec{r}) = \sum_\lambda \frac{2\pi\hbar}{V}\omega_\lambda \doteq \frac{2\hbar c}{\pi}\int_0^{k_{\max}} k^3\, dk \tag{25}$$

für $k_{\max} \to \infty$, d.h. wenn man keine Cut-off-Frequenz einführt. Jedoch kann die Varianz des Feldes im Vakuum bei einer Mittelung endlich bleiben. Anstelle der Auswertung des Feldes an einem diskreten Punkt, betrachten wir das Feld in einem (meist kleinem) Volumen V um diesen Punkt herum, über welches wir wie folgt mitteln:

$$\overline{\vec{E}}(\vec{r}) = \int_V d^3R\ f(\vec{r}+\vec{R})\vec{E}(\vec{R})\,, \tag{26}$$

wobei $f(\vec{R})$ eine reelle Funktion ist, für welche

$$\int_V d^3R\ f(\vec{R}) = 1 \tag{27}$$

gilt. Die Fourier-Transformation der Funktion $f(\vec{R})$ ist gegeben durch

$$g(\vec{k}) = \int_V d^3R\ e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{R}} f(\vec{R})\,. \tag{28}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des gemittelten Feldes im Vakuumzustand. Führen Sie die Rechnung explizit aus, wenn die Funktion $f(\vec{R})$ eine Gauß-Funktion ist, und das Volumen V über welches integriert wird, der ganze $\mathbb{R}^3$ ist. *(3 Punkte)*