Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2011 **Blatt 5** **26.05.2011**

Aufgabe 14 *Lorentzkraft*

Die relativistische Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens mit Ladung e und Ruhemasse m in einem Viererpotential $A_\mu = (\vec{A}, i\phi)$ ist gegeben durch

$$H = e\phi + c\sqrt{m^2c^2 + (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen die korrekte Lorentzkraft folgt.

(3 Punkte)

Aufgabe 15 *Eigenschaften der γ-Matrizen*

Der Dirac-Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} = c\,\vec{\alpha}.\vec{p} + \alpha_t mc^2 \tag{2}$$

mit $\alpha_\mu = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_t)$. Es gilt $\alpha_\mu^\dagger = \alpha_\mu$, $\mathrm{Tr}\{\alpha_\mu\} = 0$ sowie $\{\alpha_\mu, \alpha_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$, wobei der Anti-Kommutator definiert ist als $\{A, B\} = AB + BA$. Weiter ist die Dirac-Gleichung in der van-der-Waerden-Form gegeben durch

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(\vec{x}, t) = 0\ , \tag{3}$$

wobei die γ-Matrizen definiert sind als $\gamma_j = -i\alpha_t\alpha_j$ für $j = 1, 2, 3$ und $\gamma_4 = \alpha_t$. Zeigen Sie, dass

1. die Anti-Kommutatoren $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ ergeben,
2. die γ_μ hermitesch sind,
3. die Spur von γ_μ verschwindet.

(1 Punkt)

Aufgabe 16 *Kopplung des Spins an ein Magnetfeld*

In der nicht-relativistischen Quantenmechanik wird die Wechselwirkung zwischen einem freien Spin-1/2-Teilchen und einem Magnetfeld durch eine potentielle Energie der Form

$$H^{\text{spin}} = -\frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}.\vec{B} \tag{4}$$

beschrieben, die zur kinetischen Energie addiert wid. Dabei ist $\vec{\sigma} = \sigma_x\vec{e}_x + \sigma_y\vec{e}_y + \sigma_z\vec{e}_z$ durch die Paulimatrizen gegeben. Zeigen Sie, dass:

a) Die kinetische Energie in Abwesenheit eines Vektorpotentials $\vec{A}$ sich auch schreiben lässt als

$$\hat{H}^{(\mathrm{KE})} = \frac{1}{2m}(\vec{\sigma}.\vec{p})(\vec{\sigma}.\vec{p})\,. \tag{5}$$

(1 Punkt)

b) In Anwesenheit eines Vektorpotentials $\vec{A}$ die Ersetzung $\vec{p} \to \vec{p} - e\vec{A}/c$ in Gl. (5) auf folgenden Operator für die kinetische Energie führt:

$$\hat{H}^{(\mathrm{KE})} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}.\vec{B}\,. \tag{6}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 17 *Helizitätsoperator eines freien Teilchens*

Der Dirac-Hamiltonoperator eines freien Teilchens ist gegeben durch $\hat{H} = c\,\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + \alpha_t mc^2$. Sei weiter $\vec{\Sigma}_l = (\gamma_j\gamma_k - \gamma_k\gamma_j)/2i$ für (jkl) zyklische Permutation von (123).

a) Zeigen Sie, dass $\vec{\Sigma}.\hat{n}$ ($\hat{n}$ sei ein beliebiger Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$) nur dann mit dem Hamiltonoperator des freien Teilchens (2) kommutiert, wenn $\hat{n} = \pm\vec{p}/|\vec{p}|$ gilt. Sie können dazu annehmen, dass sich das Teilchen entlang der z-Achse bewegt, d.h. $\vec{p} = (0, 0, p_z)$. Welche physikalische Bedeutung hat dieses Ergebnis? *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass die Lösungen des freien Teilchens nur für den Fall $\vec{p} = (0, 0, p_z)$ Eigenfunktionen zu Σ_3 sind, und zwar für

$$\psi^{(1)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}.\vec{x}-Et)/\hbar}\,, \qquad \psi^{(3)} = N\begin{pmatrix} -\frac{cp_z}{|E|+mc^2} \\ -\frac{c(p_x+ip_y)}{|E|+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}.\vec{x}+|E|t)/\hbar} \tag{7}$$

mit Eigenwert +1 (rechtshändig), und für

$$\psi^{(2)} = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ -\frac{cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}.\vec{x}-Et)/\hbar}\,, \qquad \psi^{(4)} = N\begin{pmatrix} -\frac{c(p_x-ip_y)}{|E|+mc^2} \\ \frac{cp_z}{|E|+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}.\vec{x}+|E|t)/\hbar} \tag{8}$$

mit Eigenwert −1 (linkshändig), wobei die Normierung $N = \sqrt{(|E| + mc^2)/(2|E|V)}$ wie in der Vorlesung gewählt ist.

(1 Punkt)

Aufgabe 18 *Transformation der Wellenfunktion*

Bestimmen Sie den Transformationsoperator $\mathcal{S}_{\mathrm{Lor}} = \cosh(\chi/2) - \alpha_3\sinh(\chi/2)$, so dass $\psi'(x') = \mathcal{S}_{\mathrm{Lor}}\psi(x)$ die Wellenfunktion eines ruhenden Teilchens beschriebt, wenn $\psi(x)$ durch die Eigenfunktionen des freien Teilchens mit Impuls $\vec{p} = (0, 0, p_z)$ – siehe Teilaufgabe b) – gegeben ist.

(2 Punkte)