Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2011 **Blatt 6** **10.06.2011**

Aufgabe 19 *Operatoren im Heisenberg-Bild*

Die Zeitentwicklung für Operatoren $\hat{O}$ eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld ist durch die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}\left[H, \hat{O}\right] + \frac{\partial \hat{O}}{\partial t} \tag{1}$$

gegeben, wobei

$$H = c\,\vec{\alpha}.(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) + eA_0 + \alpha_t mc^2 \tag{2}$$

der Dirac-Hamiltonoperator ist.

a) Geben Sie die Zeitentwicklung des kanonischen Impulses $\vec{p}$ und des kinetischen Impulses $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}/c$ an. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Observablen Erhaltungsgrößen sind: Bahndrehimpuls $\vec{L}$, Spin $\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$, Helizität $\vec{\Sigma}.\vec{p}/|\vec{p}|$ und Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$. Geben Sie die Zeitentwicklung der Observablen an. *(1 Punkt)*

Aufgabe 20 *Elektron im homogenen Magnetfeld*

Das Elektron befindet sich nun in einem konstanten homogenen Magnetfeld, $\vec{B}(\vec{r}) = B_0\vec{e}_z$, d.h. $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{B} \times \vec{r}/2$, und es liegt kein statisches Potential an.

a) Zeigen Sie, dass der Betrag des kinetischen Impulses $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}/c$ eine Konstante der Bewegung ist. Zeigen Sie weiter, dass das Skalarprodukt des Spins mit dem kinetischen Impuls $\vec{\Sigma}.\vec{\pi}$ ebenfalls erhalten ist. *(1 Punkt)*

b) Welche weiteren Observablen sind Erhaltungsgrößen? *(1 Punkt)*

c) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen. Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Wellenfunktion sich wie folgt separieren lässt (wenn Sie diese als unabhängig von z annehmen),

$$\psi = e^{iwxy/\hbar}e^{iny/\hbar}e^{ik_z z/\hbar}\phi_n(x)\,, \tag{3}$$

wobei $w = -eB_0/(2c)$ ist und k_z als der Impulseigenwert in z-Richtung gegeben ist. Leiten Sie eine Gleichung für ϕ_n her. Begründen Sie, warum die Eigenfunktionen über die Gleichung

$$\phi_n(x) = \phi_0\left(x + \frac{n}{2w}\right) \tag{4}$$

zusammenhängen. Schreiben Sie für $n = 0$ die Gleichungen für jede der vier Komponenten $\phi_0^{(1)}, \phi_0^{(2)}, \phi_0^{(3)}, \phi_0^{(4)}$ aus, und zeigen Sie, dass diese sich auf die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators zurückführen lassen. Nehmen Sie dazu die Ersetzungen $\xi = 2x\sqrt{w/\hbar}$ und $\nu = (E^2 - c^2k_z^2 - m^2c^4)/(4w\hbar c^2)$ vor. Wie sind die Energieeigenwerte gegeben, und wie lautet die Frequenz des Oszillators? *(2 Punkte)*

Aufgabe 21 *Teilchen im Zentralpotential*

Der Hamiltonoperator eines einzelnen Elektrons in einem Zentralpotential $V(\vec{r}) = V(r)$ ist gegeben durch

$$H = c\,\vec{\alpha}.\vec{p} + \alpha_t mc^2 + V(r)\,. \tag{5}$$

a) Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$ eine Erhaltungsgröße ist. *(1 Punkt)*

b) In der nichtrelativistischen Quantenmechanik legt der Operator $\vec{\sigma}.\vec{J}$ fest, ob der Spin des Elektrons parallel oder antiparallel zum Gesamtdrehimpuls ausgerichtet ist. Dies ist jedoch in der relativistischen Quantenmechanik nicht mehr der Fall. Zeigen Sie, dass dafür $\vec{K} = \alpha_t(\vec{\Sigma}.\vec{J} - \hbar/2)$ eine Erhaltungsgröße ist, die auch mit dem Gesamtdrehimpuls kommutiert.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, die Identität

$$(\vec{\sigma}.\vec{A})(\vec{\Sigma}.\vec{B}) = -\gamma_5\vec{A}.\vec{B} + i\vec{\alpha}.(\vec{A}\times\vec{B})\,, \tag{6}$$

   wobei γ_5 durch

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0_2 & -\mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

   gegeben ist. *(2 Punkte)*