Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2011 **Blatt 7** **17.06.2011**

Aufgabe 22 *Radialgleichung des Wasserstoffatoms*

In der Vorlesung wurde die Radialgleichung für ein Zentralpotential hergeleitet,

$$-c\hbar\left(\frac{df}{dr}+\frac{(1-\kappa)}{r}f\right)=\left(E-V-mc^2\right)g \tag{1}$$

$$c\hbar\left(\frac{dg}{dr}+\frac{(1+\kappa)}{r}g\right)=\left(E-V+mc^2\right)f\,. \tag{2}$$

Betrachten Sie im folgenden das Potential $V(r)=-(e^2/4\pi r)$ des Wasserstoffatoms.

a) Leiten Sie mit den Ersetzungen $F(r)=rf(r)$ und $G(r)=rg(r)$ sowie den Abkürzungen $c_1=(mc^2+E)/\hbar c$, $c_2=(mc^2-E)/\hbar c$, $\alpha=(e^2/4\pi\hbar c)\simeq 1/137$ (die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante in Heavidside-Lorentz-Einheiten) und $\rho=\sqrt{c_1c_2}\,r$ die folgenden gekoppelten Gleichungen her:

$$\left(\frac{d}{d\rho}-\frac{\kappa}{\rho}\right)F-\left(\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}-\frac{\alpha}{\rho}\right)G=0 \tag{3}$$

$$\left(\frac{d}{d\rho}+\frac{\kappa}{\rho}\right)G-\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}+\frac{\alpha}{\rho}\right)F=0\,. \tag{4}$$

(0,5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Faktorisierung $F=e^{-\rho}\rho^s\sum_{m=0}^{\infty}f_m\rho^m$ und $G=e^{-\rho}\rho^s\sum_{m=0}^{\infty}g_m\rho^m$, mit $f_0,g_0\neq 0$, auf die folgenden Rekursionsrelationen führt:

$$(s+q-\kappa)f_q-f_{q-1}+\alpha g_q-\sqrt{c_2/c_1}g_{q-1}=0 \tag{5}$$

$$(s+q+\kappa)g_q-g_{q-1}-\alpha f_q-\sqrt{c_1/c_2}f_{q-1}=0\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie weiter, dass $s=\pm\sqrt{\kappa^2-\alpha^2}$ erfüllt. Warum kann nur die positive Wurzel auf eine gültige Lösung führen? *(1 Punkt)*

c) Wir nehmen an, dass beide Potenzreihen bei der gleichen Ordnung abbrechen, d.h. für ein bestimmtes n' gilt:

$$f_{n'+1}=g_{n'+1}=0,\qquad f_{n'}\neq 0,\qquad g_{n'}\neq 0. \tag{7}$$

Leiten Sie damit eine Beziehung zwischen $f_{n'}$ und $g_{n'}$ her, und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte durch

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\left(n'+\sqrt{(j+\frac{1}{2})^2-\alpha^2}\right)^2}}} \tag{8}$$

gegeben sind. *(1 Punkt)*

n	$n' = n - \|\kappa\| \geq 0$	$\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$	spektroskopische Notation
1	0	-1	$1s_{\frac{1}{2}}$
2	1	-1	$2s_{\frac{1}{2}}$
2	1	$+1$	$2p_{\frac{1}{2}}$
2	0	-2	$2p_{\frac{3}{2}}$
3	2	-1	$3s_{\frac{1}{2}}$
3	2	$+1$	$3p_{\frac{1}{2}}$
3	1	-2	$3p_{\frac{3}{2}}$
3	1	$+2$	$3d_{\frac{3}{2}}$
3	0	-3	$3d_{\frac{5}{2}}$

Tabelle 1: Beziehung zwischen den relativistischen Quantenzahlen und der in der Atomphysik gebräuchlichen spektroskopischen Notation.

d) In Tabelle 1 ist die Beziehung zwischen den relativistischen Quantenzahlen und der spektroskopischen Notation gegeben, sowie die Beziehung zwischen der Hauptquantenzahl n der nichtrelativistischen Quantenmechanik und n' der Dirac-Theorie, welche durch $n = n' + (j + \frac{1}{2}) = n' + |\kappa|$ gegeben ist. Für n gilt die Relation $n \geq 1$ (warum?). Weshalb sind in der Tabelle für $n' = 0$ nur die Zustände mit $\kappa < 0$ angegeben? Bestimmen Sie weiter mit Hilfe von Gleichung (8), welche der in der Tabelle angegebenen Zustände degeneriert sind. *(0,5 Punkte)*

Aufgabe 23 *Dirac-Teilchen im kugelsymmetrischen Potentialtopf*

Wir betrachten ein Dirac-Teilchen in einem dreidimensionalen kugelsymmetrischen Potentialtopf,

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} . \tag{9}$$

Bestimmen Sie die Energieeigenfunktionen für den gebundenen Zustand mit $j = 1/2$. Welche Bedingung legt die Energieeigenwerte fest? Stellen Sie eine Gleichung dafür auf. *(2 Punkte)*
Hinweis: Die normierbare Lösung der Differentialgleichung

$$\hbar^2 c^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa \pm 1)}{r^2} \right) h(r) = - \left[(E + E_0)^2 - m^2 c^4 \right] h(r) \tag{10}$$

wenn $(E+E_0)^2 - m^2c^4 = \hbar^2 c^2 k_1^2$ *positive Werte annimmt, ist für* $\kappa = \pm(j+1/2) = \pm 1$ *gegeben durch*

$$\begin{array}{ll} h_+(r) = a\, r\, j_{l_\kappa}(k_1 r) & \text{für das Pluszeichen, und} \\ h_-(r) = a\, \kappa \frac{k_1 r}{E+E_0+mc^2}\, j_{l_{-\kappa}}(k_1 r) & \text{für das Minuszeichen in der DGL;} \end{array} \tag{11}$$

die normierbare Lösung für $E_0 = 0$ und $m^2c^2 - E^2 = c^2\hbar^2 k_2^2$ (d.h. für imaginären Impuls) ist für $\kappa = \pm 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} h_+(r) &= b\, r \sqrt{\tfrac{2k_2 r}{\pi}}\, k_{(l_\kappa+1/2)}(k_2 r) \quad \textit{für das Pluszeichen, und} \\ h_-(r) &= b\, \tfrac{k_2 r}{E+mc^2}\, k_{(l_{-\kappa}+1/2)}(k_2 r) \quad \textit{für das Minuszeichen in der DGL}\,, \end{aligned} \tag{12}$$

wobei a und b Normierungskonstanten sind, und

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x} \tag{13}$$

die sphärischen Besselfunktionen sowie

$$k_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{e^{-x}}{x} \tag{14}$$

die modifizierten sphärischen Besselfunktionen sind. Die Indices der speziellen Funktionen sind dabei gegeben durch

$$l_\kappa = \begin{cases} \kappa & \textit{für } \kappa > 0 \\ -\kappa - 1 & \textit{für } \kappa < 0 \end{cases}, \qquad l_{-\kappa} = \begin{cases} -\kappa & \textit{für } \kappa > 0 \\ \kappa - 1 & \textit{für } \kappa < 0 \end{cases}. \tag{15}$$

Aufgabe 24 *Übergangsamplituden*

Der Hamiltonoperator eines Systems sei durch $H = H_0 + V$ beschrieben, wobei H_0 zeitunabhängig sei und $|\phi_l\rangle$ als Eigenfunktionen habe. V sei eine Störung, die auch zeitabhängig sein kann. Im Wechselwirkungsbild (gekennzeichnet durch $\tilde{}$) ist der Zeitentwicklungsoperator gegeben durch:

$$\tilde{U}(t_f, t_i) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{U}^{(n)}(t_f, t_i)\,, \tag{16}$$

wobei

$$\tilde{U}^{(n)}(t_f, t_i) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int d\tau_n \cdots d\tau_2 d\tau_1\, \tilde{V}(\tau_n) \cdots \tilde{V}(\tau_2)\tilde{V}(\tau_1) \tag{17}$$

für $t_f \geq \tau_n \geq \cdots \geq \tau_2 \geq \tau_1 \geq t_i$ gegeben ist, und $\tilde{V}(t)$ die Störung im Wechselwirkungsbild ist. Die Matrixelemente der S-Matrix oder Streumatrix zwischen einem Eigenzustand $|\phi_i\rangle$ als Anfangszustand und einem Eigenzustand $|\phi_f\rangle$ als Endzustand sind gegeben als

$$S_{fi} = \langle \phi_f | \tilde{U}(t_f, t_i) | \phi_i \rangle = \delta_{fi} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{fi}^{(n)}\,, \tag{18}$$

wobei $S_{fi}^{(n)} = \langle \phi_f | \tilde{U}^{(n)}(t_f, t_i) | \phi_i \rangle$ für die n-te Ordnung der Streumatrix ist.

a) Berechnen Sie die Übergangsamplitude $S_{fi}^{(1)}$ der ersten Ordnung. Wie sieht diese für $t_i \to -\infty$ und $t_f \to +\infty$ aus? *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die Übergangsamplitude $S_{fi}^{(2)}$ der zweiten Ordnung. Wie verhält sich $S_{fi}^{(2)}$ für $t_i \to -\infty$ und $t_f \to +\infty$ wenn die Energieeigenwerte $E_i \neq E_f$ nicht gleich sind? *(1 Punkt)*

Hinweis: Um die Divergenz des Integrals zu vermeiden, können Sie die Identität

$$e^{-iE_k(\tau_2-\tau_1)/\hbar}\Theta(\tau_2-\tau_1) = \lim_{\eta\to 0^+} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iE(\tau_2-\tau_1)/\hbar}}{E-E_k+i\eta}dE \tag{19}$$

verwenden.