

Seminar zur Vorlesung

TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2011

Blatt 8

05.07.2011

Aufgabe 25 *Thomson-Streuung*

Wir wollen den elastischen Streuquerschnitt für die Streuung eines Photons mit Wellenvektor \vec{k} und Polarisation $\vec{\epsilon}$ an einem an ein Atom gebundenes Elektron berechnen. Dabei sei die Energie $\hbar\omega$ des Photons viel größer als die Ionisierungsenergie E_I des Atoms, $\hbar\omega \gg E_I$, jedoch noch klein genug, dass die Näherung für lange Wellenlängen anwendbar ist. Das Atom ist im Koordinatenursprung lokalisiert, und das System Atom-Photon befindet sich anfangs im Zustand $|\phi_i\rangle = |a; \vec{k}, \vec{\epsilon}\rangle$, wobei mit $|a\rangle$ der Grundzustand des Atoms bezeichnet wird, und $|\vec{k}, \vec{\epsilon}\rangle$ den Zustand des elektromagnetischen Feldes bezeichnet, der gerade eine Anregung in der Mode mit Wellenvektor \vec{k} und Polarisation $\vec{\epsilon}$ vorweist. Verwenden Sie den Wechselwirkungs-Hamiltonoperator in der Coulomb-Eichung

$$H_I = H_I^{(1)} + H_I^{(2)} \quad (1)$$

mit

$$H_I^{(1)} = -\frac{q}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{0}) \quad \text{und} \quad H_I^{(2)} = \frac{q^2}{2mc^2} \vec{A}^2(\vec{0}), \quad (2)$$

wobei das Vektorpotential durch

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_\lambda V}} \left[\hat{a}_\lambda \vec{\epsilon}_\lambda e^{i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}} + \hat{a}_\lambda^\dagger \vec{\epsilon}_\lambda e^{-i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}} \right] \quad (3)$$

gegeben ist.

- a) Berechnen Sie jeweils bis in zweiter Ordnung in q den Beitrag von $H_I^{(1)}$ und $H_I^{(2)}$ zum Übergangsmatrixelement $\mathcal{T}_{fi} = \langle \phi_f | H_I | \phi_i \rangle + \langle \phi_i | H_I (E_i - H_0 + i\eta)^{-1} H_I | \phi_f \rangle + \dots$ zwischen dem Anfangszustand $|\phi_i\rangle$ und dem Endzustand $|\phi_f\rangle = |a; \vec{k}', \vec{\epsilon}'\rangle$ (worin η eine infinitesimal kleine positive Zahl sei). Weshalb gilt $\omega' = \omega$, und warum handelt es sich um einen Streuprozess, bei dem Anfangs- und Endzustand in einem Kontinuum liegen? (3 Punkte)
- b) Bestimmen Sie, welcher der Terme, $\mathcal{T}_{fi}^{(1)} = \langle \phi_f | H_I^{(1)} | \phi_i \rangle + \dots$ oder $\mathcal{T}_{fi}^{(2)} = \langle \phi_f | H_I^{(2)} | \phi_i \rangle + \dots$, mehr Gewicht hat. Begründen Sie dazu, welche Matrixelemente einen Beitrag zu der Summe zu $\mathcal{T}_{fi}^{(1)}$ geben und welche nicht, und nähern Sie geeignet mittels der Beziehung $\hbar\omega \gg E_I$. Um diese Näherung zu überprüfen, entwickeln Sie $\mathcal{T}_{fi}^{(1)}$ in niedrigster Ordnung in $(E_b - E_a)/\hbar\omega$. Geben Sie die Größenordnung der Skalierung zwischen beiden Termen als Funktion von $E_I/\hbar\omega$ in dieser Näherung an. (2 Punkte)

- c) Für das gestreute Photon betrachten wir einen Raumwinkelbereich um den Wellenvektor \vec{k}' herum. Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und pro Raumwinkel Ω' ist dann gegeben durch

$$\frac{\delta w_{fi}}{\delta \Omega'} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{T}_{fi}(E_f = E_i; \Omega'; \phi_i)|^2 \rho(E_f = E_i; \Omega'), \quad (4)$$

wobei $\mathcal{T}_{fi}(E_f = E_i; \Omega'; \phi_i)$ das zuvor berechnete Übergangsmatrixelement ist, und $\rho(E_f = E_i; \Omega')$ die Dichte der Zustände in der Umgebung des Endzustands ist, die durch

$$\rho(E_f = E_i; \Omega') = \frac{V}{8\pi^3} \frac{(\hbar c k')^2}{\hbar^3 c^3} \quad (5)$$

gegeben ist. Leiten Sie daraus den differentiellen Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = r_0^2 (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}')^2 \quad (6)$$

her, indem Sie den klassischen Elektronenradius $r_0 = q^2/(mc^2)$ einsetzen und durch den Photonenfluß dividieren. Bestimmen Sie den gesamten Streuquerschnitt durch Integration von $(\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}')^2$ über alle Raumwinkel, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit demjenigen

$$\sigma_{\text{gesamt}} = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \quad (7)$$

welches in der klassischen Elektrodynamik für ein elastisch gebundenes Elektron hergeleitet wird. (2 Punkte)

Aufgabe 26 *Lamb-Shift*

Wir wollen die Verschiebung der Energieniveaus aufgrund der Wechselwirkung mit dem Vakuum des elektromagnetischen Feldes in der Coulomb-Eichung berechnen. Zunächst nehmen wir folgende Vereinfachungen vor: i) Das Elektron sei spinlos und habe Masse m sowie Ladung q . Der Atomkern jedoch sei unendlich schwer, und am Ursprung lokalisiert. Die potentielle Energie ist dann durch $V_0 = -q^2/r$ gegeben. ii) Wir betrachten nur die Wechselwirkung des Elektrons mit solchen Moden des elektromagnetischen Feldes, deren Wellenzahl unterhalb einer oberen Schranke $k \ll k_M$ liegt, die die Beziehung $k_M a_0 \ll 1$ (a_0 ist der Bohr-Radius) erfüllt. Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$H = H_0 + H_I, \quad \text{mit} \quad H_0 = H_a + H_{\text{rad}}, \quad (8)$$

wobei die Hamiltonoperatoren für das Atom und das Strahlungsfeld gegeben sind durch

$$H_a = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_0(\vec{r}) + \epsilon_{\text{coul}}, \quad \text{und} \quad H_{\text{rad}} = \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\lambda} (a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} + \frac{1}{2}). \quad (9)$$

ϵ_{coul} ist dabei die Selbstenergie des Coulombfeldes. Die Wechselwirkung ist gegeben durch

$$H_I = H_I^{(1)} + H_I^{(2)} = -\frac{q}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{0}) + \frac{q^2}{2mc^2} \vec{A}^2(\vec{0}), \quad (10)$$

wobei das Vektorpotential am Ursprung durch

$$\vec{A}(\vec{0}) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\lambda} V}} \vec{\epsilon}_{\lambda} (\hat{a}_{\lambda} + \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}) \quad (11)$$

gegeben ist. Wir betrachten dann die Verschiebung $\hbar\Delta_a$ der Energie E_a des Grundzustandes $|a; 0\rangle$ von H_0 aufgrund der Wechselwirkung mit dem Vakuum, die gegeben ist als

$$\hbar\Delta_a = \langle a; 0 | H_I^{(2)} | a; 0 \rangle + \sum_{\lambda} \sum_b \frac{\langle a; 0 | H_I^{(1)} | b; \vec{k}_{\lambda}, \vec{\epsilon}_{\lambda} \rangle \langle b; \vec{k}_{\lambda}, \vec{\epsilon}_{\lambda} | H_I^{(1)} | a; 0 \rangle}{E_a - (E_b + \hbar\omega_{\lambda})}. \quad (12)$$

- a) Zeigen Sie, dass mit den Ersetzungen $k_{ba} = (E_b - E_a)/\hbar c$ und $\vec{p}_{ab} = \langle a | \vec{p} | b \rangle$, die Energieverschiebung geschrieben werden kann als:

$$\hbar\Delta_a = \frac{r_0}{\pi} \int_0^{k_M} dk \hbar c k - \frac{2r_0}{3\pi m} \int_0^{k_M} dk k \sum_b \frac{|\vec{p}_{ab}|^2}{k_{ba} + k}, \quad (13)$$

wobei r_0 eine zu bestimmende Konstante ist.

(2 Punkte)

Hinweis: Ersetzen Sie die Summen geeignet durch Integrale. Die Identität

$$\sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{k}} |\vec{\epsilon} \cdot \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 - \frac{|\vec{k} \cdot \vec{a}|^2}{k^2} \quad (14)$$

ist hilfreich bei die Berechnung des Winkelintegrals.

- b) Nur Zustände, für die $k_{ba} \ll k_M$ gilt, liefern einen signifikanten Beitrag in der Summe über alle b . Integrieren Sie die obigen Ausdrücke, und entwickeln Sie die Energieverschiebung wie folgt,

$$\hbar\Delta_a = \underbrace{D_a}_{\mathcal{O}(k_M^2)} + \underbrace{P_a}_{\mathcal{O}(k_M)} + \underbrace{L_a}_{\mathcal{O}(\ln k_M)}, \quad (15)$$

und nähern Sie L_a für $k_{ba} \ll k_M$.

(1 Punkt)

- c) Die sogenannte Bethe-Formel gibt einen Ausdruck für den Term L_a . Dazu führen wir die mittlere Anregungsenergie $\hbar c K_a$ ein. Zeigen Sie, dass mit der Formel

$$\left(\sum_b |\vec{p}_{ab}|^2 k_{ba} \right) \ln \frac{k_M}{K_a} = \sum_b |\vec{p}_{ab}|^2 k_{ba} \ln \frac{k_M}{k_{ba}} \quad (16)$$

sowie dem Erwartungswert des Kommutators $[\vec{p}, [\vec{p}, H_0]]$ der Term L_a wie folgt geschrieben werden kann:

$$L_a = \frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \left(\ln \frac{k_M}{K_a} \right) \langle a | 4\pi q^2 \delta(\vec{r}) | a \rangle \quad (17)$$

geschrieben werden kann, wobei $\alpha = q^2/\hbar c$ die Feinstrukturkonstante ist. (3 Punkte)