Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LA (Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2011 **Blatt 3** **28.04.2011**

Aufgabe 1 *Kommutatorrelationen*

Zeigen Sie, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ und $\hat{C}$ die Kommutatorrelationen

a)

$$[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$$

(1 Punkt)

b)

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$$

(1 Punkt)

gelten.

Aufgabe 2 *Stern-Gerlach-Versuch die Zweite*

Durch eine Stern-Gerlach Messung in z-Richtung werden Atome im Zustand $|\sigma_z\rangle$ präpariert ($\sigma_z = \pm 1$). In einer zweiten Stern-Gerlach Apperatur, die um einen Winkel θ um die Ausbreitungsrichtung der Atome gerdreht ist, werden die Atome im Zustand $|\sigma_n\rangle$ selektiert. Allgemein wird die dazugehörige Observable mit $\hat{\sigma}_n = \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n}$ bezeichnet, wobei $\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^T$ und $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)^T$ ein Einheitsvektor in Messrichtung ist.
Ziel dieser Aufgabe ist es, die Wahrscheinlichkeit

$$p(\sigma_n, \sigma_z) = \langle\sigma_z|\, \sigma_n\rangle \langle\sigma_n|\, \sigma_z\rangle = |\psi_{\sigma_n}(\sigma_z)|^2$$

zu berechnen, die Atome nach der zweiten Messnung in $|\sigma_n\rangle$ zu finden.

a) Zeigen Sie dazu zunächst, dass $\hat{\sigma}_n$ in der $\hat{\sigma}_z$-Darstellung durch

$$\begin{pmatrix} \langle +_z|\, \hat{\sigma}_n \,|+_z\rangle & \langle +_z|\, \hat{\sigma}_n \,|-_z\rangle \\ \langle -_z|\, \hat{\sigma}_n \,|+_z\rangle & \langle -_z|\, \hat{\sigma}_n \,|-_z\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

gegeben ist, wobei $|\pm_z\rangle = |\sigma_z\rangle$ die zwei möglichen Eigenzustände von σ_z sind. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie ausgehend von der Eigenwertgleichung $\hat{\sigma}_n\,|\sigma_n\rangle = \sigma_n\,|\sigma_n\rangle$, dass diese in $\hat{\sigma}_z$-Darstellung die Komponentenschreibweise

$$\sum_{\sigma_{z'}=\pm} \langle\sigma_z|\, \hat{\sigma}_n \,|\sigma_{z'}\rangle\, \psi_{\sigma_n}(\sigma_{z'}) = \sigma_n \psi_{\sigma_n}(\sigma_z)$$

besitzt. Machen Sie sich klar, dass diese Gleichung in Matrixdarstellung die Form

$$\begin{pmatrix} \langle +_z | \hat{\sigma}_n | +_z \rangle & \langle +_z | \hat{\sigma}_n | -_z \rangle \\ \langle -_z | \hat{\sigma}_n | +_z \rangle & \langle -_z | \hat{\sigma}_n | -_z \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle +_z | \sigma_n \rangle \\ \langle -_z | \sigma_n \rangle \end{pmatrix} = \sigma_n \begin{pmatrix} \langle +_z | \sigma_n \rangle \\ \langle -_z | \sigma_n \rangle \end{pmatrix}$$

aufweist. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der oberen Matrix und zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} \psi_{+_n}(+_z) \\ \psi_{+_n}(-_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle +_z | +_n \rangle \\ \langle -_z | +_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \psi_{-_n}(+_z) \\ \psi_{-_n}(-_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle +_z | -_n \rangle \\ \langle -_z | -_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $|\pm_n\rangle = |\sigma_n\rangle$ die zwei Eigenzustände von $\hat{\sigma}_n$ sind. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie ausgehend von der eigentlichen Fragestellung die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} &p(\sigma_n = +1, \sigma_z = +1), \\ &p(\sigma_n = -1, \sigma_z = +1), \\ &p(\sigma_n = +1, \sigma_z = -1), \\ &p(\sigma_n = -1, \sigma_z = -1). \end{aligned}$$

(1 Punkt)