Seminar zur Vorlesung Theoretische Physik III für LA (Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2011 **Blatt 6** **19.05.2011**

Aufgabe 1 *Und nochmal das Delta-Potential*

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = V_0 \delta(x), \qquad V_0 > 0.$$

Die stationäre Schrödingergleichung wird

$$\text{für } x < 0 \text{ durch } \psi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$$
$$\text{und für } x > 0 \text{ durch } \psi_{II}(x) = A_2 e^{ikx}$$

gelöst. Dabei ist $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ mit $E > 0$. Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten $R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$ und den Transmissionskoeffizienten $T = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2}$. Für welche Werte von V_0 gilt $T \to 0$, sodass $R = 1$ ist? *(2 Punkte)*

Aufgabe 2 *Teilchen im Schwerefeld*

Betrachten Sie ein Teilchen im Schwerefeld $V(x) = mgx$ mit $g > 0$.

a) Zeigen Sie, dass die stationäre Schrödingergleichung in Impulsdarstellung die Form

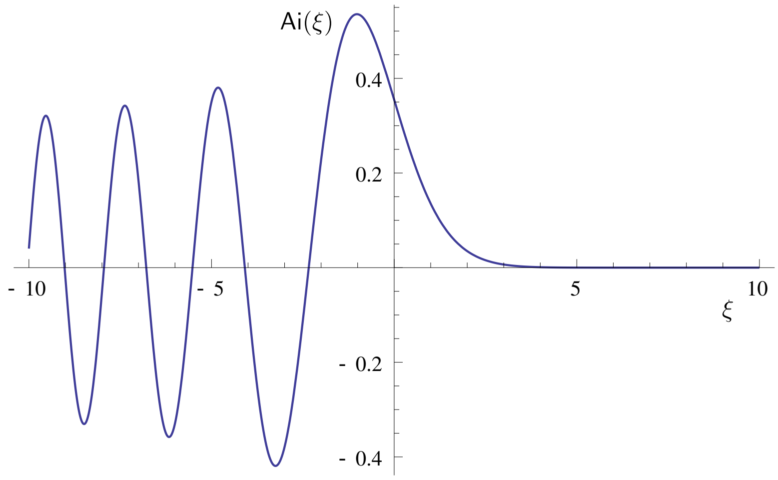
$$\psi'(p) = i \left(\frac{p^2}{2m^2\hbar g} - \frac{E}{\hbar m g} \right) \psi(p)$$

annimmt. *(1 Punkt)*

b) Lösen Sie die Differentialgleichung und geben Sie die Wellenfunktion in Orstdarstellung mit Hilfe der Airyfunktion

$$\mathrm{Ai}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i \left(\frac{t^3}{3} + \xi t \right) \right\} dt$$

an. Dabei muss die Normierungskonstante nicht explizit angegeben werden. *(2 Punkte)*



c) Skizzieren Sie anhand der obigen Darstellung der Airyfunktion die Wellenfunktion für verschiedene Energien E und diskutieren Sie ihr Ergebnis. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3 *Zwei nützliche Formeln*

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei lineare Operatoren.

a) Zeigen Sie, dass

$$e^{\xi\hat{A}}\hat{B}e^{-\xi\hat{A}} = \hat{B} + \xi[\hat{A},\hat{B}] + \frac{\xi^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + ...$$

gilt. Definieren Sie dazu $f(\xi) \equiv e^{\xi\hat{A}}\hat{B}e^{-\xi\hat{A}}$ und entwicklen Sie $f(\xi)$ in einer Taylorreihe um $\xi = 0$. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie weiterhin mit Hilfe von a), dass die Relation

$$e^{\xi(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\xi\hat{A}}e^{\xi\hat{B}}e^{-\frac{\xi^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

gilt, wenn $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$ ist.
Dazu ist es hilfreich die Funktion $f(\xi) = e^{\xi\hat{A}}e^{\xi\hat{B}}$ zu definieren und diese in die Differentialgleichung

$$f'(\xi) = (\hat{A} + \hat{B} + \xi[\hat{A},\hat{B}])f(\xi)$$

zu überführen. Die Integration führt dann zur gesuchten Relation. *(1 Punkt)*