

Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LA (Quantenmechanik und
Statistische Physik)

SS 2011

Blatt 11

23.06.2011

Aufgabe 1 *Die n -dimensionale Kugel*

Das Volumen einer n -dimensionalen Kugel mit Radius R lässt sich über das Integral

$$V_n(R) = \int dV_n = \underbrace{\int dx_1 \dots \int dx_n}_{\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2}$$

bestimmen, wobei dV_n das n -dimensionale Volumenelement in sphärischen Kugelkoordinaten und R der Radius der n -dimensionalen Kugel ist.

- a) Zeigen Sie anhand des obigen Integrals, dass

$$V_n(R) = V_n(1)R^n$$

gilt, wobei $V_n(1)$ das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel ist. (1 Punkt)

- b) Geben Sie mit Hilfe der Gleichung aus a) das Volumenelement dV_n in Abhängigkeit von $V_n(1)$ an. Wie kann aus dV_n das Volumen V_n berechnet werden und welche Bedeutung hat dabei der R unabhängige Anteil? (1 Punkt)

- c) Um nun konkret $V_n(1)$ zu bestimmen, berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

einmal in kartesischen und einmal in Kugelkoordinaten und drücken Sie $V_n(1)$ mit Hilfe der Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1}$ aus. (2 Punkte)

- d) Zeigen Sie nun, dass für das Volumen der n -dimensionalen Kugel

$$V_N(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma(n/2 + 1)}$$

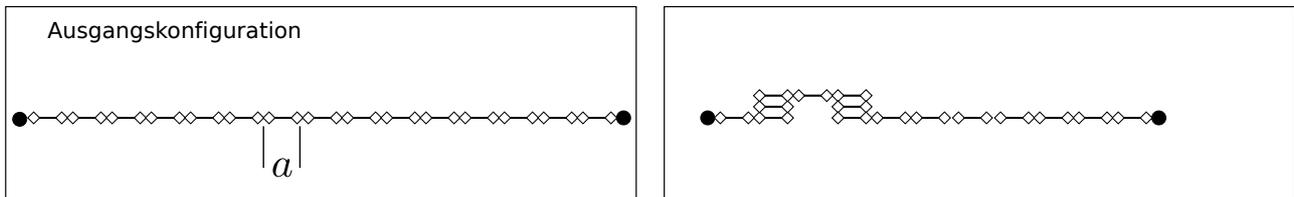
gilt, wobei $n/2\Gamma(n/2) = \Gamma(n/2 + 1)$ ist. (1 Punkt)

Aufgabe 2 Die eindimensionale Kette

Wir betrachten eine eindimensionale Kette, die aus N Elementen besteht, welche die Länge a besitzen. Wie in der unteren Abbildung dargestellt, sind die einzelnen Elemente der Kette entweder um 180° umgedreht oder nicht umgedreht.

Dabei ist n die Anzahl der Elemente der Kette die umgedreht und $N - n$ ist die Anzahl der Elemente, die nicht umgedreht wurden. Zudem soll $N \gg 1$, $n \gg 1$ und $N - n \gg 1$ gelten.

Weiterhin wurde in der unteren Abbildung die Ausgangskonfiguration (links), in der kein Element umgedreht und eine weitere Konfiguration (rechts), in der n Elemente der Kette umgeklappt wurden dargestellt. An den Abbildungen wird deutlich, dass die Länge x der Kette von



den n Elementen abhängt, welche umgeklappt wurden.

- Geben Sie die Anzahl der Mikrozustände der Kette an und berechnen Sie die Länge der Kette in Abhängigkeit von n und N . Dabei ist $L = aN$ die Länge der Kette in ihrer Ausgangskonfiguration. (1 Punkt)
- Wie hängt die Entropie des Systems von der Länge der Kette ab? (2 Punkte)
- Zeigen Sie, dass die Entropie mit der Länge der Kette abnimmt, d.h. $\frac{\partial S}{\partial x} < 0$. (1 Punkt)
- Was bedeutet es für die Kette, wenn man annimmt, dass das System versucht eine Konfiguration anzustreben, bei der die Entropie maximal ist? (1 Punkt)
- Zeigen Sie über die innere Energie $dU = TdS - Fdx$, dass die Kraft F , die nötig ist damit die Kette bei einer bestimmten Länge verharrt, als

$$F \simeq -\frac{k_B T}{a} \operatorname{arctanh}(x/L)$$

gegeben ist.

(1 Punkt)