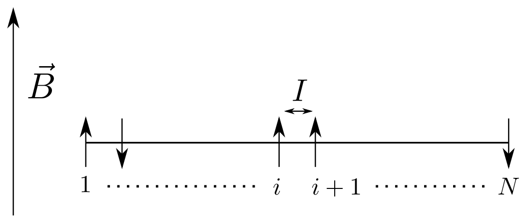
Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LA (Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2011 **Blatt 13** **07.07.2011**

Aufgabe 1 *Das Ising-Modell eindimensional*

Das einfachste Modell für wechselwirkende magnetische Momente μ, die sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ befinden, ist das Ising-Modell. Dabei wird ein System aus N Spins betrachtet, die eindimensional in einer Kette im gleichen Abstand angeordnet sind.
Zudem wechselwirken die magnetischen Momente miteinander wobei angenommen wird, dass die Wechselwirkung so kurzreichweitig ist, dass nur die Wechselwirkung zwischen zwei benachbarten Spins betrachtet werden muss.



Im Hamiltonoperator für dieses System

$$\hat{H} = -\mu B \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i - I \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_{i+1}$$

zeichnet der Index i jedes einzelne magnetische Moment aus, $\hat{\sigma}_i \equiv \sigma_i^{(z)}$ ist der Spin-Operator in z-Richtung mit den Eigenwerten ± 1 und I gibt die Wechselwirkungstärke zwischen den benachbarten Spins an. Des Weiteren werde periodische Randbedingungen angenommen, d.h. $\hat{\sigma}_{N+1} = \hat{\sigma}_1$.

a) Interpretieren Sie zunächst die einzelnen Terme des Hamiltonoperators und machen Sie sich klar welche Energie jeder einzelne Spin haben kann wenn es keine Wechselwirkung zwischen den Spins gibt. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Zustandssumme $\mathcal{Z}$ in der kanonischen Gesamtheit und zeigen Sie, dass diese auf die Form

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left\{P^N\right\}$$

gebracht werden kann, wobei

$$P = \begin{pmatrix} e^{\frac{I+\mu B}{k_B T}} & e^{-\frac{I}{k_B T}} \\ e^{-\frac{I}{k_B T}} & e^{\frac{I-\mu B}{k_B T}} \end{pmatrix}$$

ist. *(3 Punkte)*

c) Bringen Sie die Matrix P auf Diagonalform und zeigen Sie, dass dann die Zustandssumme als

$$\mathcal{Z} = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

geschrieben werden kann, wobei λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von P sind. *(1 Punkt)*

d) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und diskutieren Sie, welcher der beiden Eigenwerte den größeren Betrag besitzt.
(Dies kann für die Grenzwertbetrachtung in f) hilfreich sein). *(2 Punkte)*

e) Zeigen Sie, dass das gesamte mittlere magnetische Moment $M = \mu \left\langle \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i \right\rangle$ durch

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_{T,N}$$

gegeben ist, wobei $F = -k_B T \ln \mathcal{Z}$ die freie Energie ist. *(1 Punkt)*

f) Berechnen Sie mit der in e) gefundenen Beziehung das mittlere magnetische Moment pro Spin $m = \frac{M}{N}$ im Grenzfall $N \to \infty$ und skizzieren Sie diese Größe als Funktion von $x = \frac{\mu B}{k_B T}$ für verschiedene Werte von $y = \frac{I}{k_B T}$. *(1 Punkt)*