Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LA (Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2011 **Blatt 7** **26.05.2011**

Aufgabe 1 *Kohärente Zustände*

a) Zeigen Sie, dass $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ mit Eigenwert α ist, d.h.

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie durch Lösen der Eigenwertgleichung aus a), dass die Wellenfunktion des kohärenten Zustandes in Ortsdarstellung die Form

$$\psi_\alpha(x) = \frac{(2\pi)^{-1/4}}{\sqrt{\Delta x_\alpha}} \exp\left\{-\frac{(x-\langle\hat{x}\rangle_\alpha)^2}{(2\Delta x_\alpha)^2} + \frac{i}{\hbar}\langle\hat{p}\rangle_\alpha\, x\right\}$$

besitzt, wobei

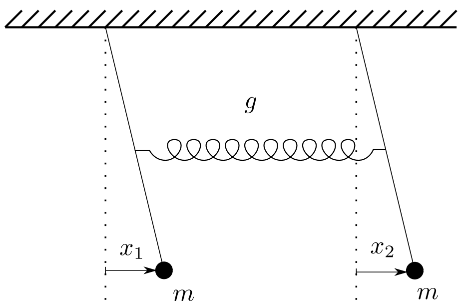
$$\langle\hat{x}\rangle_\alpha = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\mathrm{Re}\{\alpha\}, \qquad \langle\hat{p}\rangle_\alpha = \sqrt{2m\hbar\omega}\,\mathrm{Im}\{\alpha\}, \qquad \Delta x_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

ist. Interpretieren Sie dieses Ergebnis, indem Sie $\psi_\alpha(x)$ mit dem Grundzustand des harmonischen Oszillators in Orstdarstellung $\varphi_0(x)$ vergleichen. *(2 Punkte)*

c) Begründen Sie durch analoge Rechnung wie in b), dass der Erzeugungsoperator $\hat{a}^\dagger$ keinen Eigenzustand besitzt. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Gekoppelte Pendel quantenmechanisch*

Wir betrachten zwei Pendel mit den Massen m, welche über eine Feder miteinander verbunden sind. Dabei ist g eine dimensionslose Kopplungskonstante.



Für kleine Auslenkungen kann der Hamiltonoperator in Orstdarstellung angegeben werden als

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + gm\omega_0^2(x_1 - x_2)^2.$$

a) Identifizieren Sie zunächst die einzelnen Terme des Hamiltonoperators. Zeigen Sie, dass durch das Einführen der Koordinaten $x = x_1 - x_2$ und $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ der Hamiltonoperator auf die Form

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2 X^2$$

gebracht werden kann. Dabei ist $M = 2m$, $\mu = \frac{m}{2}$, $\Omega = \omega_0$ und $\omega = \sqrt{1+4g}\,\omega_0$. Transformieren Sie dazu die Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ in die neuen Koordinaten (Kettenregel). Welchen Vorteil bringt die Transformation auf die neuen Koordinaten und was bedeuten die neuen Koordianten physikalisch? *(2 Punkte)*

b) Den Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial X}$ können die Impulsoperatoren $\hat{p}$ und $\hat{P}$ zugeordnet werden. Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\hat{X}, \hat{x}],\ [\hat{x}, \hat{p}],\ [\hat{P}, \hat{p}],\ [\hat{X}, \hat{P}]$$

indem Sie $\hat{P}$ und $\hat{p}$ durch die Impulsoperatoren der alten Koordinaten $\hat{p}_1$ und $\hat{p}_2$ ausdrücken. *(1 Punkt)*

c) Drücken Sie $\hat{H}$ durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$, $\hat{A}^\dagger$ und $\hat{A}$ aus. Dabei sind die Erzeugungsoperatoren als

$$\hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}\hat{X} - i\frac{\hat{P}}{\sqrt{M\hbar\Omega}}\right)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{\mu\hbar\omega}}\right)$$

definiert. Zeigen Sie weiter, dass $|N,n\rangle$ ein Energieeigenzustand von $\hat{H}$ ist, wobei $|N\rangle$ und $|n\rangle$ Eigenzustände zu $\hat{A}^\dagger\hat{A}$ und $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ mit den Eigenwerten N und n sind.
Bestimmen Sie zudem den Eigenwert $E_{N,n}$. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie die Wellenfunktion des Grundzustandes in den neuen Koordinaten $\psi_0(X,x) = \langle x, X|\,0,0\rangle$ und zeigen Sie, dass die Wellenfunktion des Grundzustandes in den alten Koordinaten nicht separabel ist, d.h.

$$\psi_0(x_1,x_2) \neq \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)$$

Ein solcher Zustand wird verschränkter Zustand genannt. *(1 Punkt)*