

Seminar zur Vorlesung Theoretische Physik III für LA (Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2011

Blatt 9

09.06.2011

Aufgabe 1 EPR-Zustand

a) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle_1 |x + x_0\rangle_2 \quad (1)$$

die Impulsdarstellung

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{\frac{i}{\hbar} p x_0} |p\rangle_1 |-p\rangle_2 \quad (2)$$

besitzt, wobei die Indizes 1, 2 für Teilchen 1, bzw. für Teilchen 2 stehen sollen. (1 Punkt)

b) An Teilchen 1 kann eine Orts- bzw. Impulsmessung durchgeführt werden. Was würde eine anschließende Orts- bzw. Impulsmessung an Teilchen 2 ergeben? Vollziehen Sie mit der Darstellung (1) und (2) des Zustandes $|\psi\rangle$ das EPR-Argument nach, wobei der Link EPR-Paper zur Veröffentlichung von Einstein, Podolsky und Rosen führt. (1 Punkt)

Aufgabe 2 Eigenschaften der Spur

Im Folgenden sollen einige Eigenschaften der Spur bewiesen werden, wobei diese für einen Operator \hat{A} und eine vollständige Basis $\{|n\rangle\}$ als

$$\text{Tr}\{\hat{A}\} = \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle$$

definiert ist.

a) Die Spur hängt nicht von der Wahl der Basis ab. (1 Punkt)

b) Die Spur ist linear, d.h. es gilt für zwei Skalare λ_1, λ_2 und zwei Operatoren \hat{A}, \hat{B}

$$\text{Tr}\{\lambda_1 \hat{A} + \lambda_2 \hat{B}\} = \lambda_1 \text{Tr}\{\hat{A}\} + \lambda_2 \text{Tr}\{\hat{B}\}.$$

(1 Punkt)

c) Für einen diagonalisierbaren Operator \hat{A} gilt

$$\det e^{\hat{A}} = e^{\text{Tr}\{\hat{A}\}}.$$

(1 Punkt)

Aufgabe 3 Die Spur und der Dichteoperator

a) Zeigen Sie, dass für einen Dichteoperator $\hat{\rho}$, der einen reinen Zustand beschreibt

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\} = 1$$

gilt.

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}^2\} < 1$$

gilt, wenn $\hat{\rho}$ einen gemischten Zustand beschreibt.

(1 Punkt)

Hinweis: Es kann von Vorteil sein den Dichteoperator auf Diagonalform zu bringen.

Aufgabe 4 Dichtematrizen

Welche der folgenden Matrizen sind Dichtematrizen?

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & e^{i\pi/3} \\ e^{i\pi/3} & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/4 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 5 Mittelwerte und Dichteoperatoren

a) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ für die Dichteoperatoren

$$\hat{\rho}_1 = |+_x\rangle \langle +_x|, \quad \hat{\rho}_2 = \frac{3}{4} |+_z\rangle \langle +_z| + \frac{1}{4} \hat{\rho}_1$$

(2 Punkte)

b) Bestimmen Sie für den Dichteoperator

$$\hat{\rho} = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \left(\frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{-[(x' - d)^2 + (x'' - d)^2]}{4\Delta x^2} \right\} + \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{-[(x' + d)^2 + (x'' + d)^2]}{4\Delta x^2} \right\} \right) |x'\rangle \langle x''|$$

den Mittelwert des Ortsoperators \hat{x} . Überlegen Sie sich dazu zunächst welches Ergebnis Sie erwarten würden. (2 Punkte)