Prof. Dr. Giovanna Morigi Stefan Schütz, Rick Dannert

Seminar zur Vorlesung
Quantentheorie des Lichtes

SoSe 2012 **Blatt 7** **18. Juli**

Änderung des atomaren magnetischen Momentes aufgrund von Vakuum-Magnetfeldfluktuationen

Ein neutrales, paramagnetisches Atom im Grundzustand $|a\rangle$ hat ein magnetisches Moment $\vec{M} = \gamma \vec{S}$, wobei $\vec{S}$ der Spin, $\gamma = g_a q_e/(2m_e c)$ das gyromagnetische Verhältnis mit der Ladung q_e und Masse m_e des Elektrons, und g_a der Landé-Faktor für den Zustand $|a\rangle$ ist. Das Atom befindet sich in einem statischen homogenen Magnetfeld $\vec{B}_0 \parallel \vec{e}_z$. Die freie Zeitentwicklung von $\vec{M}$ gekoppelt an $\vec{B}_0$ ist durch eine Larmor-Präzession der Frequenz $\omega_L = -\gamma B_0$ beschrieben. Wir modellieren das System durch den folgenden Hamiltonoperator $H = H_{emf} + H_S + H_I$, wobei H_{emf} das Strahlungsfeld, $H_S = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}_0$ die Wechselwirkung von $\vec{M}$ mit dem statischen Feld, und $H_I = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r})$ die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld beschreibt.

1) Der Operator H_S wird mit Hilfe der unitären Transformation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}F/\hbar}$ in den Operator H_S' überführt. Bestimmen Sie H_S' bis zur dritten Ordnung in q_e, wobei $F = \gamma(\vec{\nabla} \times \vec{Z}(\vec{r})) \cdot \vec{S}$ ist. Die Felder sind definiert als $\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{i} \int d^3k \sum_{\vec{\epsilon}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{(2\pi)^3}} [a_{\vec{\epsilon}}(\vec{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{\vec{\epsilon}}(\vec{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}](\vec{\kappa} \times \vec{\epsilon})$ und $\vec{Z}(\vec{r}) = \int d^3k \sum_{\vec{\epsilon}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega(2\pi)^3}} \frac{\vec{\epsilon}}{\mathrm{i}\omega} [a_{\vec{\epsilon}}(\vec{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{\vec{\epsilon}}(\vec{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}]$. Dazu kann die Operatoridentität $e^X Y e^{-X} = Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}[X,[X,Y]] + \cdots$ verwendet werden. Zudem ist es hilfreich, zunächst die Kommutatorrelationen $[S_j, S_k]$ und $[(\vec{\nabla} \times \vec{Z})_j, (\vec{\nabla} \times \vec{Z})_k]$ zu berechnen. *(4 Punkte)*

2) Berechnen Sie die mittlere Energie von H_S' im Zustand $|m_s; vac\rangle$ (mit $S_z |m_s\rangle = \hbar m_s$). Zeigen Sie, dass das Ergebnis als eine Korrektur $\delta\omega_L$ zu ω_L aufgefasst werden kann. Drücken Sie $\delta\omega_L/\omega_L$ als eine Funktion von g_a und der Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/(\hbar c)$ aus. Hierbei sei $\omega_M = ck_M$ die Grenzfrequenz (Cutoff) der Modenentwicklung. *(4 Punkte)*

3) Was ist der physikalische Ursprung von $\delta\omega_L$? Wie lässt sich das Vorzeichen interpretieren? *(2 Punkte)*

4) Ein Teilchen mit Ladung q und Masse m hat in $\vec{B}_0$ eine Zyklotronbewegung der Frequenz $\omega_c = -qB_0/mc$. Die Wechselwirkung mit dem transversalen Feld führt zu einer Variation von m derart, dass $\delta\omega_c/\omega_c = -\delta m/m$ mit $\delta m = \frac{4}{3\pi}\frac{q^2}{c^2}k_M$. Vergleichen Sie $\delta\omega_L/\omega_L$ mit $\delta\omega_c/\omega_c$. Wenn der berichtigte Landé-Faktor g_a' definiert ist durch die Beziehung $g_a'/2 = \omega_L'/\omega_c'$ mit $\omega_L' = \omega_L + \delta\omega_L$ und $\omega_c' = \omega_c + \delta\omega_c$, wie ist dann das Vorzeichen der Korrektur $\delta g_a = g_a' - g_a$? Wodurch ist dieses bestimmt?

(4 Punkte)